Math. P. 490 sda (1

ANALYTISCHE
GEOMETRIE DES RAUMES

VON

GEORGE SALMON.

DEUTSCH BEARBEITET

VON

Dr. WILHELM FIEDLER,
PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

I. THEIL.

DIE ELEMENTE UND DIE THEORIE DER FLÄCHEN ZWEITEN GRADES.

VIERTE VERBESSERTE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Math. P. 490 sda/1

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

ALLE RECHTE
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

56 g

Vorwort.

Für die vorliegende neue Auflage dieses Bandes sind die von Dr. Cathcart in der 4. Aufl. des Originals gegebenen Zusätze benutzt worden. Aber sie hat in Ausbildung des neuen Inhaltes der deutschen 3. Aufl. eine grössere Umgestaltung dadurch erfahren, dass nach den einführenden Kapiteln über Punkt, Ebene, gerade Linie ein eigenes Kap. IV über die homogenen projectivischen Coordinaten folgt; und dass nach der Entwickelung der Haupteigenschaften der Flächen zweiten Grades in den drei folgenden Kapiteln die früher nur auf wenigen Seiten skizzirte Lehre von den Collineationen und Reciprocitäten in Kap. VIII eingehend untersucht und mit der Lehre von den Flächen 2. Gr. in organische Verbindung gebracht worden ist; dieses Kapitel endigt naturgemäss mit der trefflichen Salmon'schen Darstellung der Theorie der reciproken Polaren. Im folgenden Kapitel konnte nun z. B. die Theorie der gewundenen Curven dritter Ordnung und ihrer Developpabeln gegeben werden, wie dies die selbstständige Ausgabe des ersten Bandes des Gesammtwerkes über die Raumgeometrie fordert; die projective Erzeugung der Complexe zweiten Grades erhielt ihren naturgemässeren Platz, wie auch die lineare Transformation der Flächen 2. Grades in sich hervortrat; die auch schon in der 3. Aufl. enthaltene Lehre von J. H. S. Smith über die entsprechenden confocalen Systeme in collinearen Räumen konnte in aller Kürze besser dargestellt werden, u. s. w.

Von Einzelnheiten seien nur erwähnt die Hauptstücke der Geometrie der Kugelsysteme und der linearen Complexe; die doppelte Interpretation des Substitutionsresultats der Coordinaten eines Punktes in die Gleichung 2. Gr. durch die sechs zugehörigen Normalen der Fläche einerseits (Art. 93) und die über

die Focalkegelschnitte gemessenen Minimaldistanzen von Staude anderseits (am Schluss des Kapitels X von den confocalen Flächen); endlich die Ergänzung der schon früher sehr ausführlich behandelten Metrik durch die Lehre von den Parallelen in der elliptischen Geometrie in dem auch sonst noch bereicherten Invarianten-Kapitel XI.

Es ward dadurch auch möglich, mittelst der Literatur-Noten eine grössere Zahl neuerer Arbeiten von Bedeutung in den geeigneten Zusammenhang zu stellen.

Möge das Buch auch fernerhin der Beachtung des mathematischen Publikums würdig befunden werden.

Zürich, Herbst 1897.

Wilh. Fiedler.

Inhaltsverzeichniss.

I. Kapitel. Der Punkt, seine Coordinaten, Interpretation der Gleichungen zwischen solchen.

Artikel		Seite
1.	Bestimmung eines Punktes durch drei Coordinaten	1
3.	Projectionen des Punktes, einer begrenzten Geraden und einer ebenen Fläche auf eine Ebene	3
5.	Projection eines Punktes, einer Strecke und einer Kette von Strecken auf eine Gerade	4
7.	Der Specialfall der Coordinaten uud des Radius vector eines Punktes .	5
8.	Coordinaten des Theilpunktes einer Strecke und eines Punktes in der Ebene eines Dreiecks. B.	—
10.	Entfernung von zwei Punkten	6
11.	Polarcoordinaten eines Punktes; Richtungscosinus einer Geraden	7
12.	Ebene Fläche aus ihren Projectionen	8
13.	Der Winkel von zwei Geraden. B.	8
15.	Die Richtungscosinus der gemeinsamen Normale zu zwei Geraden .	9
16.	Transformation der Coordinaten zu parallelen Axen	10
17.	Von rechtwinkligen Axen zu andern Axen vom nämlichen Anfangspunkt .	—
20.	Der Grad einer Gleichung zwischen den Coordinaten wird durch Transformation nicht geändert	12
21.	Interpretation der Gleichungen in Punktcoordinaten; Specialfälle .	13
22.	Durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten wird eine Fläche, durch zwei Gleichungen eine Linie, durch drei eine Gruppe von Punkten dargestellt	—
23.	Classification der Flächen und Curven nach ihren Ordnungen	14
25.	Bedeutung einer Gleichung zwischen zwei Coordinaten. . . .	16

II. Kapitel. Die Ebene.

26.	Die Ebene und die Gleichung ersten Grades	18
27.	Bestimmung der Ebene durch die Normale vom Anfangspunkt	19
28.	Der Winkel von zwei Ebenen	20
29.	Die Ebene aus ihren Axenabschnitten	—
30.	Ebene durch drei Punkte, geometrische Deutung der Coefficienten ihrer Gleichung. .	21

Artikel Seite
32. Länge der Normale von einem Punkte auf die Ebene 23
33. Schnittpunkt von drei Ebenen; vier Ebenen durch einen Punkt 24
34. Das Tetraedervolumen aus den Ecken und den Flächen . . . —
35. Allgemeine lineare Symbolgleichungen. B. 1—2 25
36. Die Relation zwischen den Entfernungen von vier Punkten einer Ebene . 27
37. Das Tetraedervolumen aus den Kantenlängen 28
38. Die Relation zwischen den sphärischen Distanzen von vier Punkten einer Kugel . 30
39. Radius der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel. 31

III. Kapitel. Die gerade Linie.

40. Gleichungen einer Geraden in Cartesischen Coordinaten; Bedingung des Durchschneidens für zwei Gerade. B. 33
41. Die Gerade durch einen Punkt und eine Richtung; Normale durch einen Punkt zu einer Ebene. B. 1—5 34
42. Halbirungslinie des Winkels von zwei Geraden; Grösse des Winkels. B. 1—2. 37
44. Winkel einer Geraden und einer Ebene. 38
45. Bedingung der Lage einer Geraden in einer Fläche 39
46. Normalebene zu einer Ebene durch eine Gerade. 40
47. Ebene durch eine Gerade parallel einer andern 41
48. Kürzeste Entfernung von zwei Geraden. B.. 42
49. Die sechs Coordinaten und die vier unabhängigen Constanten der Geraden. B. 1—2 44

IV. Kapitel. Homogene projectivische Coordinaten.

50. Jede Ebene ist durch vier feste Ebenen linear ausdrückbar: Homogene Punktcoordinaten und homogene Ebenencoordinaten. Dualität. B. 1—3 . 47
51. Doppelverhältniss eines Ebenenbüschels. 49
52. Projectivische Coordinaten des Punktes und der Ebene; Bedingung der Incidenz. Gleichung der Ebene und des Punktes 50
53. Vierebenen-, Volumen- und Vierpunkt-Coordinaten, prismatische und Keil-Coordinaten; reguläre Coordinaten. B. 1—5 . 56
54. Transformation der Vierebenen-Coordinaten; Beziehungen derselben zu den Flächengrössen und dem Volumen des Fundamentaltetraeders. B. 62
55. Die homogenen projectivischen Coordinaten einer geraden Linie . 65
56. Ihre geometrische Bedeutung und Construction. B. 67
57. Bedingung des Durchschneidens von zwei Geraden, ihr Schnittpunkt und ihre Verbindungsebene 72
58. Bedeutung der homogenen Gleichungen in Strahlencoordinaten: Complex, Congruenz, Regelflächen, Gruppen von Geraden. B. 1—8 73

V. Kapitel. Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

59. Die Zahl der zur Bestimmung nöthigen Bedingungen. B. . . 80
60. Transformation der allgemeinen Gleichung zu parallelen Axen 82

Artikel — Seite

61. Transformation zu Polarcoordinaten 82
62. Tangentialebene der Fläche in einem ihrer Punkte 83
64. Berührungspunkt einer Tangente oder Tangentialebene von einem Punkte ausser der Fläche; Pol und Polarebene. . . . 84
65. Die Polarebene als Ort der harmonisch conjugirten Punkte zum Pol . 85
66. Polargerade einer gegebenen Geraden 86
67. Fläche zweiten Grades mit Doppelpunkt; Kegelflächen . . . —
68. Die Discriminante der allgemeinen Gleichung 87
70. Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades 89
71. Mittelpunkte paralleler Sehnen; conjugirte Durchmesser und Diametralebenen; Tripel conjugirter Durchmesser und Diametralebenen . 90
73. Hauptebenen und Axen der Fläche. B. 92
74. Die Schnitte paralleler Ebenen mit einer Fläche zweiten Grades sind ähnlich in ähnlicher Lage 94
75. Abschnitte in parallelen Sehnenpaaren durch die Fläche . . —
76. Schnittpunkte der Fläche mit der Verbindungslinie von zwei Punken. B. Tangentialebenen im Büschel 95
77. Tangentialebene in Ebenencoordinaten und Berührungspunkt. B. 96
78. Pol und Polarebene. B. 1—2. 97
79. Berührungskegel aus einem Punkte. B. 98
80. Bedingung der Berührung einer Ebene mit der Fläche. B. . 99
81. Bedingung der Berührung mit einer Geraden. B. 101
82. Tangentialebenen durch eine Gerade und Berührungspunkte. Gerade auf der Fläche. B. 102

VI. Kapitel. Classification der Flächen zweiten Grades.

83. Transformation auf den Mittelpunkt der Fläche 107
84. Invarianten der Transformation zu neuen rechtwinkligen Axen —
85. Transformation zu den Hauptaxen 109
86. Classification der Flächen zweiten Grades: Ellipsoid 110
87. Das einfache Hyperboloid 112
88. Das zweifache Hyperboloid, Kegel und Kegelschnitt. B. 1—4 113
89. Cylinder, Paare von Ebenen oder Punkten, Paraboloide . . . 115
90. Reduction der Gleichung des Paraboloides 118

VII. Kapitel. Ableitung von Eigenschaften der Flächen zweiten Grades aus speciellen Formen ihrer Gleichung.

91. Flächen mit Mittelpunkt; Tangentialebene und Polarebene eines Punktes . 121
92. Ihre Gleichung in Ebenencoordinaten. Pol einer Ebene. B. 122
93. Die Normale der Fläche und ihre Abschnitte. B. unter den Literatur-Nachweisungen S. XV 123
94. Die Quadratsumme der Reciproken von drei zu einander rechtwinkligen Durchmessern —
95. Die der Normalen aus dem Centrum von drei zu einander rechtwinkligen Tangentialebenen 124
96. Die dem Durchmesser eines Punktes conjugirte Diametralebene. —

Artikel Seite

97. Summe der Quadrate von drei zu einander conjugirten Halbdurchmessern; Parallelepiped derselben 125
100. Quadratsumme der Projectionen von drei conjugirten Durchmessern auf eine Gerade oder eine Ebene 127
102. Ort des Schnittpunktes der Tangentenebenen in den Endpunkten von drei conjugirten Halbdurchmessern. B.. —
103. Axenlängen eines Diametralschnittes 128
104. Schnitt mit einem gegebenen Durchmesser als Axe 129
105. Bestimmung der Diametralkreisschnitte. 130
106. Flächen mit Kreisschnitten von gleicher Stellung 131
107. Zwei nicht parallele Kreisschnitte derselben Fläche liegen auf einer Kugel . 132
108. Kreispunkte der Fläche —
109. Kreisschnitte des elliptischen Paraboloids. 133
110. Gerade Linien auf dem einfachen Hyperboloid. 134
111. Entstehung desselben durch den Schnitt entsprechender Ebenen projectivischer Büschel. B. 1—2 135
112. Die beiden Systeme geradliniger Erzeugenden der Fläche und ihr Asymptotenkegel. B. 136
115. Bestimmung des Hyperboloids durch drei Gerade desselben Systems . 139
116. Gleichungen des Hyperboloids aus drei Geraden. 140
117. Das einfache Hyperboloid aus projectivischen Reihen auf zwei Geraden. 143
118. Die geraden Linien auf dem hyperbolischen Paraboloid . . 144
119. Aehnliche Theilung der Geraden des einen Systems durch die des andern . 145
120. Bedingungen, unter denen die allgemeine Gleichung eine Umdrehungsfläche darstellt 147
123. Die Kugel und die Potenzorte; der Schnittwinkel 150
124. Beispiele der Untersuchung geometrischer Oerter 1—28 . . 152

VIII. Kapitel. Von der Projectivität oder: Collineationen und Reciprocitäten.

125. Geometrische Verwandtschaften, insbesondere lineare . . . 166
126. Collineation und lineare Substitution; geometrische Bedeutung der Coefficienten. B. 1—3 167
127. Reciprocität und lineare Substitution; geometrische Bedeutung der Coefficienten. B. 1—4 173
128. Die Congruenz in Deckung und die Transformation der Coordinaten. B. 1—2. Orthogonales Hyperboloid. 175
129. Das Haupttetraeder collinearer Räume und ihre speciellen Formen: Axiale, geschaarte und centrische Collineation. B. 1—9 . 180
130. Das involutorische Tetraeder reciproker Räume. B. 1—4 . 185
131. Die Flächen zweiten Grades aus reciproken Bündeln oder Ebenen. B. 1—6 . 190
132. Die involutorischen Collineationen: Centrische und geschaarte. Die Symmetrien. B. 1—2 195
133. Die involutorische Reciprocität des Nullsystemes und der lineare Complex. B. 198

Artikel Seite
134. Das Polarsystem und seine Directrixfläche zweiten Grades. B. 1—8 202
135. Von den reciproken Polaren. Gewundene Curve und developpable Fläche 208
136. Reciproke in Bezug auf eine feste Kugel oder einen Ursprung 209
137. Reciprocalkegel; Focalstrahlen und Kreisschnitte 210
138. Reciprocalfläche der Kugel als Umdrehungsfläche. B. 1—9 211
139. Reciproke einer centrischen Fläche zweiten Grades 213

IX. Kapitel. Methoden der abgekürzten Bezeichnung.

140. Die Erzeugnisse reciproker linearer Elementargebilde zweiter Stufe: Flächen und Complexe zweiten Grades 215
141. Die Erzeugnisse von collinearen Elementargebilden zweiter Stufe: Curven und Developpable dritter Ordnung resp. Classe. B. 1—6 217
142. Ihre symbolischen und ihre Parameterdarstellungen. B. 1—7. 221
143. Flächenbüschel und Flächenschaar zweiten Grades. B. 1—2 228
144. Flächennetz oder -bündel zweiten Grades. B. 230
145. Büschel der Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die Flächen eine Büschels 232
146. Hyperboloid der Polarlinien einer Geraden 233
147. Ortscurve der Pole einer Ebene —
148. Bündel der Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die Flächen eines Bündels, etc. 234
149. Vier Kegelflächen im Büschel; gemeinasmes Quadrupel. B. 1—2. Ein Complex vom zweiten Grade 235
150. Flächen zweiten Grades mit gemeinschaftlichem ebenen Querschnitt oder Berührungskegel. Specialfälle 238
151. Flächen, die sich längs eines ebenen Schnittes berühren . . 239
152. Aehnliche ähnlich gelegene Flächen zweiten Grades; Kugeln. B. —
153. Einander umhüllende Flächen zweiten Grades; concentrische und ähnliche. B. 242
154. Beziehung auf das gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole. B.. 244
155. Tetraeder, welche in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades einander conjugirt sind 247
157. Hyperboloidische Relationen. B. 1—3 250
158. Ein Analogon des Pascal'schen Satzes 251
159. Hyperboloidische Sechsseite. B. 254

X. Kapitel. Focalpunkte und confocale Flächen.

160. Begriff eines Focalpunktes; Analogie der Brennpunkte ebener Curven; Orte der Focalpunkte 256
162. Die Focalpunkte gegebener Flächen; Focalkegelschnitte . . 258
163. Focalkegelschnitte und Kreispunkte; zwei Arten der Focalpunkte 261
165. Schnitt der Ebene durch Focalpunkt und Directrix 263
166. Kegelflächen und ihre Focallinien 263
167. Focalparabeln der Paraboloide 265
168. Metrische Eigenschaften der Focalpunkte beider Arten; Modul der Fläche 267

Artikel Seite

169. Focalpunkte als Scheitel umgeschriebener Rotationskegel; Reciprocalfläche in Bezug auf einen Focalpunkt als Umdrehungsfläche. B. 1—6. 268
170. Reciprocität zwischen Eigenschaften der Umdrehungsflächen und solchen der allgemeinen Flächen zweiten Grades. B. 1—6 270
171. Confocale Curven und Flächen zweiten Grades 272
173. Drei zu einer gegebenen Fläche Confocale durch einen Punkt 275
176. Zwei confocale Flächen durchschneiden sich rechtwinklig . 277
177. Die Normalen der beiden Confocalen in einem Punkte der Fläche sind den Axen des der Tangentialebene parallelen Diametralschnittes parallel 278
180. Längs der Schnittcurve von zwei Confocalen ist pD constant 280
181. Ort der Pole einer Ebene für die Flächen des Systems . . 281
183. Die Axen des Tangentenkegels einer Fläche als Normalen der confocalen Flächen durch seinen Scheitel 282
185. Transformation auf diese Axen. 283
188. Gleichungen der Focalkegel und andere Anwendungen. B. 1—3 . 285
189. Die Berührungskegel confocaler Flächen aus einem Punkte sind confocal. 288
190. Eine Gerade wird von zwei Flächen des Systems berührt . 290
191. Paraboloid der Normalen confocaler Flächen, welche den Tangentialebenen eines Büschels entsprechen 291
192. Die Axe der Fläche des Systems, welche eine gegebene Ebene berührt . 292
194. Ort des Schnittpunktes von drei zu einander rechtwinkligen Tangentialebenen zu drei confocalen Flächen 293
195. Tangentenkegel zweier confocalen Flächen aus demselben Scheitel . 294
196. Axen einer Fläche zweiten Grades aus einem System ihrer conjugirten Durchmesser. 295
197. Länge der Sehne einer Fläche aus einem Punkte der Fläche, welche zwei confocale berührt 296
198. Ort der Scheitel gerader Tangentenkegel der Fläche (Art. 169) —
199. Jeder der Focalkegelschnitte als Ort der Focalpunkte des andern. 298
200. Weitere Beispiele 1—4 299
201. Correspondenz der Punkte von zwei confocalen Ellipsoiden 300
202. Confocale Kegelschnitte als Bilder der Durchdringungscurven einer Fläche mit ihren Confocalen; elliptische Coordinaten . 301
203. Ein Specialfall des Flächenbüschels mit gemeinsamen Kreisschnitten . 302
204. Der Ivory'sche Satz. B. 303
205. Die Jacobi'sche Erzeugung der Flächen zweiten Grades; die Normale der Fläche. B. 305
207. Ort der Berührungspunkte paralleler Tangentialebenen confocaler Flächen. B. 308
208. Krümmung der Flächen zweiten Grades; Krümmungsradien der normalen und schiefen Schnitte —
210. Die Hauptkrümmungsradien als Grenzwerthe der erstern; Hauptschnitte und Krümmungscurven. B. 311
211. Die Hauptkrümmungscentra als Pole der Tangentialebene in Bezug auf die Confocalen durch den Berührungspunkt . 312
212. Die Fläche der Hauptkrümmungscentra und ihre Reciproke. 313

Artikel Seite
214. Die sechs Focalcentra und Focalkugeln einer Fläche zweiten Grades und ihre metrischen Relationen 315
215. Die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen im confocalen Flächensysteme. B.. 317

XI. Kapitel. Von den Invarianten und Covarianten der Systeme zweiten Grades.

216. Die Invarianten zweier Flächen aus der Discriminante des Büschels. B. 1—7. 321
217. Geometrische Bedeutung des Verschwindens der Invarianten Θ oder Φ. B. 1—6.. 327
218. Bedingung der Berührung von zwei Flächen zweiten Grades. B. 1—3. Parallelflächen. 329
219. Der Berührungspunkt als Doppelpunkt der Durchdringungscurve . 331
220. Die stationäre Berührung zweier Flächen zweiten Grades, insbesondere einer solchen mit einer Kugel 332
221. Die Fläche der Hauptkrümmungscentra einer Fläche zweiten Grades. 333
222. Bedingung, unter welcher die eine von zwei Flächen die Ecken und die andere zwei Gegenkantenpaare eines Tetraeders enthält. 335
223. Allgemeine Gleichung einer dem Fundamentaltetraeder eingeschriebenen Fläche zweiten Grades 336
224. Geometrische Deutung des Verschwindens der Invarianten für eine der Flächen als Kegel oder Ebenenpaar. B. . . . 337
225. Die Invarianten der Fläche und des Asymptotenkegels der Kugel, respective des imaginären Kugelkreises im Unendlichen. B. 1—2 . 339
226. Der Kegelschnitt als Specialfall der Fläche zweiten Grades 342
227. Der Tangentenkegel mit gegebener Berührungscurve. . . . 343
228. Die Bedingung der Berührung einer Ebene mit der Fläche als Contravariante und die Contravarianten der Schaar; Deutung ihres Verschwindens. B.. 344
229. Gleichung der Flächenschaar in Punktcoordinaten; fundamentale Covarianten. B. 1—4 347
230. Die gemeinsame berührende Developpable zweier Flächen und ihre Doppelkegelschnitte 352
231. Bedingung, unter welcher eine gegebene Gerade die gemeinsame Curve von zwei Flächen schneidet; geometrische Deutung der Contravariante ψ_1 353
232. Die developpable Fläche der Durchdringungscurve in zwei Entwicklungsformen. 354
234. Die Tangentenfläche der Durchdringungscurve in Strahlencoordinaten . 357
235. Das Büschel mit gemeinsamen Kreisschnitten 360
236. Die Schaar der Confocalen. B. 361
237. Die Eigenschaften der Confocalen aus denen der Schaar. B. 363
238. Polareigenschaften der Confocalen. B. 1—2. Die Confocalen in collinearen Räumen 366
239. Die Focalkegelschnitte 368

Artikel Seite

240. Die Gleichung der Confocalen in tetrametrischen Ebenencoordinaten . . . 369
241. Bedingung der Rechtwinkligkeit in projectivischen Ebenencoordinaten. B. . . . 370
242. Gleichung einer Kugel in projectivischen Ebenencoordinaten. 371
243. Gleichung der dem Fundamentaltetraeder umgeschriebenen Kugel; Bedingungen, unter welchen die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine Kugel darstellt. B. . . . 372
244. Die Bedingungen parabolischer, gleichseitig hyperbolischer und kreisförmiger Schnitte . . . 373
245. Coordinaten der Brennpunkte eines ebenen Schnittes. B. 1—3. Ort der Brennpunkte der Diametralschnitte einer Fläche. . 374
246. Die Theorie der metrischen Relationen im Raume für Punkte- und Ebenenpaare, für Punkt und Ebene, Gerade und Punkt oder Ebene. B. 1—3 . . . 378
247. Für Paare von Geraden: Moment und Comoment. B. 1—9. Metrische Erzeugungen von Flächen zweiten Grades 381
248. Die Rechts- und Links-Parallelen der elliptischen Geometrie, die Bewegungen des Raumes und die speciellen Formen der Maassbestimmung. B. 1—2. Steiner'sche Fläche und Enveloppe; invariante Relation zwischen fünf Flächen zweiten Grades, die eine sechste berühren, wenn alle derselben festen umgeschrieben sind . . . 391
249. Die Jacobi'sche Fläche von vier Flächen zweiten Grades. B. 1—2 . . . 400
250. Die Jacobi'sche Curve von drei Flächen zweiten Grades . . 403
251. Die Invarianten eines Netzes aus der Discriminante desselben; Invariante für Polarflächen einer Fläche dritter Ordnung. . 404
252. Invariante I für vier Schnittpunkte in einer Ebene 406
253. Die Berührungsinvariante J . . . —
254. Die Discriminante bei überzähligen Coordinaten 407
255. Die Covarianten des Flächennetzes 2. Ordnung 408
256. Die singulären Curven vierter Ordnung aus Flächen des Netzes. B. 1—3 . . . 410
257. Transformation von zwei Flächen auf das gemeinsame Quadrupel. B. 1—4. Quadrat der Jacobi'schen Determinante, Coordinaten eines Punktes von U, U' . . . 414
258. Die Reduction der Complexgleichung zweiten Grades und der Relation der Strahlencoordinaten auf die Summen von Quadraten . . . 419
259. Gruppirungen in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe ersten Grades . . . 422

XII. Kapitel. Kegel zweiten Grades und sphärische Kegelschnitte.

260. Kegelflächen und sphärische Curven . . . 426
261. Sphärische Coordinatensysteme; projicirende Kegel aus dem Centrum . . . 427
262. Princip der Interpretation der Gleichungen der Kegel als solcher von sphärischen Linien . . . 428
263. Sphärische Dreiecke . . . 429
264. Bedingung der Orthogonalität grösster Kreise 430

Artikel Seite

265. Vom sphärischen Vierseit, sphärische Kegelschnitte aus zwei Tangenten und der Berührungssehne oder durch vier Punkte 431
266. Die cyklischen Bögen als Asymptoten. Der Reciprocalkegel und die Dualität der Theoreme in der Sphärik 433
267. Brennpunkte sphärischer Kegelschnitte; cyklische Bögen, Directrixen . —
269. Constante Summe oder Differenz der Radien vectoren; Brennpunkte und Directrixen 436
271. Eigenschaften allgemeiner Flächen zweiten Grades aus denen von Kegeln . 437
272. Concyklische und confocale sphärische Kegelschnitte. . . . 439
273. Oerter und Enveloppen aus der Rechtwinkligkeit —
275. Identische Relation zwischen den von einem Punkte auf drei grösste Kreise gefällten Normalen. Unendlich ferner Kreis aller Kugeln. Gleichung der einem Tetraeder eingeschriebenen Kugel . 440
276. Die kleinen Kugelkreise oder geraden Kegel und die Theorie der Invarianten. 442
278. Der Hart-Feuerbach'sche Kreis des sphärischen Dreiecks; sein Centrum in Beziehung zu Höhenschnitt und Schwerpunkt . 445
280. Seine Berührung mit den eingeschriebenen Kreisen; Bemerkung von Hamilton. Sein Radius in Beziehung zu dem des umgeschriebenen Kreises (Salmon) 446

BAYERISCHE STAATS- BIBLIOTHEK MUENCHEN

Literatur-Nachweisungen.

1) Art. 34, S. 25, Anm. Vergl. Joachimsthal's Abhandl. in „Crelle's Journ." Bd. 40, S. 21 f.

2) Art. 39, S. 32, Anm. Siehe Crelle's „Sammlung math. Aufs." Bd. 1, S. 105; weiter Cayley „Cambridge and Dublin Math. Journ." II, 270 (1847) und die Abh. von Siebeck im 62. Bd. von „Crelle's Journ." S. 151, sowie in Baltzer's „Determinanten" §§ 15, 16 in Verbindung mit Kronecker's Entwickelungen im 72. Bd. S. 162 f. von „Crelle's Journ." Vergl. Note 14.

3) Art. 49, B. S. 46. Siehe Cayley „On the six Coordinates of a Line" in den „Transact. of the Cambridge Philos. Society" Bd. XI², 1868.

4) Art. 52, S. 50. Diese Entwickelung der homogenen Coordinaten aus den Grundanschauungen der projectivischen Geometrie gab ich zuerst in Bd. 15, S. 152 f. der „Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellsch. in Zürich". Vergl. mein Werk „Darstell. Geom. in org. Verbindung mit der Geom. der Lage" (1870) Abschnitt E, besonders 3. Aufl. Bd. 3 (Leipzig 1888) §§ 14—26.

5) Art. 53, S. 56. Vergl. auch Kronecker's unter 2) citirte Entwickelungen S. 158 f. Auch sind diese Volumencoordinaten von Cayley u. A. angewendet worden, siehe Ferrers' „Treatise on trilinear Coordinates" 1861, S. 94.

6) Art. 53, S. 57. Vergl. Darstell. Geom. 3. Aufl. Bd. 1, § 37 f. Die nur formal homogenen Coordinaten Hesse's erhielten so durch die in 4) citirte Entwickelung ihre volle Anschaulichkeit und Construirbarkeit.

7) Art. 56, S. 67. Die homogenen Strahlencoordinaten erscheinen zuerst in Cayley's „New anal. Representation of Curves in space" Bd. 3 und 5 des „Quarterly Journ. of Math." S. 225 (1859) und 81 resp., als Abkürzungsmittel, aber mit ihrer Identität; dann als wirkliche Coordinaten in der Abh. von Plücker „On a new Geometry of Space" in Bd. 155 der „Philosoph. Transactions" von London (1865). Die darstellend-geometrische Ableitung der allgemeinen Strahlencoordinaten nebst ihrer Transformation gab ich zuerst in Züricher Vorlesungen; siehe unter 4) und hier im Text den Schluss von Art. 128.

8) Art. 58, S. 73. Vergl. Plücker's „Neue Geometrie des Raumes". Leipzig 1869, § 2.

9) Art. 58, S. 74. R. Sturm in seinem umfassenden Werke „Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie" Bd. 1, S. 63. Leipzig 1892 f.

10) Art. 58, S. 75. Chasles' Abh. in „Liouville's Journ." 1. Serie,

Bd. 4, S. 348 enthält im Grunde diese Erzeugung b) vermittelt durch die Regelschaar aus den projectivischen Ebenenbüscheln (Art. 117 im Text). Die Erzeugung c) gab zuerst Sylvester an, in „Comptes rendus“ 1861, S. 741.

11) Art. 58, B. (4) S. 78. Vergl. die Lösung durch Construction in Bd. 2 der darstellenden Geometrie (3. Aufl.), S. 300, § 38, 2. Tafel VIII.

11*) Zu Art. 93, S. 123 fügen wir das folgende Beispiel (vergl. H. M. Taylor in „Messenger of Math.“ Bd. 16, S. 39).

Aus den Textrelationen folgt für n als Länge der Normale vom Punkte (x, y, z) auf die Fläche in (x', y', z') mit Art. 91

$$x' = \frac{x}{1 + \frac{np}{a^2}}, \quad y' = \frac{y}{1 + \frac{np}{b^2}}, \quad z' = \frac{z}{1 + \frac{np}{c^2}}$$

und also durch Substitution in die Gleichung der Fläche

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 + np)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + np)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 + np)^2} = 1,$$

einer Gleichung sechsten Grades in Bezug auf das Product np als Unbekannte. Es gehen also von einem Punkte allgemein sechs Normalen an die Fläche, für einen Punkt einer Hauptebene vier, für jede Kugel zwei etc. Bildet man das von np unabhängige Glied der vorigen Gleichung, so findet man das Product der sechs Werthe von np

$$= a^4 b^4 c^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

also eine einfache Interpretation des Werthes, welchen das Polynom der Flächengleichung durch Substitution der Coordinaten eines beliebigen Punktes an Stelle ihrer Veränderlichen annimmt. Man könnte es nach Analogie des Kreises und der Kugel als die Potenz des Punktes bezeichnen. Vergl. die Interpretation in Art. 215, S. 319 f.

12) Art. 109, S. 134. Vergl. G. Allman in Bd. 13 des „Quarterly Journ.“.

13) Art. 111, S. 136 und Art. 116, S. 141. Siehe für die Constructionsbehandlung des einfachen Hyperboloids „Darstellende Geometrie“ Bd. 2 (3. Aufl.) § 35, 1, 3 und Tafel VI, VII.

14) Art. 123, S. 152. Die Metrik der Kugel und der Systeme von Kugeln ist in Frobenius' Abh. „Anwendungen der Determinantentheorie auf die Geometrie des Maasses“, Bd. 79 von „Crelle's Journ.“ S. 185—247, ergebnissreich und elegant dargestellt: zuerst Kreise auf der Kugel, sodann Kugeln, Punkte und Ebenen betreffend.

Aus dem Werthe der Potenz p_{ik} zweier Kugeln von den Coordinaten a_i, b_i, c_i, p_i und resp. a_k, b_k, c_k, p_k gleich

$$p_i + p_k - 2(a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k)$$

ergiebt sich für zwei Gruppen von je sechs Kugeln, sagen wir 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 1', 2', 3', 4', 5', 6', eine allgemeine Relation zwischen den Potenzen der Kugelpaare aus der einen und der andern Gruppe; man erhält durch Multiplication der beiden Elementengruppen mit sechs horizontalen und fünf verticalen Reihen

$$\begin{matrix} p_1, & -2a_1, & -2b_1, & -2c_1, & 1 \\ p_2, & -2a_2, & -2b_2, & -2c_2, & 1 \\ \vdots \\ p_6, & -2a_6, & -2b_6, & -2c_6, & 1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 1, & a_1', & b_1', & c_1', & p_1' \\ 1, & a_2', & b_2', & c_2', & p_2' \\ \vdots \\ 1, & a_6', & b_6', & c_6', & p_6' \end{matrix}$$

die verschwindende Determinante der Potenzen, also die Relation

$$\begin{vmatrix} p_{11'}, & p_{12'}, & p_{13'}, & p_{14'}, & p_{15'}, & p_{16'} \\ p_{21'}, & p_{22'}, & p_{23'}, & p_{24'}, & p_{25'}, & p_{26'} \\ \vdots \\ p_{61'}, & p_{62'}, & p_{63'}, & p_{64'}, & p_{65'}, & p_{66'} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus derselben gehen durch Einführung von Orthogonalitätsbedingungen, etc., von Ebenen anstatt der Kugeln, insbesondere der unendlich fernen Ebene zahlreiche Specialfälle hervor. (Vergl. „Kegelschnitte“ I, 6. Aufl. § 140, 5.)

15) Art. 124, 3; S. 154. Vergl. die Abh. Bd. 85 von „Crelle's Journ.“ S. 26 f. und zu Art. 124, 28 S. 165 die Abh. von Vogt ebenda Bd. 86, S. 301.

16) Art. 124, 22; S. 164. Lösung von E. Beltrami, „Nouvelles Ann. d. Math.“ 1863, S. 181.

17) Art. 126, S. 169. Für den constructiven geometrischen Ursprung der Lehre von den Collineationen mit singulären Elementen vergl. meine „Darst. Geom.“ (2. Aufl. 1875, § 23 etc., jetzt Bd. 1, § 22, f) u. g).

18) Art. 126, 2; S. 172. Die Affinität bestimmte und benannte zuerst Euler in Bd. 2, Art. 442 seiner „Introductio in Analysin infinitorum“ 1748.

19) Art. 126, 3; S. 172. Die allgemeine Transformation der Strahlencoordinaten gab ich in der 2. Aufl. der „Darstell. Geometrie“ S. 609; ebendort die der projectivischen Punkt- und Ebenen-Coordinaten (Art. 128 des Textes S. 175), früher in Bd. 16 der „Vierteljahrsschrift der N. G. in Zürich“.

20) Art. 130, S. 189. Für die allgemeine Reciprocität der Räume vergl. man Schröter's Abh. in Bd. 77 des „Journal f. Math.“ S. 121 f. zur synthetischen Behandlung; meine hier gegebene Untersuchung war unabhängig davon und gleichzeitig; siehe jetzt „Darst. Geom.“ Bd. 3, § 83.

21) Art. 131, S. 191. Zuerst Seydewitz in Bd. 9 des „Archiv f. Math. und Physik“ S. 158 f. Die Erzeugung der geradlinigen Flächen 2. Gr. aus singulären Reciprocitäten gab ich zuerst in meiner „Darstell. Geometrie“ (1875, jetzt siehe Bd. 3, § 532).

22) Art. 131, 4; S. 194. Vergl. Schönflies in „Journal f. Math.“ Bd. 99, S. 195 f.

23) Art. 132, b); S. 196. Siehe Möbius in „Berichte der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig“ 1856, S. 159. Zu den Symmetrien ebenda meine Note in Bd. 21 der „Vierteljahrschrift d. N. G. Zürich“ S. 50 f.

24) Art. 133, S. 199. Nach Möbius' Abh. im 10. Bd. von „Crelle's Journ.“ S. 317 (1833), einem Vorläufer seines „Lehrbuch der Statik“ Leipzig 1837.

25) Art. 134, 4; S. 207. Die erste geometrische Begründung der Lehre von den imaginären Elementen des Raumes findet man bei

v. Staudt „Beiträge zur Geom. der Lage" I. 1856 in § 7 (S. 76 f.). In II. 1857 folgte die Lehre vom Sinne und die Anwendung auf Kegelschnitte, in III. 1860 auf die Flächen 2. Grades. Vergl. die Einführung in meinem Werke, Bd. 3 „Constr. und analyt. Geometrie der Lage" (1888) §§ 9—13; für die analytische Darstellung die Abh. von Stolz in Bd. 4 der „Math. Ann." S. 416 f. (1871). Von der ebenen Abbildung der Flächen zweiten Grades in B. 6 wird im zweiten Bande dieses Werkes weiter gehandelt.

26) Art. 134, 7; S. 208. Den hier bezeichneten linearen Transformationen der Fläche zweiten Grades in sich, denen als Specialfall die Lehre von den orthogonalen Substitutionen (vergl. „Vorlesungen" Art. 43) angehört, ist seit Cayley „Crelle's Journal" Bd. 32, S. 119, Bd. 50, S. 288 (die Mém. 5 und 6) und Hermite ibid. Bd. 47, S. 307 in algebraischer und geometrischer Richtung eine ausgedehnte Literatur gewidmet worden. Wir wollen nennen die Abhandlungen von Voss in Bd. 13 und 26 der „Math. Ann." S. 320 resp. 347, von Zeuthen ebenda Bd. 18 und 26, S. 33 resp. 347 und von R. Sturm Bd. 26, S. 465. Dazu die eingehende Darstellung in der ersten Abthlg. des 2. Bdes der „Vorlesungen über Geometrie" von Clebsch-Lindemann (1891) und endlich die erste Entwickelung Cayley's (1853) in Bd. 6, 7 des „Philos. Mag." S. 326 resp. 208.

27) Art. 135, S. 208. Vergl. Bd. 4 von „Crelle's Journ." (1829), in der 2. Aufl. des „Traité des Propriétés projectives des Figures" (1866) im 2. Bd., S. 57 f., insbesondere S. 73 f. als Hauptquelle des Princips der Dualität vor seiner eigentlichen Entdeckung durch Möbius und Plücker.

28) Art. 140, S. 215. Für die Anwendung der Methoden symbolischer oder abkürzender Bezeichnung siehe Plücker's Werk „Analytische Geometrie des Raumes" von 1846.

Die Interpretation b) a. a. O. für den symbolischen Ausdruck der Erzeugnisse reciproker linearer Elementargebilde zweiter Stufe in Anwendung auf die projectivischen Erzeugnisse der Complexe zweiten Grades aus reciproken Bündeln linearer Complexe war neu in der vorigen Aufl. dieses Werkes. Doch erschien gleichzeitig (1879) Schur's Abhandl. in Bd. 15 der „Mathem. Annalen" S. 433 mit der umfassenden synthetischen Behandlung der Sache.

29) Art. 141, S. 217. Von den gewundenen Curven dritter Ordnung handelte zuerst eingehend Seydewitz in Bd. 10 des „Archiv f. Math. u. Physik", S. 203 f. Die Developpable dritter Classe erscheint zuerst in Möbius' „Barycentr. Calcul" Leipzig 1827 § 98. Dann gab Chasles im Aperçu historique" (1837) und in „Liouville's Journ." 1857, S. 397 einige ihrer wichtigsten Eigenschaften. Seitdem sind sie von Schröter in Bd. 56, von Cremona in Bd. 58, S. 138, Bd. 60, 63 u. a., von R. Sturm in Bd. 79 u. 80 von „Crelle's Journ." u. a. untersucht worden.

Art. 142, S. 222. Für die mit zwei collinearen Elementargebilden zweiter Stufe verbundenen unendlich vielen andern und die weitere Ausdehnung dieser Beziehungen der Collineation vergl. die Abh. von Schur „Math. Annalen" Bd. 18, S. 1 f. (1881) und die Ausführungen Reye's in den Bänden 104, 106, 108 des „Journal" (1889 f.).

30) Art. 142, B. 5, S. 227. Siehe Hurwitz in Bd. 20 (15) der „Math. Annalen" S. 135.

31) Art. 142, B. 6, S. 227. Siehe Buchheim in Bd. 14 des „Messenger of Mathematics" S. 74. Die Configuration ist dort nicht berührt.

32) Art. 144, Anm.; S. 231. Vergl. Reye, Bd. 2, S. 475 der „Mathem. Annalen".

33) Art. 148, S. 235. Diese Construction gab Hesse in Bd. 24, S. 36 von „Crelle's Journ.". Vergl. dazu die Entwickelungen von Townsend in Bd. 4, S. 241 des „Cambridge and Dublin Journ.".

34) Art. 149, 1; S. 237. Vergl. H. Müller in Bd. 1 der „Math. Ann." S. 413 und Reye's „Vorträge über Geom. der Lage" Bd. 2, S. 116 f.

35) Art. 152, S. 241. Dies hat W. R. Hamilton zuerst ausgesprochen.

36) Art. 152, B.; S. 241. Ein Satz S. Roberts' über vier Kugeln, siehe Neuberg in Bd. 13 S. 124 des „Messenger of Mathem.". Erweiterungen und Specialisirungen schliessen sich an. Vergl. Grace's Abhand. über Kreise, Kugeln und lineare Complexe in Bd. 16 der „Cambridge Transactions" S. 153 f.

37) Art. 154, S. 246. Vergl. die Abhandlung von E. Toeplitz „Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung" in Bd. 11, S. 434 f. der „Mathem. Annalen". Dann (ibid. Bd. 13, S. 547) J. Lüroth, als an dessen Satz von den Curven vierter Ordnung (ibid. Bd. 1, S. 49) sich durch Geiser's Behauptung von seiner Unrichtigkeit (Bd. 72 von „Crelle's Journal" S. 377 f.) die Controverse über diese Darstellbarkeit anknüpfte. Schon in der zweiten deutschen Ausgabe dieses Buches ward in Art. 236 für die Behandlung des Netzes von Flächen zweiter Ordnung die allgemeine Gleichungsform an Stelle der reducirten Darstellungsform benutzt und jene Darstellbarkeit nicht behauptet. Vergl. Art. 251.

38) Art. 154, B., S. 247. Vergleiche Townsend's Abhandlung in Bd. 11 des „Quart. Journ. of Mathem." S. 347.

39) Art. 155, S. 247. Das Theorem rührt von Chasles, der hier gegebene Beweis von Ferrers her („Quarterly Journ. of Mathem." Bd. 1, S. 241).

40) Art. 157, S. 250. Die einfache Textbetrachtung ist von M'Cay. Der erste Theil des Satzes in B. 1 von Steiner „Crelle's Journ." Bd. 2, S. 98, der zweite Theil von Joachimsthal „Grunert's Archiv" Bd. 32, S. 109 — ebenso die Bestimmung des Mittelpunktes in B. 2. Für den Satz in B. 3 vergleiche Monge „Correspondence sur l'école polyt." Bd. 2, S. 266.

41) Art. 158, S. 251. Vergl. Chasles „Aperçu historique". Das Theorem verfehlt die Analogie insofern, als es 12 anstatt 10 Elemente der Fläche verbindet. In diesem Betrachte ist dem Brianchon'schen besser analog P. Serret's Satz: Wenn die Gegenseitenpaare eines Zehnecks sich in fünf Punkten einer Ebene schneiden, so liegen die Ecken auf einer Fläche zweiter Ordnung. Aber er verbindet nicht zehn beliebige Punkte der Fläche. Das räumliche Analogon der Curve zweiten Grades ist in vollkommenerer Art die Raumcurve dritter Ordnung mit ihrer Tangentenfläche. (Vergl. Art. 142, 6.)

42) Art. 159, S. 253. Der Doppelsatz von den hyperboloidischen Sechsseiten rührt von Dandelin her „Annales" von Gergonne Bd. 15, S. 387. Man vergleiche auch Plücker's „Analyt. Geom. d. Raumes" § 5 für weitere Ausführungen, spec. S. 129 f.

43) Art. 159, S. 254. Man vergl. eine Abhandlung aus Hesse's Nachlass im 85. Bd. von „Crelle's Journal" S. 304 f., wo nach der algebraischen Behandlung der Ergebnisse von Dandelin auch die Frage der zwei aus einem beliebigen Sechsseit mittelst eines Punktes abgeleiteten hyperboloidischen Sechsseite algebraisch behandelt wird.

Mit der Erinnerung an eine Note im 73. Bd., S. 371 mit dem Satze von irgend sechs Schnittpunkten 1 2 3 4 5 6 von drei Flächen 2. Grades: Die Transversalen aus einem beliebigen Punkte zu den Gegenseitenpaaren 12, 45; 23, 56; 34, 61 gezogenen Transversalen bestimmen durch ihre der Reihe der Seiten nach verbundenen Schnittpunkte mit den Seiten ein hyperboloidisches Sechsseit. Die beiden so aus dem 7. und 8. Schnittpunkte der drei Flächen dem Sechseck einbeschriebenen Sechsseite liegen auf demselben Hyperboloid — der den Pascal'schen Satz als Specialfall giebt, stellt sich dies zu den Arbeiten Hesse's über das Problem, aus 7 jener Schnittpunkte den 8. zu finden, a. a. O. Bd. 20 u. 26. Vergl. Note 33). Aus den Grundgleichungen der Reciprocität sind für diese und verwandte Probleme constructive Lösungen mittelst projectivischer Elementargebilde erster Stufe entwickelt worden von F. London in Bd. 38 der „Math. Ann." S. 334 f.

44) Art. 161, S. 258. Die Eigenschaften, die in diesem Kap. behandelt werden, sind zuerst eingehend untersucht worden von Chasles und Mac Cullagh, der gleichzeitig mit jenem und unabhängig von ihm die wichtigsten fand. Die Ergebnisse von Chasles wurden in seinem Aperçu historique" 1837 in den Noten veröffentlicht. (Deutsche Ausgabe S. 413 f.) Der Art. 161 ist ein Beitrag von Cayley zur 3. Aufl. dieses Werkes.

45) Art. 168, S. 268 u. Art. 205, S. 306 Anm. Mac Cullagh veröffentlichte seine modulare Erzeugung der Flächen zweiten Grades 1836 „Proceedings of the R. Irish Acad." Bd. 2, S. 446 — jetzt in seinen „Collected Works" S. 260 (Dublin 1880); 1842 fügte G. Salmon die ergänzende Eigenschaft der nichtmodularen Focalpunkte hinzu, nach welcher die betreffende Erzeugung der Flächen 2. Grades als die Salmon'sche zu benennen sein wird. Etwas später entdeckte sie auch Amiot, siehe „Liouville's Journ." Bd. 8, S. 161 u. 10, S. 109, erhielt aber, weil noch unbekannt mit Mac Cullagh's Arbeit, nicht die vollständige Theorie der Focalpunkte. In Bd. 3 des „Cambridge and Dublin Math. Journ." S. 1, 97, 148 findet man eine treffliche Abhandlung von Townsend über die Eigenschaften der Focalpunkte als die Fläche 2. Gr. doppelt berührende Nullkugeln, diese führt auch zur Jacobi'schen Construction der Fläche, welche weiterhin zu behandeln ist. (Vergl. Art. 205 f.)

46) Art. 170 Schluss, S. 272. Vergl. G. Darboux in Bd. 2, S. 144 f. des „Bulletin de la Société mathém. de France".

47) Art. 188, S. 286. Siehe andere Constructionen in Fiedler, „Darstellende Geometrie und Geometrie der Lage" Bd. 3, Art. 85, B. 12 f.

48) Art. 189, S. 289. Siehe ‚Liouville's Journal" Bd. 11, S. 121 und Crelle's Journal" Bd. 12, S. 137.

49) Art. 204, S. 304. Der Satz des B. ist von Greenhill, siehe Cayley's Note in „Messenger of Mathem." Bd. 8, S. 51. Für die Bedeutung des im Texte gegebenen Satzes von Ivory vergleiche man Thomson-Tait, „Natural Philosophy" Bd. I (1867) § 524 f., S. 393 f. und eine Schrift von Darboux, Paris 1872.

50) Art. 205, S. 305. Siehe „Crelle's Journal" Bd. 12, S. 137; dazu die Veröffentlichung aus seinem Nachlass durch Hermes mit Ausführungen in Bd. 73, S. 179, 209—272. Vergl. Jacobi's „Gesammelte Werke" Bd. 7, S. 7 und S. 42, besonders S. 62.

51) Art. 206, S. 307. Nach einer Notiz aus dem Nachlass Joachimsthal's in Bd. 73, S. 207 f. von „Crelle's Journal". Painvin hat Bd. 30 der „Nouvelles Annal. des Mathém." S. 481 angegeben,

dass die Sätze von Jacobi und Joachimsthal für eine algebraische Fläche von der Ordnung n an Stelle der Ebene ABC und die Resultante in der Normale derselben in D gelten, wobei die erzeugte Fläche die Ordnung $2n$ erhält.

52) Art. 211, B., S. 312. Vergl. F. Purser in Bd. 8 des „Quarterly Journal of Math." S. 66.

53) Art. 213, S. 314. Diese Gleichung ward wohl zuerst gegeben in Booth's Werk „Tangential Coordinates", Dublin 1840.

54) Art. 214, S. 315. Vergl. die Abhandlung von Heilermann in Bd. 56, S. 345 von „Crelle's Journal".

55) Art. 215, S. 317. Die bezüglichen Arbeiten findet man in „Berichte der K. S. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig" seit 1882, vergl. aber Bd. 20, S. 147 u. 27, S. 253 der „Mathem. Annalen" — und sie sind zusammengefasst in dem Buche „Die Focaleigenschaften der Flächen 2. Ord." Leipzig 1896. Die Darstellung im Texte ist nach der neuesten Mittheilung in „Berichte" von 1897, S. 75 u. S. 172 gemacht.

56) Art. 216, B. 6, S. 326. Diese Ausdrücke gab Cathcart in der von ihm bearbeiteten 4. Aufl. des Originals (Dublin 1882) S. 174.

57) Art. 216, B. 7, S. 327. Für die Discussion der Fälle von zwei- und mehrfachen Wurzeln λ vergl. insbesondere Lindemann-Clebsch Bd. 2, S. 345 f.

58) Art. 217, B. 1, S. 328. Vergl. Hesse im 20. Bd. von „Crelle's Journ." S. 297.

59) Art. 217, B. 5, S. 329. Vergl. die Arbeiten von Reye, besonders in Bd. 82 des „Journal" S. 1 f., 54 f., 173 f.

60) Art. 221, S. 335. Vergl. für die Discussion Bd. 2, 3. Aufl., S. 337, Art. 267 f. Die Fläche der Krümmungsmittelpunkte des elliptischen Paraboloids ist später von F. Caspary in Bd. 81, S. 143 des „Journal" ausführlich untersucht worden; er benutzte die Gleichungsform $27U^2 - 8VW^2 = 0$ mit U als vom vierten und V, W als vom dritten Grade in den Coordinaten (S. 164 a. a. O.).

61) Art. 222, S. 336. Im 8. Bd. des „Quarterly Journal of Math." S. 149 hat Purser die Enveloppe der vierten Fläche eines Tetraeders bestimmt, dessen drei andere Ebenen eine Fläche zweiten Grades $U = 0$ berühren, während zwei Paare seiner Gegenkanten gerade Erzeugende einer andern Fläche zweiten Grades $U' = 0$ sind. Sie ist eine dem Büschel $\lambda U + U' = 0$ angehörige Fläche.

62) Art. 224, B., S. 339. Vergl. Sylvester's ideenreichste Abhandlung in Bd. 31 des „Philos. Magazine" S. 119, 295 (1851): Elementartheiler, Sätze über das Verschwinden der Unterdeterminanten, etc. Durch Weierstrass' Theorie der Elementartheiler ward sie für n Veränderliche wissenschaftlich erledigt. Man sehe die „Monatsberichte der Berliner Akademie" für 1858 und 1868. Die vollständige Darstellung der speciellen Fälle, die die Durchdringung von zwei Flächen zweiten Grades darbietet, findet man in Lindemann-Clebsch's „Vorlesungen über Geometrie" Bd. 2, S. 215 f.

63) Art. 229, S. 350. Bei Gelegenheit der algebraischen Parameterdarstellung der Raumcurve vierter Ordnung aus zwei Flächen zweiten Grades hat neuestens G. Westphal auf zwei andere quadratische Covarianten $H = 0$ und $I = 0$ aufmerksam gemacht, welche durch die Eigenschaften ausgezeichnet sind, dass der Complex der $U = 0$ und $I = 0$ in harmonischen Punktepaaren schneidenden Geraden mit dem analogen für $U' = 0$ und $H = 0$ und mit dem Complex der Scheitelkanten harmonischer Tangentenbüschel von $U = 0$ und $U' = 0$ identisch wird. Die Polaren eines Curvenpunktes in Bezug auf

die Flächen des durch $H = 0$ und $I = 0$ bestimmten Büschels und die in demselben die Curve berührenden Ebenen entsprechen einander projectivisch so, dass sich die zusammengehörigen Paare in Sehnen der Raumcurve vierter Ordnung durchschneiden. Die Flächen dieses Büschels der H, I schneiden aus den entsprechenden des Büschels der U, U' die Berührungspunkte der je acht Curventangenten aus, welche denselben als Erzeugende angehören — Punkte, welche paarweise in Geraden aus den Ecken des Quadrupels liegen. Siehe „Mathem. Annalen“ Bd. 13, S. 1 f. und vergl. die Arbeit von A. Harnack ibid. Bd. 12, S. 47 f.

64) Art. 229, 1; S. 351. Für die analytische Ausführung kann man vergleichen d'Ovidio im 10. Bd. des „Giornale di Napoli“ S. 313 und neuestens (1895) die Behandlung von Russell und Jollife in „Proceedings of the London Math. Soc.“ von 1895 S. 458, 466 f.

65) Art. 232, S. 355. Vergleiche „Cambridge and Dublin Math. Journ.“ Bd. 3, S. 171; obwohl nur der geometrische Beweis dort mitgetheilt ist, so war doch das Resultat durch die wirkliche Bildung der Gleichung der Developpabeln erhalten worden. Siehe auch Bd. 2, S. 68. Die Gleichungen wurden ferner durch Cayley in Bd. 5, S. 50 f. entwickelt.

66) Art. 236, B., S. 363. Vergleiche Townsend im 8. Bd. des „Quarterly Journ. of Math.“ und Picquet in „Bulletin de la Société philom.“ (t. 2, S. 196.)

67) Art. 238, 2; S. 368. Man vergl. die gehaltreiche Abhandlung von J. J. St. Smith: „On the focal properties of homographic figures“ in Bd. 2 der „Proceed. of London Math. Soc.“ S. 196 f. (1869); oder jetzt in dessen „Collected Math. Papers“ Bd. 1, S. 545—602.

Smith gab dieser Darstellung der Collineation den prägnanten Ausdruck, dass durch Collinear-Umformung die elliptischen Coordinaten eines Punktes in ihre reciproken Werthe transformirt werden. Siehe auch die bald erscheinende „Analyt. Geometrie der Kegelschnitte“ 6. Aufl. § 248, B. 6. Die entsprechenden rechtwinkligen Flächen- resp. Volumen-Elemente der Stelle stehen auch in einfacher Abhängigkeit nach ihren elliptischen Coordinaten.

68) Ebenda. Man füge die Worte hinzu: oder die Abstände der bezüglichen symmetrischen Paare in den Polinvolutionen auf den Axen der genannten Polsysteme in R und Q' von den respectiven Mittelpunkten. Siehe „Darstellende Geometrie“ etc. Bd. 1, Art. 14, Fig. 21 die (T), T', (t), t', S', s — was unabhängig von Smith aus der darstellend-geometrischen Behandlung der Centralprojection gewonnen ist. Dort ist auch Art. 23, Fig. 46 die Zusammenlegung collinearer Ebenen zur centrischen Collineation erstmalig durchgeführt worden (schon 1869).

69) Art. 245, 2; S. 376. Für die weitere Discussion der Fläche siehe die Abhandlung von Painvin im 23. Bd. der „Nouvelles Annales“ S. 481. Die zweite Ableitung der Gleichung der Fläche achter Ordnung rührt von M'Cay her.

70) Art. 247, S. 382. Vergl. auch d'Ovidio's „Studio sulla Geometria proiettiva“ Bd. 7 der „Annali“ (2. Serie) S. 72, und für die ersten Beispiele desselben Autors „Sopra alcuni luoghi“ in Bd. 13 des „Giornale“ S. 363.

Dass das orthogonale Hyperboloid auch aus gleichwinkligen Ebenenbüscheln entsteht, ist zuerst vom Herausgeber gezeigt worden. (B. 4—7.)

71) Art. 248, S. 394. Die Lehre von den Parallelen in der elliptischen Geometrie verdankt man Clifford. — Siehe „Math. Papers“

London 1882, S. 193 (vorher „London Math. Soc." 1873) und Cayley; nach der letzten Darstellung Cayley's in Bd. 15 (1891) der „Transact. of the Cambridge Philos. Soc." S. 37 f. ist in der Entwickelung des Textes besonders § 248, S. 392 f. gegeben.

Für den letzten Theil des Art. vergl. man F. Klein's verschiedene Darstellungen vom 4. Bd. (S. 373) der „Math. Annalen" ab. Die Beziehungen dieser Fragen zur Cayley'schen Maassbestimmung kannte der Herausgeber vor dieser Veröffentlichung; sie waren auch Beltrami bekannt.

72) Art. 248, 1; S. 396. Vergl. die Arbeit von Waelsch über das Normalensystem und die Centralfläche der Fläche 2. Grades in Bd. 52 der „Nova Acta der K. Leop. Carol. Ak." (1888) S. 285.

73) Art. 248, 2; S. 396. Vergl. auch Beltrami in Bd. 1 des „Giornale" S. 208, und neuestens in den „Memorie dell' Accad. di Bologna", Bd. 6 (1877).

74) Art. 248, 3; S. 399. Zuerst gegeben in anderer Ableitung und Darstellung in Casey's „Recherche des équations des couples de quadriques" etc. in Bd. 2 der „Annali" (2. Serie) S. 303 f., auf S. 315.

75) Art. 250, S. 404. Vergleiche die Abhandlung von Geiser im 69. Bd. von „Crelle's Journal" S. 197, besonders S. 218.

76) Art. 251, S. 406. Vergl. Note 37 zu Art. 154. Die Erwartung, dass die Gleichungen von irgend drei Flächen zweiten Grades in Form der Summe von fünf Quadraten gleichzeitig darstellbar seien, gründete sich auf die Constantenzählung: zwölf unabhängige Constanten explicite und fünfzehn implicite, also zusammen drei mal neun. Frahm zeigte die enge Verbindung zwischen der Theorie der ebenen Curve vierter Ordnung und der von drei Flächen zweiten Grades „Math. Ann." Bd. 7; zuletzt gab Toeplitz die Form der Invariante A (vergl. Art. 255) wie im Text.

77) Art. 253, S. 409. Ein analoger Satz von Cayley ist es, dass für U, U' als Functionen von zwei Veränderlichen und vom Grade n die Discriminante von $U + \lambda U'$ als ihre Discriminante nach λ ein Resultat von der Form AB^2C^3 liefert, wo A das Resultat der Elimination zwischen U und U' ist, B vom Grade $2(n - 2)(n - 3)$ in beiden Coefficientenreihen verschwindet, wenn λ so bestimmt werden kann, dass $U + \lambda U'$ zwei Paare gleicher Factoren hat, und C vom Grade $3(n - 2)$ immer dann, wenn λ so bestimmt werden kann, dass $U + \lambda U'$ drei gleiche Factoren hat.

Wenn analog U, U' homogene Functionen von drei Veränderlichen sind, so ist die Discriminante der Discriminante von $U + \lambda U'$ nach λ noch von der Form AB^2C^3 mit A vom Grade $3n(n - 1)$ in jeder der Coefficientenreihen als der Bedingung der Berührung zwischen U und U', mit $B = 0$ als der Bedingung, unter der λ so bestimmt werden kann, dass $U + \lambda U'$ zwei Doppelpunkte hat, und $C = 0$ als derjenigen, unter der ein Rückkehrpunkt auftritt. Wenn schliesslich U, U', U'' drei Kegelschnitte liefern, so ist die Discriminante von $\lambda U + \mu U' + \nu U''$ von der Form AB^2 mit $A = 0$ als der Bedingung, dass die drei Curven sich in einem Punkte durchschneiden, und mit $B = 0$ als der Bedingung, dass $\lambda U + \mu U' + \nu U''$ ein vollkommenes Quadrat werden kann.

78) Art. 256, S. 411. Die allgemeine analytische Darstellnng der Geometrie des Flächennetzes zweiter Ordnung folgt im Wesentlichen einer gütigen Mittheilung von Prof. Gundelfinger für die zweite Aufl. dieses Bandes. Zu den geometrischen Ergebnissen vergl. man R. Sturm's Abh. im 70. Bd. des „Journal" S. 212.

79) Art. 256, 2; S. 413. Von Toeplitz an dem unter 76) angeführten Orte.

80) Art. 256, 3; S. 413. Vergl. die Abh. von Waelsch in Bd. 37 der „Mathem. Ann." S. 141 f. und von Pick in den „Sitzber. der k. Akad. d. Wissensch. in Wien" April 1891.

81) Art. 256, 3; S. 415. Vergl. Reye, „Geometrie der Lage" 2. Abtheilung, Vortrag 18. 1868. Waelsch an dem unter 72) angeführten Orte.

82) Art. 259, S. 425. Siehe die Abhandl. v. F. Klein im 2. Bd. der „Mathem. Annalen" S. 198.

Wenn in der ursprünglichen Coordinatenbestimmung der geraden Linie die Gleichung eines linearen Complexes k lautet

$$a_{23}^{(k)} p_{23} + a_{31}^{(k)} p_{31} + a_{12}^{(k)} p_{12} + a_{14}^{(k)} p_{14} + a_{24}^{(k)} p_{24} + a_{34}^{(k)} p_{34} = 0,$$

so ist die Simultaninvariante von zwei linearen Complexen i und k durch

$$a_{23}^{(i)} a_{23}^{(k)} + \cdots + a_{14}^{(i)} a_{14}^{(k)} + \cdots = 0$$

ausgedrückt und in Analogie zum Schluss der Note 14) in Bezug auf zwei Gruppen von je sechs Kugeln bemerken wir, dass zwischen zwei Gruppen von sieben linearen Complexen eine analoge Relation zwischen ihren simultanen Invarianten besteht, wie zwischen den Potenzen jener Kugelpaare. Man erhält sie in ganz derselben Art, wie diese. Sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 1′, ..., 7′ die linearen Complexe, so bilde man aus ihren Coordinaten oder den Coefficienten ihrer Gleichungen die Gruppen von sieben Zeilen und sechs Reihen

$$\begin{array}{l} a_{23}^{(1)}, a_{31}^{(1)}, a_{12}^{(1)}, a_{14}^{(1)}, a_{24}^{(1)}, a_{34}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{23}^{(7)}, a_{31}^{(7)}, a_{12}^{(7)}, a_{14}^{(7)}, a_{24}^{(7)}, a_{34}^{(7)} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a_{14}^{(1')}, a_{24}^{(1')}, a_{34}^{(1')}, a_{23}^{(1')}, a_{31}^{(1')}, a_{12}^{(1')} \\ \vdots \\ a_{14}^{(7')} \text{ etc.} \end{array}$$

und multiplicire sie mit einander; ihr Product ist die Determinante der Simultaninvarianten aller Paare von Complexen aus der ersten und der zweiten Gruppe

$$\begin{vmatrix} R_{11'}, & R_{12'}, & R_{13'}, & R_{14'}, & R_{15'}, & R_{16'}, & R_{17'} \\ \vdots & & & & & & \\ R_{71'}, & R_{72'}, & R_{73'}, & R_{74'}, & R_{75'}, & R_{76'}, & R_{77'} \end{vmatrix} = 0.$$

Man gelangt von ihr aus leicht durch Specialisirung zur Coordinatenbestimmung des Textes in Art. 258 f., hat aber zugleich die von F. Klein entwickelte Analogie zwischen der Liniengeometrie und der Geometrie der Kugeln in einem Raumgebiete von vier Dimensionen, die umfassender Entwickelungen fähig ist.

83) Art. 259, S. 425. Es ist zu verweisen auf die Abhandl. von Voss „Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf Flächen 2. Grades" in Bd. 10 der „Mathem. Annalen" S. 143 f.

84) Art. 260, S. 426. Man vergl. das Mémoire von Chasles im 6. Bd. der „Mém. publiés par l'Acad. royale des sciences en Belgique" oder dessen treffliche Uebersetzung in's Englische von Graves, Dublin 1837; auch Abh. von Chasles von 1860 („Comptes rendus", März und Juni).

85) Art. 261, S. 427. Siehe „Crelle's Journal“ Bd. 6, S. 240.

86) Art. 272, S. 439. Siehe Graves Uebersetzung S. 77.

87) Art. 276, S. 444. Dies ist seitdem ausgeführt worden von Stoll in Bd. 29 der „Zeitschrift für Math.“ S. 91 f.

88) Art. 278, S. 445. Siehe Hart's Abh. in „Quarterly Journal of Math.“ Bd. 4, S. 260 (1861) und neuestens Cayley's ebenda Bd. 27, S. 35 f. Vergl. auch Lachlan in Bd. 14, S. 149 des „Messenger of Mathem.“, wo vom Schnittwinkel sphärischer Kreise ausgegangen wird.

Verzeichniss bemerkter Druckfehler.

S. 71 Z. 14 v. u. lies $\xi_3 \pi_{12}$ statt $\xi_1 \pi_{12}$
„ 89 „ 19 v. u. „ $a_{24} y$ statt $\alpha_{24} y_4$
„ 102 „ 2 v. o. „ $(a_{12} a_{34} - a_{13} a_{24})$ statt $a_{12} a_{34}$
„ 104 „ 15 v. o. „ dieser
„ 182 „ 19 v. o. „ A_4 statt A_4
„ 186 „ 5 v. u. fehlt der Klammer der Exponent ^{2}
„ 208 „ 7 v. o. lies 130 statt 131
„ 220 „ 5 v. u. fehlen vor projicirt die Worte mit Doppelpunkt
„ 224 „ 8 v. u. lies am Schluss x_4 statt ω_4
„ 225 „ 14 v. u. „ η_3 statt η^3
„ — „ 2 v. u. „ Curve statt Curven
„ 227 „ 2 v. u. „ statt, am Anfang —
„ 242 „ 11 v. o. „ A_3, A_4 statt A_{34}
„ 251 „ 20 v. o. „ Art. 124, 28
„ 252 „ 4 v. o. „ B. 6
„ 255 „ 4 v. o. „ $(\lambda_3 - \lambda_4)$ statt $(\lambda_3 - \lambda_1)$
„ 317 „ 9 v. o. „ noch andersartig
„ 360 „ 1 v. o. „ $(a_1 a_4')$ statt $(a_1 a_4)$
„ 368 „ 19 v. u. „ einen Zusatz am Anfang der Liter. N. 68) S. XXI
„ 369 „ 10 v. u. „ Vier-Ebenencoord.
„ 381 „ 14 v. o. „ Absolute

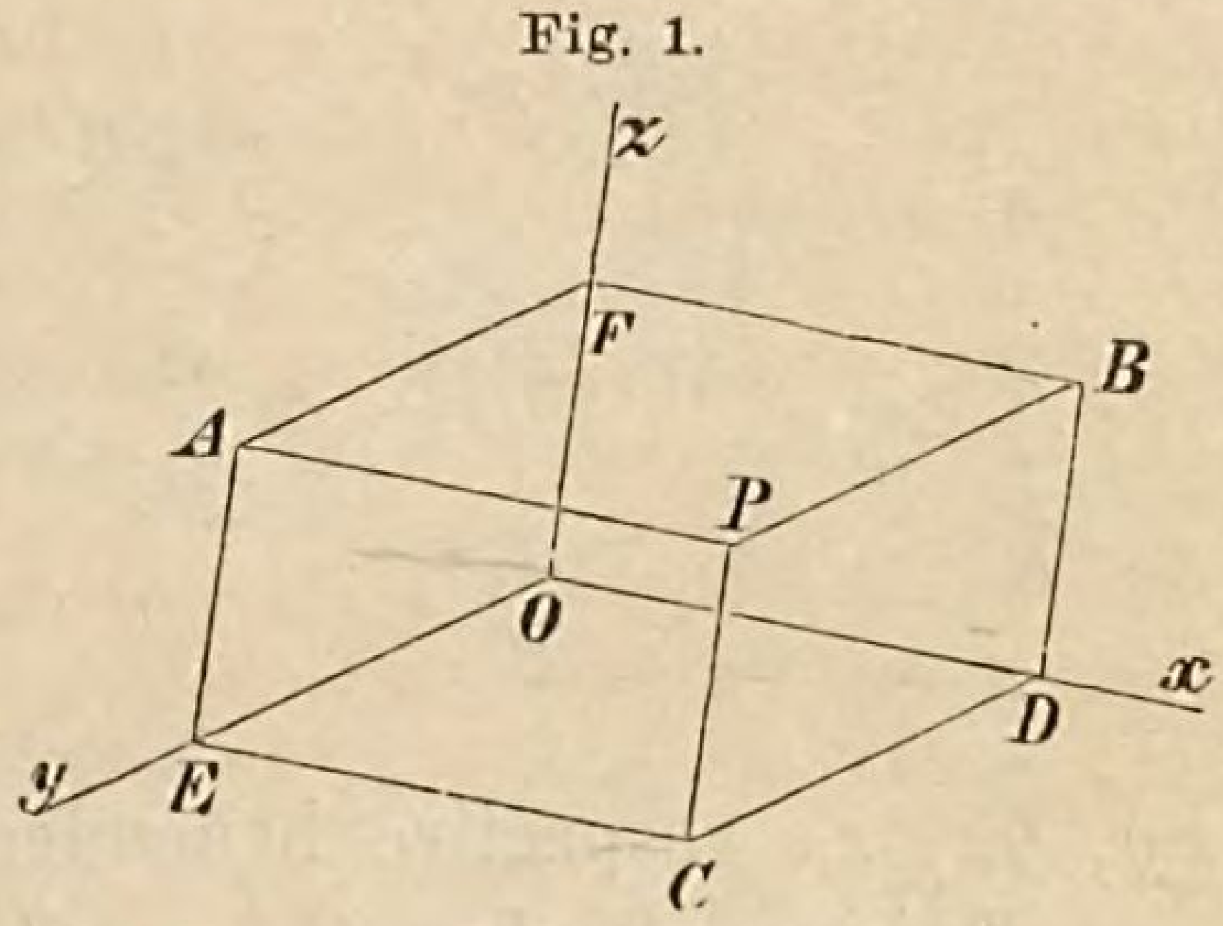
BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

I. Kapitel.

Der Punkt, seine Coordinaten und ihre Transformation; Bedeutung der Gleichungen zwischen ihnen.

1. Wie die Lage eines Punktes C in einer Ebene bestimmt wird, indem man ihn auf zwei in dieser Ebene gelegene Coordinatenaxen OX, OY bezieht, ist bekannt. Um die Lage eines Punktes P im Raume zu bestimmen, haben wir nur eine dritte Axe OZ zu den beiden schon vorhandenen hinzuzufügen, welche nicht in ihrer Ebene liegt. Wenn wir dann die der Linie OZ parallel gemessene Entfernung z des Punktes P von der Ebene XOY und die Coordinaten x und y des Punktes C kennen, in welchem die durch P gehende Parallele zu OZ die Ebene schneidet, so ist die Lage des Punktes P offenbar vollständig bestimmt.

Fig. 1.



Von den drei Gleichungen $x = a$, $y = b$, $z = c$ bestimmen die beiden ersten den Punkt C und man erhält den Punkt P, indem man durch ihn eine Parallele zu OZ zieht und auf ihr die Länge $CP = c$ abträgt. Es ist auch bekannt, wie die Lage des Punktes C in der Ebene XOY von den Vorzeichen der Grössen a und b bedingt wird; in derselben Weise bestimmt das Zeichen von c die Seite der Ebene XOY, nach welcher die Linie CP zu messen ist, indem man annimmt, dass alle auf der einen Seite der Ebene gemessenen Linien dieser Art als positiv gelten, während die auf der andern Seite derselben gemessenen negativ sind. Man betrachtet z. B. die z aller über der Ebene XOY gelegenen Punkte als positiv und die z aller unter derselben gelegenen

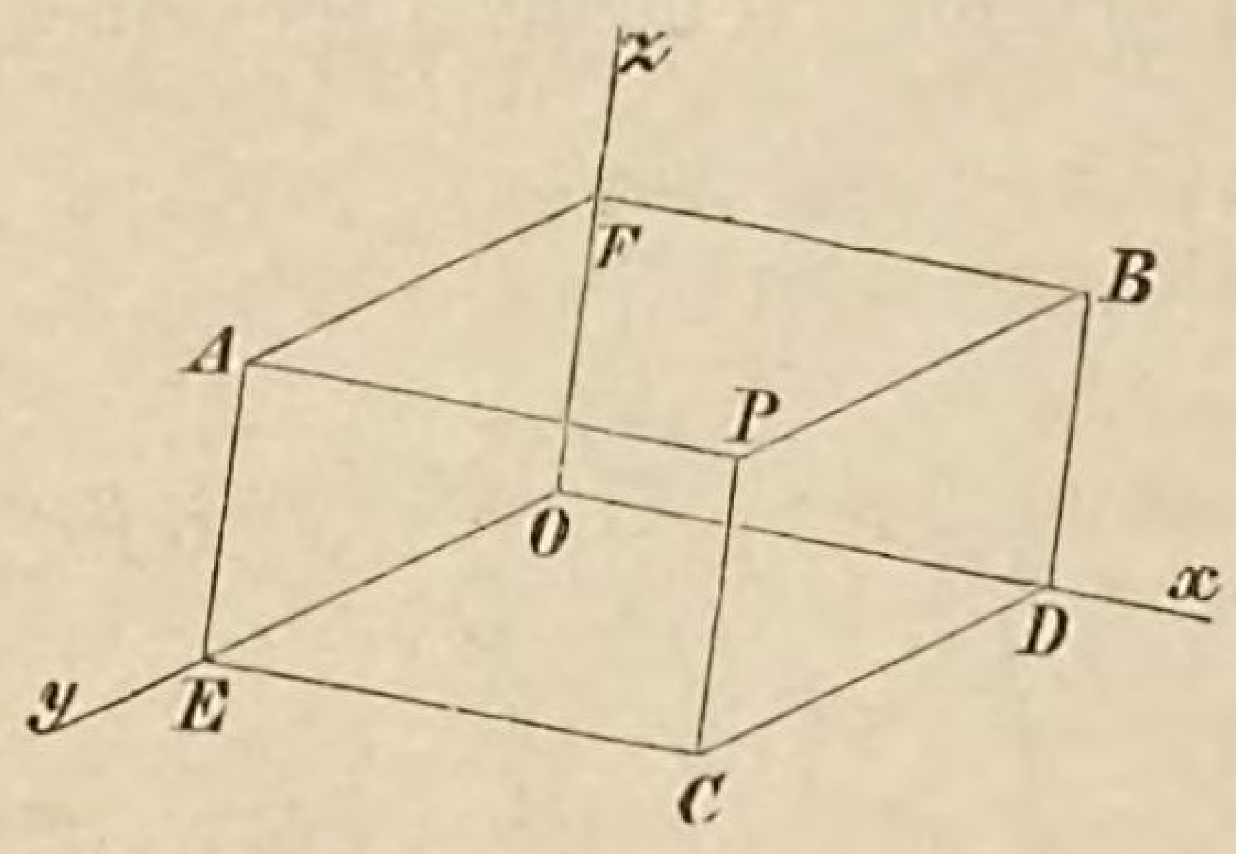
Punkte als negativ unter der Voraussetzung, dass diese Ebene selbst eine Horizontalebene ist. Es erhellt zugleich, dass für jeden in der Ebene XOY gelegenen Punkt $z = 0$ ist.

Die von den Axen miteinander gebildeten Winkel sind willkürlich innerhalb der durch die vorigen Bestimmungen gezogenen Grenzen; die Coordinaten werden aber speciell als rectangulär bezeichnet, wenn die Linien OX und OY rechtwinklig zu einander sind und die Linie OZ normal zur Ebene XOY ist.

2. Wir haben die Methode der Bestimmung eines Punktes im Raume in der Weise auseinandergesetzt, welche die einfachste scheint für diejenigen, welche mit der analytischen Geometrie in der Ebene vertraut sind, und gehen nun dazu weiter, sie in einer mehr symmetrischen Art darzustellen.

Wir bedienen uns zu dieser Bestimmung der Verbindung von drei Coordinatenaxen OX, OY, OZ, welche sich in einem Punkte O schneiden, den wir wie in der Planimetrie als den Anfangspunkt bezeichnen. Die drei Axen heissen die Axen der x, y, z respective. Sie bestimmen auch die drei Coordinatenebenen, nämlich die Ebenen XOY, YOZ, ZOX, welche wir als die Ebenen xy, yz, zx respective benennen werden.

Fig. 2.



Da nun offenbar $PA = CE = a$, $PB = CD = b$, $PC = c$ ist, so ist die Lage eines Punktes P bekannt, wenn seine drei Coordinaten gegeben sind, d. h. wenn die drei Geraden PA, PB, PC bekannt sind, welche durch ihn den Axen der x, der y, der z respective parallel bis zum Durchschnitt mit der Ebene der jedesmaligen beiden andern Axen gezogen werden.

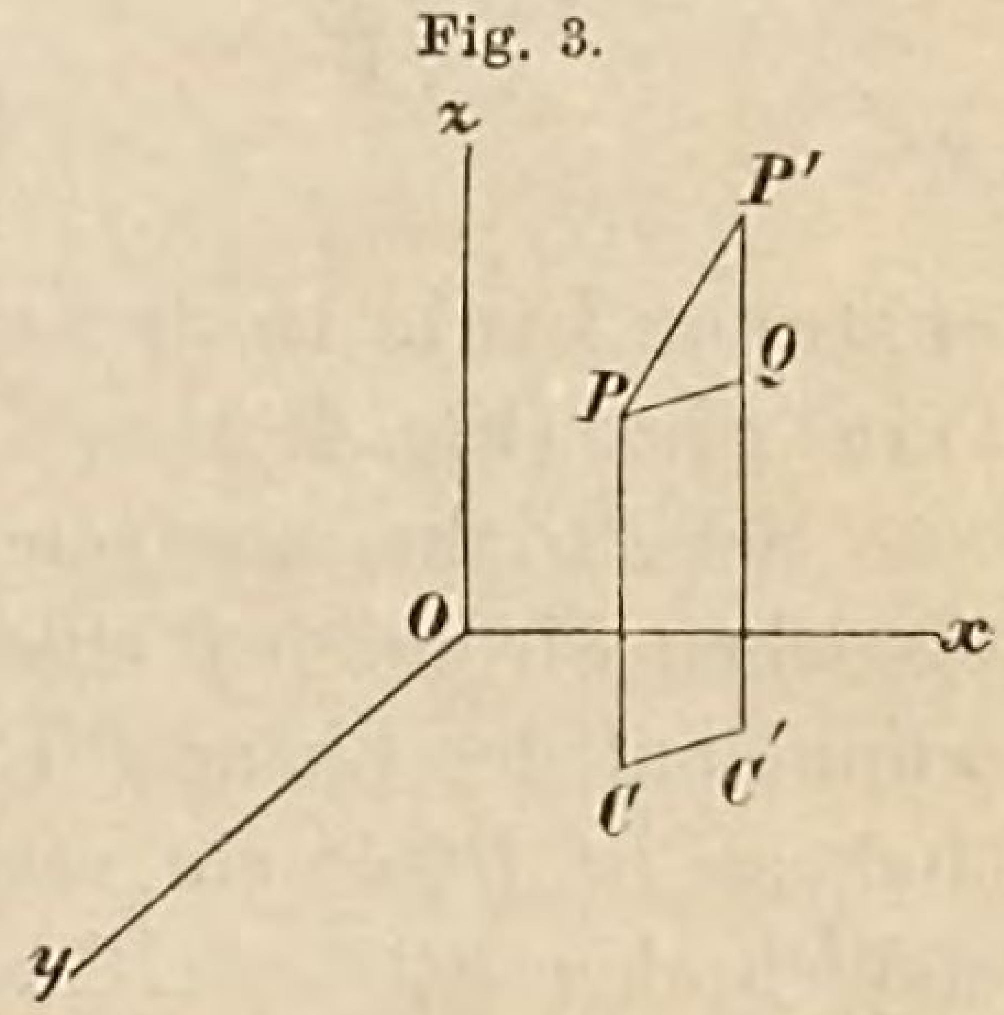
Da ferner $OD = a$, $OE = b$, $OF = c$ ist, so kann der durch die Gleichungen $x = a$, $y = b$, $z = c$ bestimmte Punkt durch folgende symmetrische Construction gefunden werden: Man messe in der Axe der x die Länge $OD = a$ und lege durch D die Ebene $PBDC$ parallel der Ebene yz, messe in der Axe der y die Länge $OE = b$ und lege durch E die Ebene $PCEA$ parallel zu zx, und endlich in der Axe der z die Länge $OF = c$ und lege durch F die Ebene $PAFB$ parallel zu xy; der Durchschnittspunkt der drei so bestimmten Ebenen ist P, der zu bestimmende Punkt.

3. Die Punkte A, B, C werden als die **Projectionen des Punktes** P **auf die drei Coordinatenebenen** bezeichnet; wenn die Axen rectangulär sind, heissen sie insbesondere **orthogonale Projectionen**. Da wir uns im Folgenden zu allermeist mit orthogonalen Projectionen beschäftigen werden, so sollen, wenn wir ohne nähere Bezeichnung von Projectionen sprechen, immer orthogonale Projectionen verstanden sein, während das Gegentheil ausdrücklich bezeichnet werden wird. Und da wir von einigen Eigenschaften der orthogonalen Projectionen oft Gebrauch machen werden, so wollen wir dieselben, obgleich mehrere von ihnen schon in der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte" V. Aufl. (Art. 436) bewiesen wurden, hier zusammenstellen.

Die Länge der Orthogonalprojection einer begrenzten geraden Linie auf irgend eine Ebene ist gleich dem Producte der Linie in den Cosinus des Winkels, welchen sie mit dieser Ebene bildet*).

Sind PC und $P'C'$ die von P und P' auf die Ebene XOY gefällten Normalen, so ist CC' die Orthogonalprojection der Linie PP' auf diese Ebene, und die Vervollständigung des Rechtecks $PCC'Q$ durch die Parallele PQ zu CC' liefert

Fig. 3.



$$PQ = CC' = PP' \cdot \cos P'PQ.$$

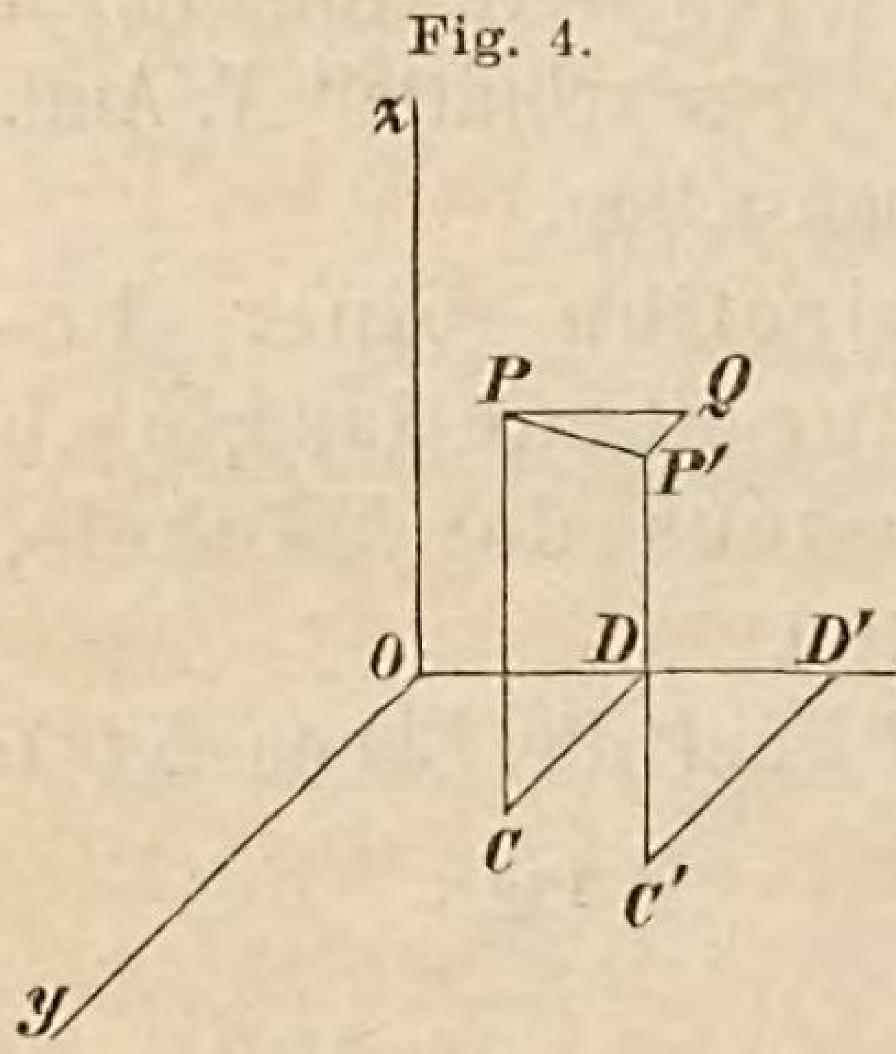
4. **Die Projection der in einer beliebigen Ebene enthaltenen Fläche auf eine Ebene ist gleich dem Producte der Originalfläche in den Cosinus des von beiden Ebenen gebildeten**

*) **Der von einer Linie mit einer Ebene gebildete Winkel** ist derselbe, welchen die Linie mit ihrer Orthogonalprojection auf diese Ebene einschliesst. **Der Winkel zwischen zwei Ebenen** wird durch den Winkel der Normalen gemessen, welche man in ihnen auf ihrer Durchschnittslinie in einem beliebigen Punkte derselben errichten kann; oder auch durch den Winkel der Normalen, die man von irgend einem Punkte auf beide Ebenen fällt. **Der Winkel zwischen zwei Linien,** welche sich nicht schneiden, ist durch den Winkel gemessen, den zwei Parallelen zu denselben von einem Punkte aus einschliessen.

Wenn wir von dem Winkel zweier Linien sprechen, so ist es wünschenswerth, ohne Zweideutigkeit auszudrücken, ob wir den spitzen oder stumpfen Winkel derselben verstehen. Dazu setzen wir voraus, dass

Winkels. („Kegelschn." Art. 436.) Denn wenn die Ordinaten beider Figuren zur Durchschnittslinie ihrer Ebenen normal genommen sind, so ist jede Ordinate der Projection das Product aus der entsprechenden Ordinate des Originals in den Cosinus des von beiden Ebenen gebildeten Winkels. Und wenn zwei Figuren von der Beschaffenheit sind, dass die denselben Abscissen entsprechenden Ordinaten in unveränderlichem Verhältniss stehen, sind die Flächen dieser Figuren selbst in dem nämlichen Verhältniss. („Kegelschn." Art. 255.)

Fig. 4.



5. Die Projection eines Punktes auf eine gerade Linie ist der Durchschnittspunkt derselben mit einer durch den Punkt gehenden und zu ihr normalen Ebene; es sind also beispielsweise in Figur 1 für rectanguläre Axen D, E, F die drei Projectionen des Punktes P auf die Axen.

Die Projection einer begrenzten geraden Linie auf eine andere Gerade ist gleich dem Product der ersteren Linie in den Cosinus des von beiden gebildeten Winkels. (Fig. 4.)

Sei PP' die gegebene Linie und DD' ihre Projection auf OX, so ziehen wir durch P eine zu OX parallele Gerade bis zum Durchschnitt mit der Ebene $P'C'D'$ in Q; da beide auf einander normal sind, so ist PQP' ein rechter Winkel und $PQ = PP' \cdot \cos P'PQ$, endlich aber $PQ = DD'$, weil diese Geraden die in zwei parallelen geraden Linien von zwei parallelen Ebenen gebildeten Abschnitte sind.

6. Für drei beliebige Punkte P, P', P'' ist die Projection von PP'' auf eine beliebige Gerade der Summe

z. B. für den Winkel der Linien PP', CC' in Figur 3 diese Linien in dem Sinne von P nach P' und von C nach C' durchlaufen werden und dass für die Parallele PQ derselbe Sinn festgehalten werde. Alsdann ist der Winkel zwischen diesen Linien ein spitzer. Wenn wir aber von dem Winkel der Linien PP' und $C'C$ sprechen, so ist die Parallele PQ nach entgegengesetztem Sinne zu ziehen und wir erhalten den stumpfen Winkel, welchen die Linien mit einander bilden. Wenn wir von den Winkeln sprechen, welche eine gerade Linie OP mit den Axen bildet, so verstehen wir darunter immer die Winkel, welche OP mit den positiven Seiten der Axen OX, OY, OZ einschliesst.

der Projectionen von PP' und $P'P''$ auf dieselbe Gerade gleich.

Wenn D, D', D'' die Projectionen der drei Punkte sind, so ist DD'' die Summe von DD' und $D'D''$, so lange D' zwischen D und D'' liegt. Liegt aber D'' zwischen D und D', so ist DD'' die Differenz von DD' und $D'D''$, und da der Sinn des Uebergangs von D' nach D'' der entgegengesetzte von dem von D nach D' ist, so ist DD'' noch immer die algebraische Summe von DD' und $D'D''$. Dass die Projection von $P'P''$ im letzteren Falle mit dem negativen Zeichen zu nehmen ist, geht auch daraus hervor, dass in diesem Falle die Länge der Projection das Product von $P'P''$ in den Cosinus eines stumpfen Winkels ist. (Note S. 3.)

Für eine beliebige Anzahl von Punkten P, P', P'', P''', etc. $P^{(n)}$ ist allgemein die Projection von $PP^{(n)}$ auf eine beliebige Gerade gleich der Summe der Projectionen von PP', $P'P''$, $P''P'''$, etc. $P^{(n-1)}P^{(n)}$ auf dieselbe Gerade. Man kann statt dessen auch sagen, dass die Summe der Projectionen der Seiten eines geschlossenen Polygons auf irgend eine Gerade gleich Null ist.

7. Wir werden oft Gelegenheit haben, von dem folgenden speciellen Falle des Vorhergehenden Gebrauch zu machen.

Die Summe der Projectionen der Coordinaten des Punktes P auf eine beliebige Gerade ist der Projection seines Radius vector auf dieselbe Gerade gleich.

Denn die Betrachtung der Punkte O, D, C, P in Figur 1 oder 2 zeigt, dass die Projection von OP der Summe der Projectionen von OD $(=x)$, DC $(=y)$ und CP $(=z)$ gleich sein muss.

8. Nachdem wir diese auf die Projectionen bezüglichen Grundsätze begründet haben, die wir häufig anwenden werden, kehren wir zu dem eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels zurück.

Die Coordinaten desjenigen Punktes, welcher die Entfernung zwischen zwei Punkten x', y', z'; x'', y'', z'' in dem Verhältniss $P'P:PP''=m:n$ theilt, sind

$$x=\frac{mx''+nx'}{m+n},\quad y=\frac{my''+ny'}{m+n},\quad z=\frac{mz''+nz'}{m+n}.$$

Der Beweis für den entsprechenden Satz der analytischen Planimetrie beweist auch den gegenwärtigen Satz. (Vergl. „Kegelschn.“ Art. 13.) Die Linien AA', BB' in der dortigen Figur können

für die Ordinaten der beiden Punkte in Bezug auf eine der Coordinatenebenen genommen werden.

Wenn wir das Verhältniss $m:n$ als unbestimmt betrachten, so drücken dieselben Gleichungen die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Verbindungslinie jener beiden Punkte aus.

9. Eine der Seiten $P'''P''$ eines Dreiecks ist im Verhältniss $m:n$ und die Verbindungslinie des Theilpunktes mit der gegenüberliegenden Ecke P' im Verhältniss $(m+n):l$ getheilt, welches sind die Coordinaten des letzteren Theilpunktes?

Sie sind

$$x = \frac{lx' + mx'' + nx'''}{l+m+n}, \quad y = \frac{ly' + my'' + ny'''}{l+m+n}, \quad z = \frac{lz' + mz'' + nz'''}{l+m+n},$$

wie man genau in derselben Art beweist, in welcher das entsprechende Theorem der Planimetrie bewiesen wurde. („Kegelschn." Art. 13. Aufg. 7.) Wenn l, m, n unbestimmte Grössen sind, so drücken dieselben Gleichungen die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Ebene des betrachteten Dreiecks aus.

B. Die geraden Linien, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Denn die x von zwei solchen Mittelpunkten sind $\frac{1}{2}(x' + x'')$, $\frac{1}{2}(x''' + x'''')$, das x des Mittelpunktes ihrer Verbindungslinie ist folglich $\frac{1}{4}(x' + x'' + x''' + x'''')$; analoge Ausdrücke geben die Coordinaten y und z dieses Punktes und ihre Symmetrie zeigt, dass sie auch den Verbindungslinien der andern Mittelpunktspaare angehören.

Die geraden Linien, welche die Ecken des Tetraeders mit den Schwerpunkten der Gegenflächen verbinden, gehen auch durch denselben Punkt. Denn das x einen solchen Schwerpunktes ist $\frac{1}{3}(x' + x'' + x''')$, und wir erhalten denselben Werth wie vorher, wenn wir die Verbindungslinie desselben mit der gegenüberliegenden Ecke nach dem Verhältniss $3:1$ theilen.

10. Man soll die Entfernung zwischen zwei Punkten P, P' bestimmen, welche den rectangulären Coordinaten x', y', z'; x'', y'', z'' entsprechen.

Die Figur 3 zeigt, dass $\overline{PP'}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QP'}^2$ ist; da nun

$$\overline{QP'} = z' - z'', \quad \overline{PQ}^2 = \overline{CC'}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$

ist („Kegelschn." Art. 5),

so ist

$$\overline{PP'}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2.$$

Zusatz. Die Entfernung eines beliebigen Punktes x', y', z' vom Anfangspunkt der Coordinaten ist durch die Gleichung $\overline{OP}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ gegeben.

11. Die Lage eines Punktes kann auch durch die Länge seines Radius vector und die Winkel bestimmt werden, welche derselbe mit drei rectangulären Axen bildet.

Wenn wir diese Winkel durch α, β, γ bezeichnen, so gelten, weil die Coordinaten x, y, z die Projectionen des Radius vector auf die drei Axen sind, die Gleichungen

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \cos \beta, \quad z = \rho \cos \gamma.$$

Und aus $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ ergiebt sich für diese drei Cosinus, die wir oft kurz als die Richtungscosinus des Radius vector bezeichnen werden, die verbindende Relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \text{ *)}.$$

Damit folgt wie nach Art. 7 nöthig

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \varrho.$$

Zuweilen wird auch die Lage eines Punktes im Raume dadurch bestimmt, dass man das folgende System von Polarcoordinaten anwendet: Der Radius vector OP (Fig. 2), der Winkel γ, welchen er mit einer festen Axe OZ bildet, und der Winkel $COD = \varphi$, welchen die Projection OC des Radius

*) Ich bin dem gewöhnlichen Gebrauche in der Wahl dieser Winkel zur Bestimmung der Richtung einer Geraden gefolgt; in gewisser Hinsicht bietet jedoch die Anwendung ihrer Complementwinkel, d. h. der Winkel der Linie mit den Coordinatenebenen, Vorzüge dar. Dies bezeugen die entsprechenden Formeln für schiefwinklige Axen, die im Texte nicht gegeben sind, weil sie später nicht gebraucht werden.

Sind α, β, γ die Winkel, welche eine gerade Linie mit den Ebenen yz, zx, xy macht, während A, B, C die Winkel der Axen der x, der y und der z gegen die Ebenen yz, zx, xy respective bezeichnen, so entsprechen den Formeln des Textes die nach dem Princip des Art. 7 leicht zu beweisenden folgenden:

$$x \sin A = \varrho \sin \alpha, \quad y \sin B = \varrho \sin \beta, \quad z \sin C = \varrho \sin \gamma.$$

Wir projiciren auf eine zur Ebene yz normale Linie, so verschwinden die Projectionen von y und z auf dieselbe, und die Projection von x ist derjenigen des Radius vector gleich; die Winkel, welche x und ϱ mit dieser Normalen bilden, sind aber die Complemente von A und α.

vector auf eine zu OZ normale Ebene mit einer festen Geraden OX in dieser Ebene einschliesst.

Da nun $OC = \varrho \sin \gamma$ ist, so vermitteln die Formeln

$$x = \varrho \sin \gamma \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \gamma \sin \varphi, \quad z = \varrho \cos \gamma$$

den Uebergang zwischen rectangulären und derartigen Polarcoordinaten.

12. Das Quadrat der Fläche einer beliebigen ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate der Projectionen dieser Fläche auf drei rectanguläre Ebenen.

Wir nehmen an, die fragliche Fläche sei durch A ausgedrückt, und α, β, γ bezeichneten die Winkel, welche die Normale ihrer Ebene mit den drei Axen bildet; dann sind nach Art. 4 die Projectionen der Fläche auf die Ebenen yz, zx, xy respective gleich $A \cos \alpha$, $A \cos \beta$, $A \cos \gamma$, und die Summe ihrer Quadrate ist gleich A^2 in Folge der Relation $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

13. Man soll den Cosinus des von zwei geraden Linien OP, OP' gebildeten Winkels θ mittelst der Richtungscosinus dieser Linien ausdrücken.

Wir bewiesen im Art. 10, dass

$$\overline{PP'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

ist, und verbinden damit die bekannte Relation

$$\overline{PP'}^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos \theta;$$

da nun $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\varrho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ ist, so ist auch $\varrho\varrho' \cos \theta = xx' + yy' + zz'$, oder

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'.$$

Zusatz. Die Bedingung, unter welcher zwei gerade Linien rechtwinklig zu einander sind, ist

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0.$$

14. Zuweilen ist die Formel

$$\sin^2 \theta = (\cos \beta \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta')^2$$
$$+ (\cos \gamma \cos \alpha' - \cos \alpha \cos \gamma')^2 + (\cos \alpha \cos \beta' - \cos \beta \cos \alpha')^2$$

von Nutzen. Sie kann sehr einfach mittelst eines elementaren Theorems von der Summe der Quadrate dreier Determinanten bewiesen werden, welches in den „Vorlesungen" 2. Aufl. Art. 26 bewiesen, aber auch durch directe Entwicklung leicht bewährt

wird. Nach demselben ist

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2.$$

Wenn aber $a, b, c; a', b', c$ die Richtungscosinus zweier Geraden bezeichnen, so geht unser Ausdruck für $\sin^2\theta$ aus dieser Relation hervor, weil die rechte Seite derselben dann mit $(1 - \cos^2\theta)$ identisch ist.

B. Man soll den senkrechten Abstand eines Punktes x', y', z' von einer durch den Anfangspunkt unter den Richtungswinkeln α, β, γ gehenden Geraden bestimmen.

Ist P der gegebene Punkt, OQ die gegebene Gerade, PQ die Senkrechte, so ist offenbar $PQ = OP \cdot \sin POQ$ und die Anwendung des soeben für $\sin POQ$ gefundenen Werthes und die Bemerkung, dass $x' = OP \cos\alpha'$, etc. giebt $\overline{PQ}^2 =$

$(y'\cos\gamma - z'\cos\beta)^2 + (z'\cos\alpha - x'\cos\gamma)^2 + (x'\cos\beta - y'\cos\alpha)^2.$

15. Man soll die Richtungscosinus einer Geraden finden, die zu zwei gegebenen geraden Linien und somit zu ihrer Ebene normal ist.

Sind $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ die Richtungswinkel der gegebenen Linien und α, β, γ die der gesuchten Geraden, so erhalten wir α, β, γ aus den Gleichungen

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$
$$\cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = 0,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Die beiden ersten liefern durch successive Elimination von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ für λ als eine unbestimmte Grösse die Relationen

$$\lambda\cos\alpha = \cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma',$$
$$\lambda\cos\beta = \cos\gamma'\cos\alpha'' - \cos\gamma''\cos\alpha',$$
$$\lambda\cos\gamma = \cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\alpha''\cos\beta';$$

und die Substitution derselben in die dritte Gleichung giebt nach Art. 14 für θ als den Winkel zwischen den gegebenen Geraden

$$\lambda^2 = \sin^2\theta.$$

Dasselbe Ergebniss konnte auch wie folgt erhalten werden: Sind P und Q oder x', y', z' und x'', y'', z'' Punkte, von denen

je einer in den gegebenen Geraden liegt, so ist das Doppelte der Fläche der Projection des Dreiecks POQ auf die Ebene xy

$$= x'y'' - x''y' = \varrho'\varrho'' (\cos\alpha' \cos\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta');$$

da aber das Doppelte der Fläche des Dreiecks gleich $\varrho'\varrho'' \sin\theta$ und somit die Projection der Fläche auf die Ebene der xy gleich $\varrho'\varrho'' \sin\theta \cos\gamma$ ist, so folgt wie vorher

$$\sin\theta \cos\gamma = \cos\alpha' \cos\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta';$$

und in analoger Weise

$$\sin\theta \cos\alpha = \cos\beta' \cos\gamma'' - \cos\beta'' \cos\gamma',$$

$$\sin\theta \cos\beta = \cos\gamma' \cos\alpha'' - \cos\gamma'' \cos\alpha'.$$

Von der Transformation der Coordinaten.

16. Man soll zu neuen Axen transformiren, welche den alten parallel sind und deren Anfangspunkt in Bezug auf die alten Axen durch die Coordinaten x', y', z' bestimmt ist.

Man erhält wie in der Planimetrie die Transformationsgleichungen

$$x = X + x', \quad y = Y + y', \quad z = Z + z'.$$

Denn eine durch den Punkt P parallel zu einer der Axen, z. B. zu der z, gezogene Gerade schneidet die Ebene xy des alten Systems in einem Punkte C, die Ebene XY des neuen Systems aber in einem Punkte C', und es ist

$$PC = PC' + C'C.$$

Aber PC ist das alte, PC' das neue z, und da parallele Ebenen in parallelen geraden Linien gleiche Abschnitte bestimmen, so ist CC' gleich der Geraden, die man durch den neuen Anfangspunkt der Axe der z parallel bis zu der alten Ebene xy zieht.

17. Von einem System rectangulärer Axen zu einem andern Axensystem überzugehen, welches denselben Anfangspunkt hat.

Wir nehmen an, dass die Winkel der neuen Axen der x, y, z mit den alten Axen durch α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ respective bezeichnet sind; dann ist die Summe der Projectionen der neuen Coordinaten auf eine der alten Axen nach Art. 7 gleich

der Projection des Radius vector, welche die entsprechende alte Coordinate ist. Wir erhalten somit die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha + Y\cos\alpha' + Z\cos\alpha'', \\ y &= X\cos\beta + Y\cos\beta' + Z\cos\beta'', \\ z &= X\cos\gamma + Y\cos\gamma' + Z\cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

Nach Art. 11 ist überdies

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1. \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

Und für λ, μ, ν als die Winkel zwischen den neuen Axen der y und z, der z und x, der x und y respective ist nach Art. 13

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'', \\ \cos\mu &= \cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma, \\ \cos\nu &= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'. \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

18. Wenn die neuen Axen gleichfalls rectangulär sind, so ist

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' &= 0, \\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' &= 0, \\ \cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots (D)$$

Wenn die neuen Axen rectangulär sind, so gelten, weil α, α', α'' die Winkel bezeichnen, welche die alte Axe der x mit den neuen Axen bildet, etc. die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' &= 1, \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' &= 1, \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' &= 1. \end{aligned}\right\} \ldots (E)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' &= 0, \\ \cos\gamma\cos\alpha + \cos\gamma'\cos\alpha' + \cos\gamma''\cos\alpha'' &= 0, \\ \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots (F)$$

und die neuen Coordinaten ergeben sich in Function der alten wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma, \\ Y &= x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma', \\ Z &= x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \ldots (G)$$

Die beiden entsprechenden Systeme von Gleichungen (A) und (G) können aus der folgenden Tafel abgelesen werden:

	X	Y	Z
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

Es ist nicht schwer, die Gleichungen (E), (F), (G) analytisch aus den Gleichungen (A), (B), (D) abzuleiten; wir verzichten darauf, weil sie geometrisch evident sind.

19. Wenn wir die Quadrate der Gleichungen (A) (Art. 17) addiren, so ergiebt sich mit Beachtung der Gleichungen (C)

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2+2\,YZ\cos\lambda+2\,ZX\cos\mu+2\,XY\cos\nu.$$

Wir erhalten so den vom Anfangspunkt nach einem beliebigen Punkte gehenden Radius vector mittelst der schiefwinkligen Coordinaten desselben ausgedrückt.

Man beweist leicht, dass das Quadrat der Entfernung zweier Punkte in schiefwinkligen Coordinaten durch

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2+2\,(y'-y'')\,(z'-z'')\cos\lambda$$
$$+2\,(z'-z'')\,(x'-x'')\cos\mu+2\,(x'-x'')\,(y'-y'')\cos\nu$$

ausgedrückt wird*).

20. Der Grad einer Gleichung zwischen den Coordinaten wird durch Transformation derselben nicht geändert.

*) Da wir von der Transformation von einem System schiefwinkliger Axen zu einem andern System schiefwinkliger Axen keinen Gebrauch machen werden, so mögen die betreffenden Formeln nur hier angegeben werden.

Wenn A, B, C dieselbe Bedeutung haben wie in der Note des Art. 11 und α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' die von den neuen Axen mit den alten Coordinatenebenen gebildeten Winkel bezeichnen, so finden wir durch Projection auf gerade Linien, welche zu den alten Coordinatenebenen normal sind, wie in jener Anmerkung

$$x\sin A = X\sin\alpha + Y\sin\alpha' + Z\sin\alpha'',$$
$$y\sin B = X\sin\beta + Y\sin\beta' + Z\sin\beta'',$$
$$z\sin C = X\sin\gamma + Y\sin\gamma' + Z\sin\gamma''.$$

Dies wird wie in der analytischen Planimetrie aus der Bemerkung bewiesen, dass die für x, z, y so eben gegebenen Ausdrücke die neuen Coordinaten nur im ersten Grade enthalten.

21. Wir wenden uns zur Deutung der **Gleichungen** zwischen den Coordinaten x, y, z. Es erhellt aus der Construction des Art. 1, dass zwei gleichzeitige Gleichungen $x = a$, $y = b$, welche das z unbestimmt lassen, den Punkt C allein bestimmen und daher den Punkt P als irgendwo in der Linie CP gelegen angeben. Diese beiden Gleichungen sind daher als Repräsentation der so bezeichneten geraden Linie zu betrachten, als welche der Ort aller Punkte ist, deren $x = a$ und deren $y = b$ ist.

Zwei Gleichungen dieser Form repräsentiren sonach eine zur Axe der z parallele Gerade; insbesondere repräsentiren die Gleichungen $x = 0$, $y = 0$ die Axe der z selbst. Ebenso für die andern Axen.

Wenn die einzige Gleichung $x = a$ gegeben wäre, so würden wir nur den Punkt D erfahren und daraus zu schliessen haben, dass der Punkt P irgendwo in der Ebene $PBDC$ liege; seine Lage innerhalb dieser Ebene bleibt aber unbestimmt. Diese Ebene als der Ort aller der Punkte, welche $x = a$ haben, ist durch die Gleichung analytisch dargestellt; und jede Gleichung von dieser Form repräsentirt eine der yz-Ebene parallele Ebene, und insbesondere bezeichnet die Gleichung $x = 0$ die yz-Ebene selbst. Ebenso für die andern Coordinatenebenen.

22. **Im Allgemeinen repräsentirt eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten eine Fläche, zwei gleichzeitige Gleichungen zwischen den Coordinaten stellen eine Linie dar, die entweder gerade oder krumm ist, und drei Gleichungen bezeichnen einen Punkt oder mehrere Punkte.**

I. Wenn eine einzige Gleichung gegeben ist, so können wir für x und y willkürliche Werthe annehmen, und die Auflösung der durch Substitution derselben erhaltenen Bestimmungsgleichung für z giebt dann die entsprechenden Werthe von z; d. h. für jeden beliebig angenommenen Punkt C in der Ebene der xy erhalten wir in der Linie PC eine bestimmte Anzahl von Punkten, deren Coordinaten der gegebenen Gleichung genügen. Die Vereinigung der so gefundenen Punkte bildet eine Fläche, welche die geometrische Darstellung der gegebenen Gleichung ist. (Vergl. „Kegelschnitte“ Art. 19.)

II. Wenn zwei Gleichungen gegeben sind, so können wir dieselben durch successive Elimination von y und z zwischen ihnen in die Form $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ bringen, und wenn wir nun für x einen willkürlichen Werth annehmen, so bestimmen diese Gleichungen die entsprechenden Werthe von y und z; in andern Worten, wir können nun nicht mehr den Punkt C in der Ebene xy willkürlich wählen, sondern er ist auf einen gewissen durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmten Ort beschränkt. Jedem Punkte C, welcher diesem Orte angehört, entsprechen in der Linie PC eine Anzahl von Punkten P, und die Vereinigung derselben ist durch jene beiden Gleichungen repräsentirt.

Und da die Punkte C, welche die Projectionen der letzteren sind, in einer gewissen geraden oder krummen Linie liegen, so ist klar, dass die Punkte P auch in einer bestimmten Curve enthalten sind, wobei sie jedoch durchaus nicht nothwendig in einer Ebene liegen.

Anderseits hat die Betrachtung unter I. gelehrt, dass der Ort der Punkte, deren Coordinaten jeder der beiden Gleichungen einzeln genügen, eine Fläche ist; in Folge dessen ist der Ort derjenigen Punkte, deren Coordinaten beide Gleichungen befriedigen, die Vereinigung aller der Punkte, welche den beiden durch die getrennt bezeichneten Gleichungen repräsentirten Flächen gemein sind, d. h. derselbe ist die Durchschnittslinie dieser Flächen.

III. Wenn drei Gleichungen gegeben sind, so genügen dieselben offenbar zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen x, y, z, und durch sie werden daher einzelne Punkte dargestellt. Da jede einzelne der drei Gleichungen eine Fläche repräsentirt, so sind es diejenigen reellen oder imaginären Punkte, welche den drei Flächen gemein sind.

23. Die Flächen werden gleich den ebenen Curven nach dem Grade der Gleichungen classificirt, durch welche sie dargestellt sind. Eine Gleichung n^{ten} Grades in x, y, z bezeichnet eine Fläche n^{ter} Ordnung.

Da für jeden Punkt in der Ebene xy $z = 0$ ist, so liefert die Substitution $z = 0$ in eine beliebige Gleichung die Relation, welche zwischen den Coordinaten x und y derjenigen Punkte besteht, in denen die Ebene xy die durch die Gleichung dargestellte Fläche schneidet, d. h. die Gleichung der ebenen Durchschnittscurve beider. Es ist offenbar, dass die Gleichung dieser Curve

im Allgemeinen von demselben Grade ist, wie die der Fläche; denn zuerst, der Grad der Gleichung des Schnittes kann nicht grösser sein als der Grad der Gleichung der Fläche, und sodann, es ist nur scheinbar, dass er kleiner sein könnte. So ist z. B. die Gleichung

$$zx^2 + ay^2 + b^2x = c^3$$

vom dritten Grade, und wir erhalten doch für $z = 0$ eine Gleichung zweiten Grades als die der Schnittcurve mit der xy-Ebene; da aber die Originalgleichung homogen sein muss, um eine geometrische Bedeutung zu haben, so ist nothwendig jedes ihrer Glieder von der dritten Dimension in einer Linear-Einheit, und die nach der Substitution $z = 0$ übrig bleibenden Glieder sind daher auch als vom dritten Grade zu betrachten und bilden eine mit einer Constanten multiplicirte Gleichung zweiten Grades, d. h. das Resultat der Substitution bezeichnet einen Kegelschnitt und eine unendlich entfernte gerade Linie. (Vergl. „Kegelschnitte" Art. 68, 72.)

Wenn wir also die unendlich entfernten Geraden in die Betrachtung aufnehmen, so können wir sagen, dass die Durchschnittslinie einer Fläche n^{ter} Ordnung mit der Ebene xy immer von der n^{ten} Ordnung ist; und da nach den Ergebnissen unserer Untersuchung über die Transformation jede beliebige Ebene zur Ebene xy gemacht werden kann, und durch eine Transformation der Coordinaten der Grad einer Gleichung zwischen denselben nicht geändert wird, so erkennen wir, dass jeder ebene Schnitt einer Fläche n^{ter} Ordnung selbst von der n^{ten} Ordnung ist.

In gleicher Art wird bewiesen, dass jede gerade Linie eine Fläche n^{ter} Ordnung in n Punkten durchschneidet. Denn sie kann zur Axe der z im Coordinatensystem gemacht werden, und die Punkte, in welchen diese die Fläche durchschneidet, werden durch die gleichzeitige Substitution

$$x = 0, \quad y = 0$$

in die Gleichung der Fläche gefunden; wir erhalten durch dieselbe im Allgemeinen eine Gleichung vom n^{ten} Grade zur Bestimmung von z. Wenn der Grad der entstehenden Gleichung kleiner als n wäre, so zeigt dies an, dass einige der n Punkte, in welchen die

Axe der z die Fläche schneidet, mit ihrem unendlich entfernten Punkte zusammenfallen. („Kegelschnitte“ Art. 143.)

24. Curven im Raum oder gewundene Curven werden nach der Zahl von Punkten classificirt, welche sie mit einer Ebene gemein haben.

Zwei Gleichungen von den Graden m und n respective repräsentiren eine Curve von der Ordnung mn.

Denn die durch jene Gleichungen dargestellten Flächen werden von einer beliebigen Ebene in Curven geschnitten, welche von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung respective sind, und diese Curven bestimmen mit einander mn Durchschnittspunkte. Wenn umgekehrt die Ordnung einer Curve in die Factoren m und n zerlegbar ist, so kann diese Curve der Durchschnitt und zwar der vollständige Durchschnitt zweier Flächen von den Ordnungen m und n sein; aber nicht jede Curve ist eine solche vollständige Durchdringung, so z. B. keine nicht ebene Curve, deren Ordnung eine Primzahl ist.

Drei Gleichungen, welche respective von den Graden m, n und p sind, bezeichnen mnp Punkte.

Dies ergiebt sich aus der Theorie der Elimination; denn wenn wir zwischen den bezeichneten Gleichungen die Grössen y und z eliminiren, so erhalten wir zur Bestimmung von x eine Gleichung vom Grade mnp und also mnp Werthe von x. (Vgl. „Vorlesungen“ Art. 78.) Damit ist zugleich bewiesen, dass drei Flächen von der m^{ten}, n^{ten} und p^{ten} Ordnung sich in mnp Punkten durchschneiden.

25. Wenn eine Gleichung nur zwei der Veränderlichen enthält, wie z. B. $\varphi(x, y) = 0$, so kann sie zunächst als Gleichung einer Curve in der Ebene xy betrachtet werden, ohne dass man sie jedoch als eine Ausnahme von der Regel ansehen dürfte, nach welcher zwei Gleichungen zur Darstellung einer Curve erforderlich sind; denn dabei ist die Voraussetzung $z = 0$ stillschweigend gemacht worden, und es erscheint also eine Curve in der xy-Ebene durch die beiden Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$, $z = 0$ dargestellt. Denken wir uns die letzte Gleichung unterdrückt, so genügen die Coordinaten jedes Punktes der übrig bleibenden Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, dessen x und y ihr genügen, welches auch das z desselben sei, d. h. diese Gleichung repräsentirt alle Punkte einer Fläche, welche durch Bewegung einer zu der Axe der z parallelen geraden Linie längs jener Curve in der Ebene xy

erzeugt wird. Sie heisst eine **cylindrische Fläche**, wie jede Fläche, welche durch Bewegung einer geraden Linie parallel mit sich selbst hervorgebracht wird.

Wenn eine Gleichung nur eine der Veränderlichen, z. B. x, enthält, so wissen wir aus der Theorie der Gleichungen, dass sie in n Factoren von der Form $x - a = 0$ zerfällt, und sie repräsentirt daher nach Art. 21 n Ebenen, welche sämmtlich zu einer der Coordinatenebenen parallel sind — man sagt: Ebenen eines Büschels von parallelen Ebenen.

II. Kapitel.

Die Ebene.

26. Wir beginnen die Discussion der Gleichungen mit derjenigen der Gleichung vom ersten Grade und beweisen zuerst, dass jede Gleichung vom ersten Grade eine Ebene repräsentirt, und dass umgekehrt jede Ebene durch eine Gleichung vom ersten Grade dargestellt wird. Wir begründen zunächst den letzten Satz auf mehreren Wegen.

Zuerst ward im Art. 21 erkannt, dass die Ebene xy durch eine Gleichung vom ersten Grade $z = 0$ dargestellt wird, und die Transformation zu beliebigen andern Axen kann den Grad dieser Gleichung nach Art. 20 nicht ändern.

Wir kommen zu dem nämlichen Resultat, indem wir die Gleichung der durch drei gegebene Punkte bestimmten Ebene entwickeln; sie entsteht z. B. durch Elimination der Grössen l, m, n zwischen den Gleichungen des Art. 9:

$$l(x - x') + m(x - x'') + n(x - x''') = 0,$$
$$l(y - y') + m(y - y'') + n(y - y''') = 0,$$
$$l(z - z') + m(z - z'') + n(z - z''') = 0,$$

und diese liefert eine Gleichung vom ersten Grade. Man kann sie in Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} x - x', & x - x'', & x - x''' \\ y - y', & y - y'', & y - y''' \\ z - z', & z - z'', & z - z''' \end{vmatrix} = 0$$

darstellen und durch Zerlegung (vergl. „Vorlesungen“ Art. 18 f.) sie auf die Form

$$x\begin{vmatrix} y',y'',y''' \\ z',z'',z''' \\ 1,\ 1,\ 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} z',z'',z''' \\ x',x'',x''' \\ 1,\ 1,\ 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x',x'',x''' \\ y',y'',y''' \\ 1,\ 1,\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x',x'',x''' \\ y',y'',y''' \\ z',z'',z''' \end{vmatrix}$$

reduciren, der wir weiterhin wieder begegnen werden.

Zu einer der nützlichsten Formen führt aber die folgende Aufgabe.

27. Man soll die Gleichung einer Ebene finden, für welche die Länge der Normale vom Anfangspunkt der Coordinaten $= p$ und die Winkel derselben mit den Axen α, β, γ gegeben sind.

Die Länge der Projection des Radius vector eines beliebigen Punktes der Fläche auf jene Normale ist nach der Voraussetzung einerseits $= p$ und nach Art. 7 gleich der Summe der Projectionen der Coordinaten jenes Punktes auf dieselbe Linie; man erhält also als analytischen Ausdruck der Ebene die Gleichung

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p.\text{*)}$$

Umgekehrt kann jede Gleichung vom ersten Grade

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

auf die eben erhaltene Form reducirt werden, indem man sie durch einen Factor R dividirt. Wir erhalten dann

$$A = R\cos\alpha,\quad B = R\cos\beta,\quad C = R\cos\gamma,$$

und daraus nach Art. 11 zur Bestimmung von R

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Jede Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ kann daher mit der Gleichung einer Ebene identificirt werden, deren normaler Abstand vom Anfangspunkt

$$= \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ist und für welche die Richtungscosinus dieser Normalen durch A, B, C, dividirt durch dieselbe Quadratwurzel ausgedrückt werden.

Wir geben dabei der Quadratwurzel dasjenige Vorzeichen, welches die Normale positiv macht, und die Zeichen der Cosinus

*) Obwohl wir im Folgenden nur rectanguläre Axen voraussetzen, so ist doch diese Gleichung offenbar ebenso für schiefwinklige Coordinatensysteme gültig.

bestimmen dann, ob die Winkel, welche die Normale mit den positiven Axen bildet, spitz oder stumpf sind.

28. Man soll den von den Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0; \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gebildeten Winkel bestimmen.

Dieser Winkel ist ebenso gross als derjenige, welchen die vom Anfangspunkt auf beide Ebenen gefällten Normalen mit einander einschliessen. Da nun nach dem letzten Artikel die Winkel bekannt sind, welche diese Normalen mit den Axen einschliessen, so erhalten wir nach Art. 13 und 14 die Formeln

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

$$\sin^2\theta = \frac{(BC' - B'C)^2 + (CA' - C'A)^2 + (AB' - A'B)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}.$$

Aus ihnen folgt, dass die Ebenen rechtwinklig zu einander sind, wenn

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

ist, und dass sie einander parallel sind, wenn die Bedingungen

$$AB' = A'B, \quad BC' = B'C, \quad CA' = C'A$$

erfüllt sind, d. h. wenn die Coefficienten A, B, C zu denen A', B', C' proportional sind; es ist aus dem letzten Artikel schon offenbar, dass die Richtung der Normalen beider Ebenen in diesem Falle dieselbe wäre.

29. Man soll die Gleichung einer Ebene mittelst der Abschnitte a, b, c ausdrücken, welche sie in den Axen bestimmt.

Wir finden den von der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in der Axe der x gebildeten Abschnitt a durch die gleichzeitige Substitution $y = 0$, $z = 0$ in die Gleichung, d. h. wir haben $Aa + D = 0$; und ebenso folgen die Gleichungen $Bb + D = 0$, $Cc + D = 0$. Die Substitution der daraus gewonnenen Werthe in die allgemeine Gleichung liefert für dieselbe die der Aufgabe entsprechende Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Wenn in der allgemeinen Gleichung ein Glied fehlt, z. B. wenn $A = 0$ ist, so liegt der Punkt, in welchem die Ebene die Axe der x schneidet, unendlich entfernt oder die Ebene ist der Axe der x parallel. Wenn gleichzeitig $A = 0$, $B = 0$ sind, so schneiden die beiden Axen der x und y die Ebene in unendlicher Entfernung, und dieselbe ist somit ihrer Ebene parallel. (Vergl. Art. 21.) Für $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ werden alle drei Axen in unendlicher Entfernung geschnitten, d. h. eine Gleichung von der Form $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + D = 0$ repräsentirt eine unendlich entfernte Ebene.

30. Man soll die Gleichung der durch drei Punkte x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' bestimmten Ebene finden.

Ist $Ax + By + Cz + D = 0$ ihre Gleichung, so müssen A, B, C, D den Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0 \end{aligned}$$

genügen, weil jene durch die Coordinaten jedes der drei Punkte befriedigt sein muss.

Die Elimination von A, B, C, D zwischen diesen Gleichungen liefert das Resultat in der Form

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder durch Entwicklung nach den einfachen Gesetzen der Determinanten

$$\begin{aligned} & x\,\{y'(z'' - z''') + y''(z''' - z') + y'''(z' - z'')\} \\ + & y\,\{z'(x'' - x''') + z''(x''' - x') + z'''(x' - x'')\} \\ + & z\,\{x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y'')\} \\ + & x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z') = 0 \end{aligned}$$

(vergl. Art. 26); aus ihr erhellen zugleich die Werthe von A, B, C, D.

Wenn wir x, y, z als die Coordinaten irgend eines vierten Punktes betrachten, so geben dieselben Gleichungen die Bedingung, unter welcher vier Punkte in einer Ebene liegen.

31. Die Coefficienten von x, y, z in der vorhergehenden Gleichung sind offenbar die doppelten Flächenzahlen der Projectionen des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks auf die Coordinatenebenen.

Die Multiplication der Gleichung (Art. 27)

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

mit $2F$, wenn F den Inhalt des Dreiecks der drei Punkte bezeichnet, macht dieselbe daher mit derjenigen des letzten Artikels identisch, weil $F\cos\alpha$, $F\cos\beta$, $F\cos\gamma$ die Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinatenebenen sind (Art. 4). Somit muss auch das absolute Glied in beiden Fällen denselben Werth haben, d. h. die Grösse

$$x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z')$$

repräsentirt das Product der doppelten Flächenzahl des Dreiecks der drei Punkte in die Normale der Ebene vom Anfangspunkt, oder das sechsfache Volumen der dreiseitigen Pyramide, welche das Dreieck zur Basis und den Anfangspunkt zum Scheitel hat*).

*) Wenn wir in dem vorhergehenden Werthe für x', y', z' etc. $\varrho'\cos\alpha'$, $\varrho'\cos\beta'$, $\varrho'\cos\gamma'$ etc. substituiren, so finden wir, dass das Sechsfache des Volumens der Pyramide das Product von $\varrho'\varrho''\varrho'''$ in die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'', & \cos\beta'', & \cos\gamma'' \\ \cos\alpha''', & \cos\beta''', & \cos\gamma''' \end{vmatrix}$$

ist. Denken wir nun die drei Radien vectoren durch eine aus dem Anfangspunkt beschriebene Kugel vom Radius Eins geschnitten, so dass sie auf ihr das sphärische Dreieck $R'R''R'''$ bestimmen, so ist das sechsfache Volumen der Pyramide für $a = R'R''$ und p als die von R''' auf letztere Seite gefällte Normale $= \varrho'\varrho''\varrho''' \sin a \sin p$, weil $\varrho'\varrho'' \sin a$ der doppelte Inhalt einer Seitenfläche der Pyramide und $\varrho''' \sin p$ die Normale von der Gegenecke auf dieselbe ist. Die obige Determinante ist daher das Doppelte der Function

$$\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

der Seiten jenes sphärischen Dreiecks.

Man erkennt das Nämliche, wenn man das Quadrat der obigen Determinante nach der gewöhnlichen Regel bildet; die abkürzende Substitution

$$\cos\alpha''\cos\alpha''' + \cos\beta''\cos\beta''' + \cos\gamma''\cos\gamma''' = \cos a, \text{ etc.}$$

giebt als solches

Wenn wir F selbst mittelst der Coordinaten der drei Punkte nach Art. 12 ausdrücken, so wird gefunden, dass $4F^2$ der Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z in der Gleichung des letzten Artikels gleich ist.

32. Man soll die Länge der von einem gegebenen Punkte x', y', z' auf eine Ebene gefällten Normale bestimmen.

Wenn wir durch x', y', z' eine zu der gegebenen parallele Ebene legen und die gemeinschaftliche Normale vom Anfangspunkt auf beide Ebenen fällen, so ist der zwischen beiden Ebenen enthaltene Abschnitt dieser Linie die fragliche Normale, weil parallele Ebenen in parallelen Linien gleiche Abschnitte bestimmen. Nach der Definition des Art. 5 ist aber die Länge der Normalen auf die durch x', y', z' gehende Ebene die Projection des Radius vector von x', y', z' auf diese Normale, und daher nach Art. 27

$$= x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma;$$

die fragliche Länge ist somit

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p.$$

Dies setzt voraus, dass die Normale auf die durch x', y', z gehende Ebene grösser ist als p, oder dass $x', y' z'$ und der Anfangspunkt auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen; sind sie auf derselben Seite der Ebene gelegen, so ist die Länge der Normalen

$$= p - (x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma).$$

$$\begin{vmatrix} 1 \;, & \cos c, & \cos b \\ \cos c, & 1 \;, & \cos a \\ \cos b, & \cos a, & 1 \end{vmatrix}$$

d. i.

$$1 + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c,$$

welches mit dem fraglichen Werthe übereinstimmt.

Die Bemerkung erscheint nützlich, dass für drei zu einander rechtwinklige gerade Linien die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha' \;, & \cos\beta' \;, & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'', & \cos\beta'', & \cos\gamma'' \\ \cos\alpha''', & \cos\beta''', & \cos\gamma''' \end{vmatrix}$$

die Einheit zum Werthe hat; denn ihr Quadrat ist nach dem Obigen

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Für die in der Form

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegebene Gleichung der Ebene wird wie im Art. 27 die Reduction auf die Normalform dieses Artikels vollzogen und die Länge der gesuchten Normalen ist

$$\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Es ist offenbar, dass diejenigen Punkte, für welche

$$Ax' + By' + Cz' + D \text{ und } D$$

einerlei Vorzeichen haben, mit dem Anfangspunkte auf einerlei Seite der Ebene liegen, und dass alle diejenigen Punkte, für welche diese Grössen verschiedene Vorzeichen besitzen, auf der dem Anfangspunkt entgegengesetzten Seite der Ebene gelegen sind.

33. Man soll die Coordinaten des Durchschnittspunktes von drei Ebenen bestimmen.

Die Bestimmung dieser Coordinaten ist die Auflösung von drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten, wie sie in den „Vorlesungen" Art. 29 (S. 36) gegeben ist. Die Werthe der Coordinaten sind gleichzeitig unendlich gross, wenn die Determinante Δ oder $(AB'C'')$ verschwindet, d. h. wenn

$$A\,(B'C'' - B''C') + A'\,(B''C - BC'') + A''\,(BC' - B'C) = 0$$

ist. Unter dieser Bedingung sind also die drei Ebenen derselben geraden Linie parallel, denn ihre Schnittlinien sind nothwendig unter einander parallel, weil sie sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden.

Unter welcher Bedingung schneiden sich vier Ebenen in einem Punkte?

Man erhält diese Bedingung durch Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen der vier Ebenen; sie ist also das Verschwinden der Determinante $(AB'C''D''')$ oder

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C, & D \\ A', & B', & C', & D' \\ A'', & B'', & C'', & D'' \\ A''', & B''', & C''', & D''' \end{vmatrix} = 0.$$

34. Man soll das Volumen des Tetraeders bestimmen, welches vier gegebene Punkte zu Ecken hat.

Wenn wir den Inhalt des durch drei jener Punkte gebildeten Dreiecks mit der Länge der vom vierten auf seine Ebene gefällten Normale multipliciren, so erhalten wir das dreifache Volumen des Tetraeders. Nun ist die Länge der bezeichneten Normalen nach der im Art. 31 entwickelten Form der Gleichung der Ebene durch einen Bruch gegeben, der das Resultat der Substitution der Coordinaten des vierten Punktes in jene Gleichung zum Zähler und die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z in derselben zum Nenner hat; und diese Quadratwurzel ist nach Art. 32 der doppelte Inhalt des von jenen drei Punkten gebildeten Dreiecks. Das sechsfache Volumen jenes fraglichen Tetraeders ist daher durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \\ x'''', & y'''', & z'''', & 1 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt *).

35. Es ist, ganz ebenso wie in der analytischen Planimetrie, evident, dass für $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ als Gleichungen von drei Flächen, und a, b, c als willkürliche Constanten durch $aS + bS' = 0$ eine Fläche repräsentirt wird, welche durch die Schnittlinie der Flächen $S = 0$, $S' = 0$ hindurchgeht; und ebenso durch $aS + bS' + cS'' = 0$ eine Fläche, welche die gemeinschaftlichen Punkte der drei Flächen

*) Das Volumen des von vier durch ihre Gleichungen bestimmten Ebenen begrenzten Tetraeders kann gefunden werden, indem man die Coordinaten ihrer Ecken bildet und in die obige Formel substituirt. Das Resultat ist (vergl. „Vorlesungen" Art. 29 f.), dass das sechsfache Volumen durch den Ausdruck

$$\frac{(AB'C''D''')^3}{(AB'C'')\,(A'B''C''')\,(A''B'''C)\,(A'''BC')}$$

gegeben ist, in welchem die zwischen den Parenthesen stehenden Grössen Determinanten bedeuten (a. a. O. Artikel 3). Die Determinante des Zählers und somit der fragliche Inhalt verschwindet, wenn die vier Ebenen durch denselben Punkt gehen; und der Nenner verschwindet oder der Inhalt wird unendlich gross, sobald irgend drei jener Ebenen derselben geraden Linie parallel sind. Die Determinanten des Nenners sind die nach den Elementen D gebildeten Minoren der Determinante des Zählers.[1])

$S=0$, $S'=0$, $S''=0$ enthält. Sind insbesondere $L=0$, $M=0$, $N=0$ die Gleichungen von drei Ebenen, so ist $aL+bM=0$ die Gleichung einer Ebene, welche durch die Schnittlinie der ersten beiden unter ihnen geht, und $aL+bM+cN=0$ die Gleichung einer Ebene, welche den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt aller drei enthält; bei unbestimmten a, b, c stellt also $aL+bM=0$ alle Ebenen eines Büschels und $aL+bM+cN=0$ alle Ebenen eines Bündels dar. Wir bemerken als specielle Fälle, dass $aL+b=0$ eine Ebene bezeichnet, welche zur Ebene $L=0$ parallel ist, und dass ebenso $aL+bM+c=0$ eine Ebene bezeichnet, welche zur Durchschnittslinie der Ebenen $L=0$, $M=0$ parallel geht: Büschel mit unendlich ferner Scheitelkante, Bündel mit unendlich fernem Scheitel. (Vergl. Art. 25, 29.)

Vier Ebenen $L=0$, $M=0$, $N=0$, $P=0$ gehen durch einen Punkt, wenn ihre Gleichungen durch eine identische Relation von der Form

$$aL+bM+cN+dP=0$$

verbunden sind, weil dann dieselben Coordinatenwerthe, welche den Gleichungen der ersten drei Ebenen genügen, auch die Gleichung der vierten erfüllen müssen. Wenn umgekehrt vier durch einen Punkt gehende Ebenen gegeben sind, so ist eine solche identische Relation leicht zu entwickeln; denn wenn wir die erste jener Gleichungen durch $(A'B''C''')$, die zweite durch $-(A''B'''C)$, die dritte durch $(A'''BC')$ und die vierte durch $-(AB'C'')$ multipliciren und die Producte addiren, so verschwinden nach Art. 7 der „Vorlesungen“ die Coefficienten von x, y, z identisch und das übrig bleibende Glied ist die Determinante des Art. 33, welche verschwindet, weil die vier Ebenen sich in einem Punkte durchschneiden. Die Gleichungen solcher vier Ebenen sind also durch die identische Relation verbunden

$$L(A'B''C''')-M(A''B'''C)+N(A'''BC')-P(AB'C'')=0.$$

B. 1. Wenn sind zwei Ebenen durch gegebene Gerade rechtwinklig zu einander?

Ist die erste Gerade als Schnittlinie der Ebenen

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{und} \quad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

oder $\mathsf{A}=0$, $\mathsf{A}'=0$ und die andere als Schnittlinie von

$$A^*x+B^*y+C^*z+D^*=0 \quad \text{und} \quad A^{*\prime}x+B^{*\prime}y+C^{*\prime}z+D^{*\prime}=0$$

oder $\mathsf{A}^* = 0$, $\mathsf{A}^{*\prime} = 0$ gegeben, so stellen

$$\mathsf{A} + \lambda \mathsf{A}' = 0, \quad \mathsf{A}^* + \lambda_1 \mathsf{A}^{*\prime} = 0$$

oder

$$(A + \lambda A')x + \cdots = 0, \quad (A^* + \lambda_1 A^{*\prime})x + \cdots = 0$$

die fraglichen Ebenen dar und man erhält als Bedingung ihrer Rechtwinkligkeit nach Art. 28

$$(AA^* + BB^* + CC^*) + \lambda (A'A^* + \cdot\cdot) \\ + \lambda_1 (AA^{*\prime} + \cdot\cdot) + \lambda\lambda_1 (A'A^{*\prime} + \cdot\cdot) = 0,$$

oder zur Bestimmung von λ_1 aus λ

$$\lambda_1 = -\frac{(AA^* + \cdot\cdot) + \lambda (A'A^* + \cdot\cdot)}{(AA^{*\prime} + \cdot\cdot) + \lambda (A'A^{*\prime} + \cdot\cdot)}.$$

B. 2. Wenn sind zwei Ebenen durch dieselbe Gerade rechtwinklig zu einander?

Wenn die durch

$$\mathsf{A} = 0, \ \mathsf{A}^* = 0; \ \mathsf{A}' = 0, \ \mathsf{A}^{*\prime} = 0$$

ausgedrückten Ebenen paarweise identisch sind, so folgt aus dem Vorigen

$$(A^2 + \cdot\cdot) + (\lambda + \lambda_1)(AA' + \cdot\cdot) + \lambda\lambda_1 (A'^2 + \cdot\cdot) = 0,$$

eine Relation von der Form der Gleichung der Involution (vergl. „Kegelschnitte", Art. 93), wie es denn offenbar ist, dass die Paare rechtwinkliger Ebenen durch eine Gerade zwei vereinigte projectivische Büschel von vertauschbarem Entsprechen bilden. (Vergl. Art. 51.)

36. Wir schliessen dem Vorigen einige **Eigenschaften des Tetraeders** an, welche, obwohl zuerst nicht durch die Methode der Coordinaten gefunden, uns doch von Nutzen und der Anführung werth scheinen.

Man soll die Relation angeben, welche die Längen der sechs geraden Linien verbindet, die zwischen vier Punkten einer Ebene gezogen werden können.

Wir nennen a, b, c die Seiten des Dreiecks ABC und d, e, f die geraden Linien DA, DB, DC, welche seine Ecken mit dem vierten Punkte D verbinden. Wenn wir dann die von den Seiten a, b, c am Punkte D bestimmten Winkel durch α, β, γ bezeichnen, so ist $\cos\alpha = \cos(\beta \pm \gamma)$, also

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

eine für alle möglichen Lagen von D in der Ebene ABC gültige Relation. Man hat aber

$$\cos\alpha = \frac{e^2+f^2-a^2}{2ef}, \quad \cos\beta = \frac{f^2+d^2-b^2}{2fd}, \quad \cos\gamma = \frac{d^2+e^2-c^2}{2de},$$

und erhält durch Substitution dieser Werthe und Reduction die verlangte Relation (vergl. „Kegelschn.“, Art. 140, 1)

$$a^2(d^2-e^2)(d^2-f^2)+b^2(e^2-f^2)(e^2-d^2)+c^2(f^2-d^2)(f^2-e^2)$$
$$+a^2d^2(a^2-b^2-c^2)+b^2e^2(b^2-c^2-a^2)$$
$$+c^2f^2(c^2-a^2-b^2)+a^2b^2c^2=0.$$

37. Man soll das Volumen eines Tetraeders als eine Function der Längen seiner sechs Kanten darstellen.

Wir bezeichnen die Seiten einer seiner Flächen ABC durch a, b, c und die entsprechende Höhe d. h. die Länge der auf sie von der gegenüberliegenden Ecke gefällten Normale durch p, sowie die Abstände des Fusspunktes derselben von den Ecken A, B, C durch d', e', f' respective. Dann besteht zwischen a, b, c und d', e', f' die Relation des letzten Artikels, und die Kanten d, e, f des Tetraeders, welche von jener vierten Ecke nach A, B, C gehen, sind durch $d^2=d'^2+p^2$, $e^2=e'^2+p^2$, $f^2=f'^2+p^2$ ausgedrückt, so dass

$$d^2-e^2=d'^2-e'^2, \quad e^2-f^2=e'^2-f'^2, \quad f^2-d^2=f'^2-d'^2$$

sind. Wenn man also den Werth der linken Seite der Gleichung des letzten Artikels durch F bezeichnet, so erhält man durch diese Substitution die neue Gleichung

$$-F=p^2(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4),$$

in welcher der mit p^2 multiplicirte Ausdruck das sechszehnfache des Quadrats von der Fläche des Dreiecks ABC darstellt. Wenn wir bemerken, dass das pfache dieser Fläche das dreifache Volumen des Tetraeders giebt, so folgt

$$F=-144\,V^2,$$

welches der Forderung entspricht.

Man kann zu derselben Relation auch gelangen, indem man von dem Determinantenausdruck des Art. 34 ausgeht und erhält sie dann selbst in Form einer Determinante.

Man hat nach Art. 34 und nach bekannten Determinantengesetzen

$$6V = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 0, & 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 0, & 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 0, & 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & 0, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & 0, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & 0, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix},$$

also durch Multiplication beider Werthe

$$-36V^2 =$$

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, & x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4 \\ 1, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, & x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3, & x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4 \\ 1, & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3, & x_3^2+y_3^2+z_3^2, & x_3x_4+y_3y_4+z_3z_4 \\ 1, & x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4, & x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4, & x_3x_4+y_3y_4+z_3z_4, & x_4^2+y_4^2+z_4^2 \end{vmatrix};$$

ändern wir nun in dieser Determinante die Vorzeichen der letzten vier Horizontalen und die der ersten Verticale, multipliciren dann jene und dividiren diese durch 2, so ist dieselbe mit 2^3 multiplicirt; die Addition der mit $(x_1^2+y_1^2+z_1^2)$, $(x_2^2+y_2^2+z_2^2)$, $(x_3^2+y_3^2+z_3^2)$, $(x_4^2+y_4^2+z_4^2)$ respective multiplicirten ersten zu den vier letzten Horizontalreihen und die analoge Addition der mit denselben Factoren multiplicirten ersten zu den vier letzten Verticalreihen ändert sodann den Werth der Determinante nicht, giebt aber ihren Hauptelementen den Werth Null und verwandelt die übrigen Elemente in die Ausdrücke der Längen der Kanten durch ihre Coordinaten. Man erhält nach den vorigen Bezeichnungen

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & b^2, & c^2 \\ 1, & a^2, & 0, & d^2, & e^2 \\ 1, & b^2, & d^2, & 0, & f^2 \\ 1, & c^2, & e^2, & f^2, & 0 \end{vmatrix}$$

den vorigen Ausdruck, und hat damit auch den analytischen Beweis der Formel des vorigen Artikels gefunden; denn für $V=0$, d. h. die Lage der vier Punkte in einer Ebene, geht sie daraus hervor. (Vergl. „Vorlesungen“ Art. 26, B. 8.)

Dieser Ausdruck kann als specieller Fall eines allgemeineren erhalten werden, nach dem das Product der Volumina V, V' zweier Tetraeder durch die Relation

$$288\, V V' = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & e_{11}^2, & e_{12}^2, & e_{13}^2, & e_{14}^2 \\ 1, & e_{21}^2, & e_{22}^2, & e_{23}^2, & e_{24}^2 \\ 1, & e_{31}^2, & e_{32}^2, & e_{33}^2, & e_{34}^2 \\ 1, & e_{41}^2, & e_{42}^2, & e_{43}^2, & e_{44}^2 \end{vmatrix}$$

bestimmt wird, in welcher die e_{ij} die geradlinigen Entfernungen der Ecken E_i, E_j des ersten und zweiten Tetraeders bezeichnen.

38. Man soll die Relation angeben, welche die sechs Bogen grösster Kreise zwischen vier Punkten einer Kugel verbindet.

Derselbe Gang wie im Art. 36 unter Substitution der entsprechenden Formel der sphärischen Trigonometrie liefert für α, β, γ, δ, ε, φ als die Cosinus der sechs fraglichen Bogen die Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \varphi^2 - \alpha^2\delta^2 - \beta^2\varepsilon^2 - \gamma^2\varphi^2$$
$$+ 2\alpha\beta\delta\varepsilon + 2\beta\gamma\varepsilon\varphi + 2\gamma\alpha\delta\varphi - 2\alpha\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon\varphi - 2\beta\delta\varphi$$
$$- 2\gamma\delta\varepsilon = 1.$$

Die nämliche Relation kann folgendermassen bewiesen werden: Wenn die Richtungscosinus der Radien der vier Punkte

$$\begin{matrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1, \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2, \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3, \\ \cos\alpha_4, & \cos\beta_4, & \cos\gamma_4 \end{matrix}$$

sind, so können wir aus dieser Gruppe von Elementen nach der im Art. 25 der „Vorlesungen" gegebenen Methode eine Determinante bilden, deren Werth identisch verschwindet und welche wegen

$$\cos\alpha_i^2 + \cos\beta_i^2 + \cos\gamma_i^2 = 1,$$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = \cos 12, \text{ etc.}$$

die Form annimmt

$$\begin{vmatrix} 1\ , & \cos 12, & \cos 13, & \cos 14 \\ \cos 21, & 1\ , & \cos 23, & \cos 24 \\ \cos 31, & \cos 32, & 1\ , & \cos 34 \\ \cos 41, & \cos 42, & \cos 43, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

die den obigen Werth wiedergiebt.

Dieselbe ergiebt sich aber auch aus der Bemerkung, dass in einem Tetraeder jede Fläche gleich der Summe der Projectionen der drei andern Flächen auf sie ist, also für F_1, F_2, F_3, F_4 als die Inhalte der Flächen und F_{ik} als den innern Winkel zwischen den Flächen F_i und F_k

$$\begin{aligned} -F_1 + F_2 \cos F_{12} + F_3 \cos F_{13} + F_4 \cos F_{14} &= 0, \\ F_1 \cos F_{21} - F_2 \qquad\qquad + F_3 \cos F_{23} + F_4 \cos F_{24} &= 0, \\ F_1 \cos F_{31} + F_2 \cos F_{32} - F_3 \qquad\qquad + F_4 \cos F_{34} &= 0, \\ F_1 \cos F_{41} + F_2 \cos F_{42} + F_3 \cos F_{43} - F_4 \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination der F_i zwischen diesen Gleichungen liefert die Relation zwischen den sechs Winkeln der vier Ebenen in Form einer Determinante; und diese wird mit der vorigen identisch, weil die Normalen der Ebenen aus einem beliebigen Punkte eine um diesen beschriebene Kugel in Punkten 1, 2, 3, 4 treffen, so dass die Winkel 12, ... 34 die Supplemente der Winkel $F_{12}, \ldots F_{34}$ sind*).

39. Man soll den Radius der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel finden.

Die Seite a des Tetraeders ist die dem Bogen vom Cosinus $= \alpha$ entsprechende Sehne, also

$$\alpha = 1 - \frac{a^2}{2 r^2},$$

mit analogen Ausdrücken für β, γ etc. Durch die Substitution dieser Werthe liefert die Formel des letzten Art. die Gleichung

$$\frac{F}{4 r^6} + \frac{2a^2d^2b^2e^2 + 3b^2e^2c^2f^2 + 2c^2f^2a^2d^2 - a^4d^4 - b^4e^4 - c^4f^4}{16 r^8} = 0,$$

*) Man erkennt, dass für irgend vier Punkte einer Kugel jede erste Unterdeterminante der zugehörigen Determinante die in der Anmerk. zu Art. 32 oben erwähnte Function eines der vier aus ihnen gebildeten sphärischen Dreiecke ist, welche v. Staudt in Bd. 24 von „Crelle's Journ." S. 252 als Sinus der Ecke (am Kugelmittelpunkt) bezeichnet hat.

welche in Determinantenform geschrieben für das Produkt Vr des Tetraedervolumens in den Radius der umgeschriebenen Kugel die Relation giebt

$$-576\,V^2r^2 = \begin{vmatrix} 0, & f^2, & e^2, & a^2 \\ f^2, & 0, & d^2, & b^2 \\ e^2, & d^2, & 0, & c^2 \\ a^2, & b^2, & c^2, & 0 \end{vmatrix}$$

oder in der analogen zu der am Schlusse des Art. 37 angewendeten Bezeichnung

$$-576\,V^2r^2 = \begin{vmatrix} 0\,, & e_{12}^{\;2}, & e_{13}^{\;2}, & e_{14}^{\;2} \\ e_{21}^{\;2}, & 0\,, & e_{23}^{\;2}, & e_{24}^{\;2} \\ e_{31}^{\;2}, & e_{32}^{\;2}, & 0\,, & e_{34}^{\;2} \\ e_{41}^{\;2}, & e_{42}^{\;2}, & e_{43}^{\;2}, & 0 \end{vmatrix};$$

und für

$$ad + be + cf = 2S,$$

$$r^2 = \frac{S(S-ad)\,(S-be)\,(S-cf)}{36\,V^2}\,.\text{*)}$$

Da die Theorie des Tetraeders zahlreiche Uebungsaufgaben darbietet, so wollen wir hier als Beispiel einer solchen hinzufügen, dass die kürzeste Entfernung zwischen zwei Gegenkanten eines Tetraeders mit dem Quotienten aus dem sechsfachen Volumen desselben durch das Product der Längen der Gegenkanten in den Sinus des von ihnen gebildeten Winkels übereinstimmt, und wir erinnern zum Beweise dieses Satzes nur an die Relation

$$2ad\cos\theta = b^2 + c^2 - e^2 - f^2.$$

*) Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem entsprechenden der Dreieckslehre lässt den folgenden Satz aussprechen: Das sechsfache Product aus dem Inhalt des Tetraeders in den Halbmesser der umgeschrieben Kugel ist dem Inhalt eines Dreiecks gleich, welches die Producte aus den Längenzahlen der Gegenkanten des Tetraeders zu den Längenzahlen seiner Seiten hat.[2]) Wir wollen durch denselben auf die mannigfaltigen Analogien dieser Art hinweisen, die zwischen Dreieck und Tetraeder bestehen.

III. Kapitel.

Die gerade Linie.

40. Wenn man die Gleichungen zweier Ebenen als gleichzeitig geltend ansieht, so wird durch sie die Durchschnittslinie dieser Ebenen repräsentirt, als welche alle diejenigen Punkte enthält, deren Coordinaten beiden Gleichungen genügen.

Indem man nach einander x und y zwischen den beiden Gleichungen eliminirt, erhält man die Gleichungen der geraden Linie in der gebräuchlichen Form

$$x = mz + a, \quad y = nz + b.$$

Von ihnen stellt die erste die Projection der Linie auf die Ebene xz oder den Aufriss und die zweite ihre Projection auf die Ebene yz oder den Seitenriss dar. Beide zeigen, dass die Gleichungen einer geraden Linie vier unabhängige Constanten enthalten.

Wir können ebenso die Gleichungen der Verbindungslinie zweier Punkte bilden; denn wir haben im Art. 8 die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Verbindungslinie bestimmt und es genügt für diesen Zweck, aus den Werthen derselben das Verhältniss $m : n$ zu bestimmen und seine drei Ausdrücke einander gleich zu setzen; man erhält die Gleichungen

$$\frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{z - z'}{z' - z''}$$

als die Gleichungen der geraden Verbindungslinie von x', y', z' und x'', y'', z''; dieselben Gleichungen ergeben sich aus einer einfachen geometrischen Betrachtung. Sie zeigen auch, dass die Gleichungen der Projectionen der Linie mit den Gleichungen der Verbindungslinien der gleichnamigen Projectionen von zweien ihrer Punkte identisch sind, wie dies auch sonst evident ist.

Zwei gerade Linien im Raume schneiden sich im Allgemeinen nicht. Wenn die erste derselben durch die Gleichungen $L=0$, $M=0$ und die zweite durch die andern $N=0$, $P=0$ dargestellt wird, so wird der Durchschnittspunkt dieser Geraden, sofern ein solcher vorhanden ist, zugleich jenen vier Ebenen gemeinsam sein, und die Bedingung, unter welcher sich jene Geraden durchschneiden, ist daher dieselbe, unter welcher vier Ebenen durch einen Punkt gehen, welche wir im Art. 33 entwickelt haben.

Zwei sich schneidende gerade Linien bestimmen eine Ebene, deren Gleichung leicht gefunden werden kann. Denn wir sahen im Art. 35, dass die linken Seiten der Gleichungen von vier durch einen Punkt gehenden Ebenen der identischen Relation

$$aL+bM+cN+dP=0$$

genügen; es müssen somit die Gleichungen $aL+bM=0$, $cN+dP=0$ identisch und Repräsentanten der nämlichen Ebene sein; zugleich zeigt die Form dieser beiden Gleichungen, dass sie respective durch die beiden geraden Linien $L=0$, $M=0$; $N=0$, $P=0$ hindurchgehen.

B. Wenn die gegebenen geraden Linien durch Gleichungen von der Form

$$x=mz+a,\quad y=nz+b;\quad x=m'z+a',\quad y=n'z+b'$$

dargestellt sind, so wird die Bedingung, unter der sie sich durchschneiden, gefunden, indem man die erste und dritte Gleichung für z auflöst und die so gefundenen Werthe mit den aus der zweiten und vierten Gleichung entspringenden vergleicht; man erhält

$$\frac{a-a'}{m-m'}=\frac{b-b'}{n-n'}.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so sind die vier Gleichungen durch die identische Relation

$$(n-n')\{(x-mz-a)-(x-m'z-a')\}$$
$$=(m-m')\{(y-nz-b)-(y-n'z-b')\}$$

verbunden und es ist daher die Gleichung ihrer Ebene

$$(n-n')(x-mz-a)=(m-m')(y-nz-b).$$

41. Die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche durch den Punkt x', y', z' geht und mit den Axen die Winkel α, β, γ einschliesst.

Die Projectionen der Entfernung des Punktes x', y', z' von einem veränderlichen Punkte x, y, z dieser Linie auf die Axen sind respective $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, und da sie gleich den entsprechenden Producten dieser Entfernung in die Cosinus der von der Linie mit den Axen gebildeten Winkel sind, so erhalten wir

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma} \; (= r),$$

eine Form der Gleichungen der geraden Linie, die in Ansehung ihrer Symmetrie nach x, y, z häufig brauchbar und selbst der Form des Art. 40 vorzuziehen ist, obwohl sie zwei überflüssige Constanten einschliesst.

Wenn umgekehrt die Winkel bestimmt werden sollen, welche eine gerade Linie mit den Axen einschliesst, so bringt man ihre Gleichungen in die Form

$$\frac{x - x'}{A} = \frac{y - y'}{B} = \frac{z - z'}{C}$$

und erhält als ihre Richtungscosinus die mit der Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate dividirten drei Nenner A, B, C.

Man soll die Gleichungen der vom Punkte x', y', z' auf die Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gefällten Normale entwickeln.

Die Bemerkung, dass die Richtungscosinus dieser Linie nach Art. 26 den Grössen A, B, C respective proportional sind, giebt sofort die fraglichen Gleichungen in der Form

$$\frac{x - x'}{A} = \frac{y - y'}{B} = \frac{z - z'}{C}.$$

B. 1. Welches sind die Richtungscosinus der Geraden $x = mz + a$, $y = nz + b$?

Wenn wir die Gleichungen in der Form

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z}{1}$$

schreiben, so sind die Richtungscosinus respective gleich

$$\frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \quad \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}.$$

B. 2. Man soll die Richtungscosinus von

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m}, \quad z = 0 \text{ bestimmen.}$$

Sie sind

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}},\quad \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}},\quad 0.$$

B. 3. Man soll die Richtungscosinus bestimmen für

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Die nach einander folgenden Eliminationen von y und z und die dann vollzogene Reduction auf die Form dieses Art. giebt die Richtungscosinus in den Ausdrücken

$$\frac{BC'-B'C}{R},\quad \frac{CA'-C'A}{R},\quad \frac{AB'-A'B}{R}$$

für $R^2=(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2$.

B. 4. Man soll die Gleichung der durch die geraden sich durchschneidenden Linien

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma},\quad \frac{x-x'}{\cos\alpha'}=\frac{y-y'}{\cos\beta'}=\frac{z-z'}{\cos\gamma'}$$

gehenden Ebene bestimmen.

Da diese Ebene durch den Punkt x', y', z' geht und ihre Normale zu zwei Linien normal ist, deren Richtungscosinus bekannt sind, so ist ihre Gleichung nach Art. ~~14~~ 15 —

$$(x-x')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)+(y-y')(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)$$
$$+(z-z')(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)=0.$$

B. 5. Man soll die Gleichung der durch die zwei parallelen Linien

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma},\quad \frac{x-x''}{\cos\alpha}=\frac{y-y''}{\cos\beta}=\frac{z-z''}{\cos\gamma}$$

bestimmten Ebene finden.

Diese Ebene enthält die Verbindungslinie der gegebenen Punkte x', y', z'; x'', y'', z'', deren Richtungscosinus zu den Differenzen

$$x'-x'',\quad y'-y'',\quad z'-z''$$

proportional sind; in Folge dessen sind die Richtungscosinus ihrer Normalen respective proportional den Grössen

$$(y'-y'')\cos\gamma-(z'-z'')\cos\beta,\quad (z'-z'')\cos\alpha-(x'-x'')\cos\gamma,$$
$$(x'-x'')\cos\beta-(y'-y'')\cos\alpha,$$

und diese letzteren gehen daher als Coefficienten von x, y, z in die fragliche Gleichung ein; man findet endlich ihr absolutes

Glied, indem man in den so gebildeten Ausdruck die Substitution x', y', z' für x, y, z vollzieht in der Form

$$(y'z'' - y''z') \cos\alpha + (z'x'' - z''x') \cos\beta + (x'y'' - x''y') \cos\gamma.$$

42. Man soll die Richtungscosinus der geraden Linie finden, welche den von zwei gegebenen Geraden gebildeten Winkel halbirt.

Nach der Fassung der Aufgabe genügt es, die Betrachtung auf Linien einzuschränken, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Denken wir dann in beiden gegebenen Geraden die vom Anfangspunkt gleichweit entfernten Punkte

$$x', y', z';\ x'', y'', z'',$$

so ist der Mittelpunkt ihrer geraden Verbindungslinie ein Punkt der gesuchten Halbirungslinie, und die Gleichungen derselben sind daher durch

$$\frac{x}{x'+x''} = \frac{y}{y'+y''} = \frac{z}{z'+z''}$$

ausgedrückt, ihre Richtungscosinus somit proportional zu

$$x'+x'',\ y'+y'',\ z'+z'';$$

da aber x', y', z'; x'', y'', z'' zu den Richtungscosinus der gegebenen Linien in einerlei Verhältniss stehen, so sind die Richtungscosinus der Halbirungslinie zu

$$\cos\alpha' + \cos\alpha'',\ \cos\beta' + \cos\beta'',\ \cos\gamma' + \cos\gamma''$$

proportional, und man erhält ihre Ausdrücke, wenn man jede dieser Grössen durch die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate dividirt.

Die Halbirungslinie des Supplementwinkels der gegebenen Geraden wird gefunden, indem man für den Punkt x'', y'', z'' einen im entgegengesetzten Sinne gleichweit vom Anfangspunkte entfernten Punkt, d. i. $-x'', -y'', -z''$, substituirt, und ihre Richtungscosinus sind daher den Grössen

$$\cos\alpha' - \cos\alpha'',\ \cos\beta' - \cos\beta'',\ \cos\gamma' - \cos\gamma''$$

proportional. Die Quadratwurzeln im Nenner sind offenbar gleich $\sqrt{2(1 \pm \cos\delta)}$ oder $2\cos\frac{1}{2}\delta$, $2\sin\frac{1}{2}\delta$ für δ als Winkel der beiden Geraden.

Wir bemerken, dass die Ebenen, welche den Neigungswinkel zweier Ebenen halbiren, durch

$$(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p)$$
$$= \pm (x \cos\alpha' + y \cos\beta' + z \cos\gamma' - p')$$

dargestellt werden. (Vergl. Art. 32.)

43. Man soll den durch die geraden Linien

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}, \quad \frac{x-a}{l'} = \frac{y-b}{m'} = \frac{z-c}{n'}$$

gebildeten Winkel bestimmen.

Die Vergleichung der in den Art. 13 und 41 gewonnenen Ergebnisse giebt für diesen Winkel die Formel

$$\cos\theta = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

Die betrachteten Geraden sind somit rechtwinklig zu einander für

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

B. 1. Welches ist der von den geraden Linien

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{(3)}} = \frac{z}{\sqrt{(2)}}; \quad \frac{x}{\sqrt{(3)}} = y, \quad z = 0$$

gebildete Winkel? Antwort: 30^0.

B. 2. Man soll die senkrechte Entfernung eines Punktes x'', y'', z'' von der geraden Linie

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha} = \frac{y-y'}{\cos\beta} = \frac{z-z'}{\cos\gamma}$$

bestimmen.

Wenn man von jenem auf diese die Normale fällt und den gegebenen Punkt mit dem Punkte x', y', z' der Geraden verbindet, so ist die Länge von jener dem Producte aus der Länge L dieser letzteren in den Sinus des von beiden gebildeten Winkels gleich; nun sind die Richtungscosinus der eben bezeichneten geraden Linie durch

$$\frac{x'-x''}{L}, \quad \frac{y'-y''}{L}, \quad \frac{z'-z''}{L}$$

dargestellt und man erhält mittelst der im Art. 14 für $\sin^2\theta$ gegebenen Formel das Quadrat des gesuchten senkrechten Abstandes

$$= [\cos\beta(z'-z'') - \cos\gamma(y'-y'')]^2 + [\cos\gamma(x'-x'') - \cos\alpha(z'-z'')]^2$$
$$+ [\cos\alpha(y'-y'') - \cos\beta(x'-x'')]^2.$$

Für $x'' = y'' = z'' = 0$ reducirt sich dieser Ausdruck auf den im Beispiel des Art. 14 gefundenen, aus welchem er auch durch eine Verlegung des Anfangspunktes auf die einfachste Weise abgeleitet wird.

Wenn man die Länge K der zweiten Kathete jenes rechtwinkligen Dreiecks, aus welchem der Sinus vorher entnommen ward, als das Product von L in den Cosinus des nämlichen Winkels ausdrückt, so erhält man für sie den Werth

$$K = \cos\alpha\,(x' - x'') + \cos\beta\,(y' - y'') + \cos\gamma\,(z' - z''),$$

und mittelst desselben die Coordinaten des Fusspunktes der Normale

$$x_n = x' + K\cos\alpha,\quad y_n = y' + K\cos\beta,\quad z_n = z' + K\cos\gamma.$$

44. Man soll den Winkel bestimmen, welcher von der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ mit der geraden Linie $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ gebildet wird.

Der fragliche Winkel ist das Complement desjenigen Winkels, welchen die gegebene Gerade und die Normale der Ebene mit einander einschliessen, und wir erhalten daher

$$\sin\theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Für

$$Al + Bm + Cn = 0$$

ist die betrachtete Gerade der Ebene parallel, denn sie ist alsdann normal zu einer Normalen der Ebene.

45. Unter welchen Bedingungen ist die gerade Linie $x = mz + a$, $y = nz + b$ ganz in der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ enthalten?

Wenn wir die durch die Gleichungen der Linie für x und y gegebenen Werthe in die Gleichung der Ebene substituiren, so giebt die nachmalige Auflösung derselben für z

$$z = -\frac{Aa + Bb + D}{Am + Bn + C},$$

und wenn der Zähler und Nenner dieses Ausdrucks gleichzeitig identisch verschwinden, so wird der Werth von z unbestimmt und die gerade Linie ist vollständig in der Ebene enthalten. Wir haben soeben gesehen, dass das Verschwinden des Nenners den Parallelismus der Geraden mit der Ebene anzeigt, während das Verschwinden des Zählers anzeigt, dass einer der Punkte der

Geraden, nämlich der Punkt $a, b, 0$, in welchem sie die Ebene xy schneidet, in der Ebene enthalten ist.

Wir können in derselben Art die Bedingungen aufstellen, unter welchen eine gerade Linie ganz in einer beliebigen Fläche gelegen ist; wir substituiren wie vorher die Werthe von x und y in die Gleichung der Fläche und vergleichen die Coefficienten aller Potenzen von z in der resultirenden Gleichung mit Null. Es ist klar, dass die Zahl der daraus hervorgehenden Bedingungen um Eins die Ordnungszahl der Fläche übersteigt*).

46. Man soll die Gleichung einer Ebene bestimmen, welche durch eine gegebene gerade Linie geht und zu einer gegebenen Ebene normal ist.

Wir denken die Linie durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

und die Ebene durch

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

gegeben. Dann ist die Gleichung jeder durch jene Gerade gehenden Ebene von der Form

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + B'y + C'z + D') = 0,$$

und damit eine solche zu der gegebenen Ebene normal sei, muss die Bedingung

$$(\lambda A + \mu A')A'' + (\lambda B + \mu B')B'' + (\lambda C + \mu C')C'' = 0$$

erfüllt sein. Sie bestimmt das Verhältniss $\lambda : \mu$, und die geforderte Gleichung ergiebt sich in der Form (vergl. Art. 28, 40, B.)

$$(A'A'' + B'B'' + C'C'')(Ax + By + Cz + D)$$
$$= (AA'' + BB'' + CC'')(A'x + B'y + C'z + D').$$

*) Weil die Gleichung einer geraden Linie vier Constanten enthält, so kann eine gerade Linie so bestimmt werden, dass sie irgend vier gegebene Bedingungen erfüllt. Demnach muss jede Fläche zweiten Grades unzählig viele gerade Linien enthalten, weil um drei Bedingungen zu erfüllen vier Constanten zur Disposition sind. Jede Fläche der dritten Ordnung muss eine begrenzte Anzahl von geraden Linien enthalten, weil die Zahl der Bedingungen, welchen zu genügen ist, mit der Zahl der verfügbaren Constanten übereinstimmt. Flächen von höheren Ordnungen enthalten nicht mit Nothwendigkeit gerade Linien, sondern müssen, um dies zu thun, besonderen Bedingungen genügen.

Eine andere sehr einfache Bestimmung ihrer Gleichung bietet sich dar, wenn die Ebene und die gerade Linie durch Gleichungen von der Form

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p, \quad \frac{x - x'}{\cos\alpha'} = \frac{y - y'}{\cos\beta'} = \frac{z - z'}{\cos\gamma'}$$

gegeben sind; denn die gesuchte Ebene enthält eine Gerade von den Richtungswinkeln α', β', γ' und die Normale der Ebene von den Richtungswinkeln α, β, γ; nach Art. 15 sind daher die Richtungscosinus einer zu ihr normalen Geraden respective proportional zu

$$\cos\beta' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma', \quad \cos\gamma' \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha',$$
$$\cos\alpha' \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta',$$

und weil die Ebene zugleich den Punkt x', y', z' enthält, so ist ihre Gleichung nothwendig

$$\begin{aligned}(x - x')\,(\cos\beta \cos\gamma' - \cos\beta' \cos\gamma)\\ + (y - y')\,(\cos\gamma \cos\alpha' - \cos\gamma' \cos\alpha)\\ + (z - z')\,(\cos\alpha \cos\beta' - \cos\alpha' \cos\beta) = 0.\end{aligned}$$

47. Man soll die Gleichung einer Ebene bestimmen, welche durch eine gegebene Gerade und parallel einer zweiten gegebenen Geraden geht.

Wir nehmen zuerst an, die beiden Geraden seien durch

$$L = 0, \ M = 0; \ N = 0, \ P = 0$$

gegeben, wo L, M, N, P die allgemeinste Gleichungsform der Ebene vertreten. Indem wir dann genau wie im Art. 35 verfahren, erhalten wir die identische Relation

$$L(A'B''C''') - M(A''B'''C) + N(A'''BC') - P(AB'C'') = (A'B''C'''D),$$

in welcher die rechte Seite diejenige Determinante repräsentirt, bei deren Verschwinden die vier Ebenen L, M, N, P sich in einem Punkte schneiden (Art. 33), während die Coefficienten der linken Seite ihre Minoren sind.

Aus dieser Relation ergiebt sich, dass die Gleichungen

$$L(A'B''C''') - M(A''B'''C) = 0, \quad N(A'''BC') - P(AB'C'') = 0$$

parallele Ebenen repräsentiren; denn sie unterscheiden sich nur durch eine Constante, d. h. sie schneiden sich in der unendlich entfernten Ebene. Diese Ebenen gehen aber der Form ihrer

Gleichungen nach durch je eine der beiden gegebenen geraden Linien.

Wir nehmen sodann **zweitens** an, dass die beiden Geraden durch die Gleichungen

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma};\quad \frac{x-x''}{\cos\alpha'}=\frac{y-y''}{\cos\beta'}=\frac{z-z''}{\cos\gamma'}$$

gegeben sind und bemerken, dass die Richtungscosinus einer Normale der gesuchten Ebene, weil eine solche zu jeder der beiden Geraden normal sein muss, die im letzten Artikel gegebenen Werthe haben werden, so dass die Gleichungen der gesuchten parallelen Ebenen durch

$$(x-x')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)+(y-y')(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)$$
$$+(z-z')(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)=0,$$
$$(x-x'')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)+(y-y'')(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)$$
$$+(z-z'')(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)=0$$

ausgedrückt werden.

Die normale Entfernung beider Ebenen ist die Differenz zwischen den vom Anfangspunkt auf sie gefällten Normalen, und somit gleich dem Quotienten aus der Differenz ihrer absoluten Glieder durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der gemeinschaftlichen Coefficienten von x, y, z in ihren Gleichungen; diese normale Entfernung ist daher

$$\{(x'-x'')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)+(y'-y'')(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)$$
$$+(z'-z'')(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)\}:\sin\theta,$$

wenn wir durch θ den von beiden geraden Linien gebildeten Winkel bezeichnen, wie im Art. 14. Es ist offenbar, dass die so bestimmte normale Entfernung kürzer ist, als jede andere gerade Linie, die man von einem Punkte der einen Ebene nach einem Punkte der andern Ebene ziehen kann.

48. **Man soll die Gleichungen und die Grösse der kürzesten Entfernung zwischen zwei sich nicht durchschneidenden Geraden bestimmen.**

Die kürzeste Entfernung zweier Geraden ist eine zu beiden normale gerade Linie, welche folgendermassen bestimmt wird: Man lege durch jede der beiden geraden Linien nach Art. 46 eine Ebene, welche zu den nach Art. 47 bestimmten Ebenen normal ist; ihre Durchschnittslinie ist eine Normale der beiden

parallelen Ebenen und somit auch der beiden gegebenen geraden Linien; die Construction zeigt, dass sie auch die beiden gegebenen Geraden schneidet; sie giebt also die gesuchte kürzeste Entfernung; ihre Länge ist offenbar die im letzten Artikel bereits gegebene.

Indem wir nach Art. 46 die Gleichung einer Ebene ermitteln, welche durch eine Linie von den Richtungswinkeln α, β, γ geht und normal zu einer Ebene ist, deren Richtungscosinus zu

$$\cos\beta'\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma', \quad \cos\gamma'\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha',$$
$$\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta'$$

proportional sind, erkennen wir, dass die gesuchte Linie die Durchschnittslinie der Ebenen

$$(x - x')(\cos\alpha' - \cos\theta\cos\alpha) + (y - y')(\cos\beta' - \cos\theta\cos\beta) \\ + (z - z')(\cos\gamma' - \cos\theta\cos\gamma) = 0,$$
$$(x - x'')(\cos\alpha - \cos\theta\cos\alpha') + (y - y'')(\cos\beta - \cos\theta\cos\beta') \\ + (z - z'')(\cos\gamma - \cos\theta\cos\gamma') = 0$$

ist; ihre Richtungscosinus sind den Grössen

$$\cos\beta'\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma', \quad \cos\gamma'\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha',$$
$$\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta'$$

nothwendig proportional.

B. Die kürzeste Distanz δ zwischen den geraden Linien

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p, \quad x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = p'$$

und $$P'P'' \quad \text{oder} \quad (x', y', z') \cdot (x'', y'', z'')$$

ist zu bestimmen.

Bezeichnen wir durch L, M die Normalen aus irgend einem Punkte (x, y, z) auf die gegebenen Ebenen und mit L', M' resp. L'', M'' die von den Punkten P', P'', so ist

$$L + \lambda M = 0$$

die Gleichung irgend einer Ebene durch die erste gerade Linie und sind

$$\frac{lx' + mx''}{l + m}, \ldots$$

die Coordinaten irgend eines Punktes in der zweiten. Wird also diese Gerade von der Ebene $L + \lambda M = 0$ in ihrem unendlich fernen Punkte, d. h. mit $l + m = 0$ geschnitten, so erhält man

den Parameter λ für die durch die erste Gerade gehende und zur zweiten Geraden parallele Ebene.

Es giebt

$$L' + \lambda M' = L'' + \lambda M'',$$

d. h. für die Ebene durch L und M hat man

$$LM'' - L''M = LM' - L'M.$$

Ferner weicht

$$LM'' - L''M = LM' - L'M + L'M'' - L''M'$$

von der vorigen Gleichung nur durch eine Constante ab und ist, als durch die Coordinaten von P' und P'' befriedigt, also die durch die zweite Gerade gehende Parallelebene zu jener. Wir finden daher die verlangte kürzeste Distanz, indem wir $L'M'' - L''M'$ durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z in diesen Gleichungen dividiren.

Das aus der Reduction dieses Ausdrucks erhaltene Ergebniss kann auch so ermittelt werden: L', M' sind die Entfernungen der beiden gegebenen Ebenen von P' und beide in der Normalebene durch P' zur Geraden LM enthalten; ebenso L'', M'' in einer solchen durch P''; betrachten wir also Projectionen auf diesen Ebenen, so ist für φ als den Winkel zwischen den Ebenen L und M der doppelte Inhalt des Dreiecks, welches die Projection von $P'P''$ im Durchschnitt von L, M bildet, mit $\sin\varphi$ multiplicirt $= L'M'' - L''M'$. Aber dieser doppelte Inhalt ist offenbar auch das Product der gesuchten kürzesten Distanz δ in die Projection von $P'P''$; d. h. für θ als den Winkel zwischen den beiden Geraden ist

$$L'M'' - L''M' = (P'P'')\,\delta \sin\theta \sin\varphi.$$

49. Die Gleichungen einer Geraden für beliebige Coordinatenaxen in der Form

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}$$

scheinen fünf unabhängige Grössen, nämlich x', y', z' und die Verhältnisse $l : m : n$ zu enthalten; man zeigt aber leicht, dass x', y', z' in Gruppen auftreten, die nicht unabhängig von einander sind, so dass, wie nach Art. 40 nöthig ist, nur vier unabhängige Constanten vorhanden sind. Denn mit $mz' - ny'$, $nx' - lz'$, $ly' - mx'$ resp. gleich a, b, c hat man die verbindende Relation $la + mb + nc = 0$; und mit dieser als Bedingung sind die Gleichungen unserer Geraden irgend zwei der vier Gleichungen

$$\begin{aligned} ny - mz + a &= 0, \\ -nx \quad + lz + b &= 0, \\ mx - ly \quad + c &= 0, \\ ax + by + cz \quad &= 0, \end{aligned}$$

weil mittelst jener Bedingung aus irgend zweien von ihnen die beiden andern in allen Fällen abgeleitet werden können. Man kann diese sechs Grössen a, b, c, l, m, n, welche unter der Voraussetzung, dass sie der Bedingung $al + bm + cn = 0$ genügen, die Lage der Geraden zu bestimmen, die **sechs Coordinaten der Geraden** nennen. Denn auch die Grössen a, b, c, d. h. die Functionen $mz - ny$, $nx - lz$, $ly - mx$ der Coordinaten x, y, z eines Punktes der Geraden haben für jeden Punkt der Geraden denselben Werth.

Wir können somit jede Relation zwischen a, b, c in den Coordinaten x, y, z ausdrücken.

Und wenn wir die Axen der x, y, z als rechtwinklig zu einander voraussetzen, so dass $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$, so sehen wir nach Art. 15 leicht, dass a, b, c die Coordinaten eines Punktes sind, der in der im Coordinatenanfangspunkt auf seiner Verbindungsebene mit der Geraden errichteten Normale im Abstand des Ursprungs von der Geraden liegt.

B. 1. Wenn wir wie in Art. 45 die Bedingungen bilden, unter denen die Gerade

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}$$

ganz in der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ enthalten ist, so erhalten wir irgend zwei der vier Gleichungen — z. B. bei der Substitution für x und y in die Gleichung der Ebene und Auflösung für z die beiden letzten — aus der Gruppe

$$\begin{aligned} Bc - Cb + Dl &= 0, \\ -Ac \quad + Ca + Dm &= 0, \\ Ab - Ba \quad + Dn &= 0, \\ Al + Bm + Cn \quad &= 0. \end{aligned}$$

Aus jedem Paar derselben geht das andere Paar wieder durch die Verbindung mit der Relation $al + bm + cn = 0$ hervor.

B. 2. Man soll durch die Coordinaten von zwei Geraden die kürzeste Distanz zwischen ihnen ausdrücken. Der am Schluss

des Art. 47 für das Product der kürzesten Distanz δ zwischen zwei Geraden in den Sinus ihres Winkels θ gefundene Ausdruck ist in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} x'-x'', & \cos\alpha, & \cos\alpha' \\ y'-y'', & \cos\beta, & \cos\beta' \\ z'-z'', & \cos\gamma, & \cos\gamma' \end{vmatrix}$$

und also nach dem Schluss des Textes oben, d. i. Ersetzung der Richtungscosinus durch l', l'' etc.,

$$= \begin{vmatrix} x', & l', & l'', \\ y', & m', & m'', \\ z', & n', & n'', \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x'', & l', & l'' \\ y'', & m', & m'' \\ z'', & n', & n'' \end{vmatrix}$$

und wir sehen damit, dass die Coordinaten der Punkte x', $\cdots$ in ihm nur in den Verbindungen des Textes auftreten; in Folge dessen erhalten wir abgesehen vom Zeichen in der Ausdrucksweise dieses Artikels

$$\delta \sin\theta = l'a'' + m'b'' + n'c'' + l''a' + m''b' + n''c'.$$

Es ist die Grösse, welche Cayley[3]) als das Moment der beiden Geraden bezeichnet hat. Für sich schneidende und parallele Gerade ist es gleich Null. (Vergl. Art. 57.)

IV. Kapitel.

Die homogenen projectivischen Coordinaten.

50. Wenn irgend vier nicht durch einen Punkt gehende Ebenen durch ihre Gleichungen

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0,\ P = 0$$

gegeben sind, so kann auf dieselbe Art, wie in der analytischen Planimetrie (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 64), dargethan werden, dass die Gleichung jeder andern Ebene in die Form des linearen Gebildes dritter Stufe

$$aL + bM + cN + dP = 0$$

gebracht werden kann. Denn wenn diese vier festen Ebenen durch

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0,\ (i = 1, 2, 3, 4)$$

respective dargestellt sind und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die fünfte Ebene bezeichnet, welche in die Form

$$aL + bM + cN + dP = 0$$

gebracht werden soll, so geht die Bestimmung der Parameter a, b, c, d aus der Auflösung der vier Bedingungsgleichungen

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 = A,$$
$$aB_1 + bB_2 + cB_3 + dB_4 = B,$$
$$aC_1 + bC_2 + cC_3 + dC_4 = C,$$
$$aD_1 + bD_2 + cD_3 + dD_4 = D$$

hervor, welche stets möglich und bestimmt ist, so lange die vier festen Ebenen nicht durch einen Punkt gehen.

Daher entspringt daraus ein System von Punktcoordinaten im Raume, bei welchem die Gleichung einer Ebene durch eine lineare homogene Gleichung zwischen vier Veränderlichen dargestellt wird. Und allgemein kann die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den Grössen L, M, N, P ausgedrückt werden, weil die Zahl der Glieder der vollständigen Gleichung n^{ten} Grades zwischen drei und die der homogenen Gleichung n^{ten} Grades zwischen vier Variabeln die nämliche ist. Im Folgenden werden wir diese Vierebenen-Coordinaten überall da gebrauchen, wo durch sie unsere Gleichungen vereinfacht werden können; wir werden sie durch x, y, z, w oder durch x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen, und haben sie als Grössen zu betrachten, welche zu den senkrechten Abständen oder zu gegebenen Vielfachen der senkrechten Abstände des durch sie bestimmten Punktes von vier Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$ oder $x_i = 0$ proportional sind.

Man erkennt aber auch ebenso wie in „Kegelschnitte“ Art. 28, dass es eine zweite Art der Deutung unserer Gleichungen giebt, in welcher eine Gleichung vom ersten Grade in den Veränderlichen einen Punkt darstellt und die Veränderlichen die Coordinaten einer Ebene sind. Wenn L', M', N', P' die Coordinaten eines festen Punktes sind, so geht die Ebene des vorigen durch ihn mit $aL' + bM' + cN' + dP' = 0$, und die Coordinaten irgend einer Ebene durch diesen Punkt sind nur dieser Relation unterworfen. Die Grössen a, b, c, d können als die Distanzen der Ebene von vier gegebenen festen Punkten $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ oder als proportional zu ihnen (vergl. Art. 53) oder zu gegebenen Vielfachen der Distanzen angesehen werden. In dieser doppelten geometrischen Interpretation eines und desselben algebraischen Ausdruckes liegt das Princip der Dualität; es wurzelt in der Thatsache, dass man ebenso gut den Punkt wie die Ebene als Element des Raumes für den Aufbau der Geometrie betrachten kann — der Raum ist als Gesammtheit seiner reellen Punkte wie seiner reellen Ebenen ein Gebilde von dreifach unendlich vielen Elementen oder von drei Dimensionen.

B. 1. Man bestimme die Gleichung der Ebene durch den Punkt x', y', z' und die Durchschnittslinie der Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ und } A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Sie ist

$$(A'x' + B'y' + C'z' + D')\,(Ax + By + Cz + D)$$
$$= (Ax' + By' + Cz' + D)\,(A'x + B'y + C'z + D').$$

B. 2. Welches ist die Gleichung der Ebene ABC in Figur 1?

Die Gleichungen der Geraden BC, CA, AB sind

$$\frac{x}{a} = 1, \ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; \ \frac{y}{b} = 1, \ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 1; \text{ etc.}$$

also ist die Gleichung der geforderten Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2,$$

denn sie geht nach dieser ihrer Form durch jede der drei Verbindungslinien der gegebenen Punkte.

B. 3. Die Gleichung der Ebene PEF in derselben Figur zu bestimmen.

Die Linie EF hat die Gleichungen

$$x = 0, \ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

und die Gleichung der durch sie mit dem Punkte a, b, c bestimmten Ebene ist daher nach dem ersten Beispiel

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 1.$$

51. Wenn vier feste Ebenen, welche sich in derselben geraden Linie schneiden, durch eine fünfte Ebene geschnitten werden, die jene nicht enthält, so ist das Doppelverhältniss des entstehenden Strahlbüschels unveränderlich.

Wir können durch eine Transformation der Coordinaten die Schnittebene zur Ebene der xy machen und erhalten dann durch die Substitution $z = 0$ in die Gleichungen der vier Ebenen die Gleichungen der vier Strahlen jenes Büschels. Sie sind offenbar von der Form

$$aL + M = 0, \ bL + M = 0, \ cL + M = 0, \ dL + M = 0,$$

und das Doppelverhältniss derselben hängt, wie in „Kegelschnitte" Art. 60, allein von den Constanten a, b, c, d ab und ändert daher seinen Werth nicht, wenn durch Transformation der Coordinaten $L = 0$, $M = 0$ als Gleichungen anderer Durchschnittslinien

erscheinen. Das Nämliche ergiebt sich auch geometrisch direct aus dem Fundamentalsatze „Kegelschnitte“, Art. 81.

52. Damit kann eine directe Ableitung des Systems der Punkt-Coordinaten x_i des Art. 50 und des ihm nach dem Principe der Dualität („Kegelschnitte“, Art. 78) correspondirenden Systems homogener Ebenen-Coordinaten ξ_i gegeben werden, nach der zugleich die Beziehung der allgemeinen oder projectivischen Coordinaten des Punktes und der Ebene zu den speciellen nach Cartesius und Plücker benannten Systemen anschaulich wird.[4])

Wenn fünf Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, E, von denen keine vier in einer Ebene liegen, oder fünf Ebenen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \mathsf{A}_4, \mathsf{E}$, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, gegeben sind, so lässt sich jeder andere Punkt und respective jede andere Ebene in Bezug auf diese festen Elemente durch projectivische Coordinaten bestimmen. Nämlich:

Jeder Punkt P bestimmt mit den geraden Verbindungslinien von dreien der Punkte A_i, die ein Dreieck bilden, drei Ebenen, die nur ihn gemein haben und durch die Doppelverhältnisse gegeben werden können, die sie mit den drei festen Ebenen durch je dieselbe Gerade (nämlich nach den übrigen beiden A_i und nach E) bilden; z. B. also durch die Doppelverhältnisse von Ebenenbüscheln

$$(A_1A_2 \cdot A_3A_4EP),$$
$$(A_2A_3 \cdot A_4A_1EP),$$
$$(A_3A_1 \cdot A_2A_4EP)$$

ist der Punkt P bestimmt.

Bezeichnet man durch e_1, e_2, e_3, e_4 die Abstände des Punktes E und durch p_1, p_2, p_3, p_4 die Abstände des Punktes P von den Ebenen $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_1A_2, A_1A_2A_3$, oder allge-

Jede Ebene Π bestimmt mit den Schnittlinien von dreien der Ebenen A_i, die ein Dreiflach bilden, drei Punkte, die nur sie gemein haben und durch die Doppelverhältnisse gegeben werden können, die sie mit den drei festen Punkten in je derselben Geraden (nämlich in den übrigen beiden A_i und in E) bilden; z. B. also durch die Doppelverhältnisse von Punktreihen

$$(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 \cdot \mathsf{A}_3\mathsf{A}_4\mathsf{E}\Pi),$$
$$(\mathsf{A}_2\mathsf{A}_3 \cdot \mathsf{A}_4\mathsf{A}_1\mathsf{E}\Pi),$$
$$(\mathsf{A}_3\mathsf{A}_1 \cdot \mathsf{A}_2\mathsf{A}_4\mathsf{E}\Pi)$$

ist die Ebene Π bestimmt.

Bezeichnet man durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ die Abstände der Ebene E und durch $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ die Abstände der Ebene Π von den Punkten $\mathsf{A}_2\mathsf{A}_3\mathsf{A}_4, \mathsf{A}_3\mathsf{A}_4\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_4\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{A}_3$, oder allge-

meiner sind e_i und p_i die in gleicher Richtung gemessenen Längen von E und P respective bis zu der Ebene $A_j A_k A_l$, so sind die vorher geschriebenen Doppelverhältnisse respective

$$= \frac{p_3 : e_3}{p_4 : e_4}, \quad = \frac{p_4 : e_4}{p_1 : e_1}, \quad = \frac{p_2 : e_2}{p_4 : e_4}$$

und man kann setzen

$$p_i : e_i = x_i,$$

so dass x_1, x_2, x_3, x_4 vier algebraische Zahlen bezeichnen, deren Verhältnisse den Punkt P in Bezug auf die fünf Fundamentalpunkte bestimmen und ihn durch dreifache Wiederholung der Construction der vierten Ebene in einem Büschel von gegebenem Doppelverhältniss construiren lassen. Sie sind als tetrametrische Coordinaten des Punktes P zu bezeichnen; der Punkt E bestimmt durch seine Lage gegen die Flächen des Fundamentaltetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ die vier Maassstäbe, nach denen sie gemessen werden; wir nennen ihn den Einheitpunkt des Systems, seine Coordinaten sind gleich Eins.

Liegt P in einer Fläche $A_j A_k A_l$ des Fundamentaltetraeders, so ist eine der Coordinaten nämlich x_i gleich Null, und wenn man die p_i, e_i in Richtungen misst, welche dieser Tetraederfläche angehören, so erhält man eine entsprechende Coordinatenbestim-

meiner sind ε_i und π_i die in bestimmten Richtungen gemessenen Längen von den Ecken des Fundamentaltetraeders bis zu den Ebenen E und Π, so sind die vorher geschriebenen Doppelverhältnisse respective

$$= \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_4 : \varepsilon_4}, \quad = \frac{\pi_4 : \varepsilon_4}{\pi_1 : \varepsilon_1}, \quad = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_4 : \varepsilon_4}$$

und man kann setzen

$$\pi_i : \varepsilon_i = \xi_i,$$

so dass $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ vier algebraische Zahlen bezeichnen, deren Verhältnisse die Ebene Π in Bezug auf die fünf Fundamentalebenen bestimmen und sie durch dreifache Wiederholung der Construction des vierten Punktes in einer geraden Reihe von gegebenem Doppelverhältniss construiren lassen. Sie sind als tetrametrische Coordinaten der Ebene Π zu bezeichnen; die Ebene E bestimmt durch ihre Lage gegen die Ecken des Fundamentaltetraeders $\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_3 \mathsf{A}_4$ die vier Maassstäbe, nach denen sie gemessen werden; wir nennen sie die Einheitebene des Systems, ihre Coordinaten sind gleich Eins.

Geht Π durch eine Ecke $\mathsf{A}_j \mathsf{A}_k \mathsf{A}_l$ des Fundamentaltetraeders, so ist eine der Coordinaten nämlich ξ_i gleich Null, und wenn man die π_i, ε_i in Richtungen misst, welche der entsprechenden Gegenfläche des Tetraeders angehören, so erhält man eine ana-

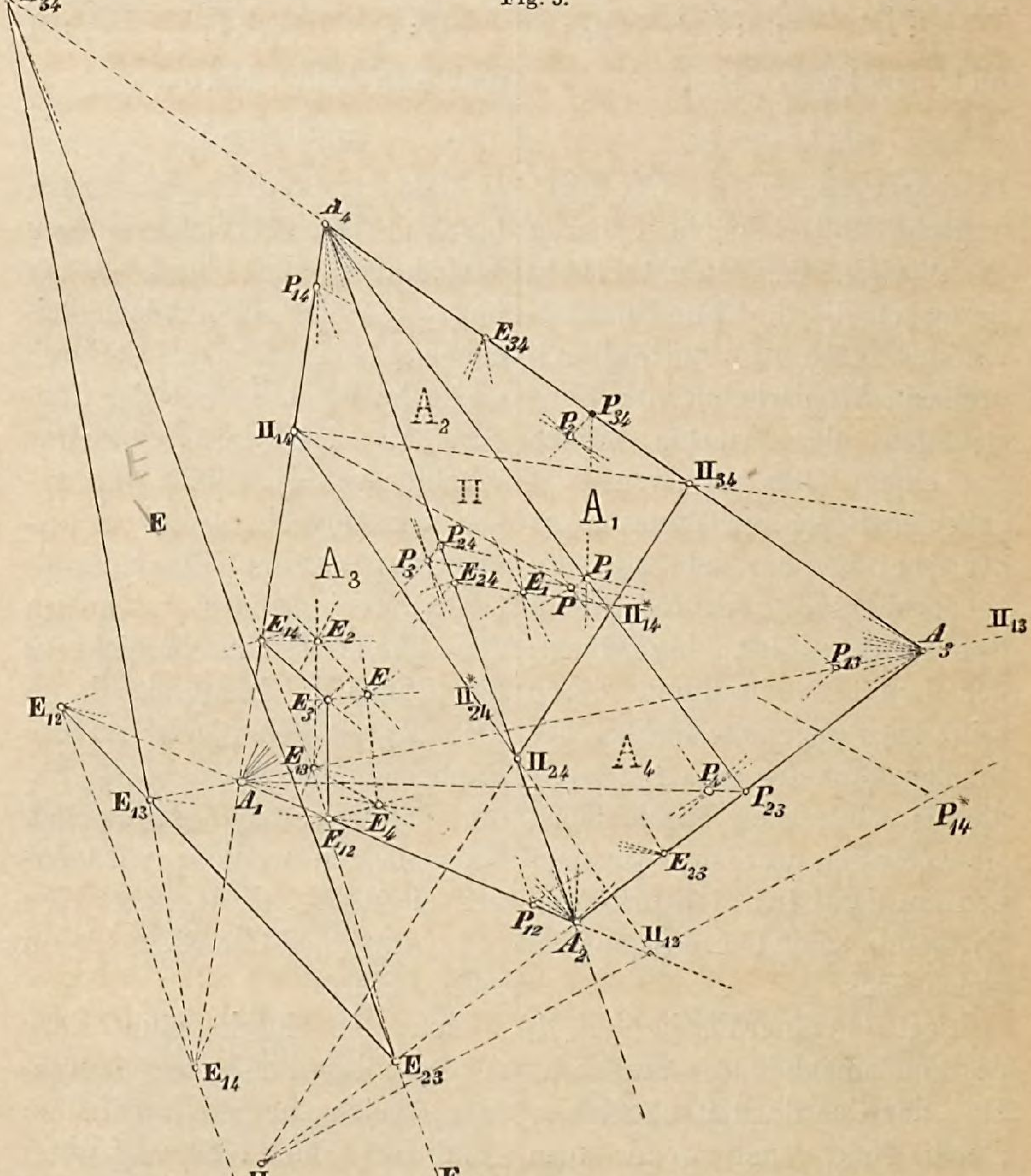
mung des ebenen Punktsystems in dieser letzteren.

Der Lage von P in der Tetraederkante $A_i A_j$ entspricht das Verschwinden von x_k und x_l und der Punkt wird durch das Verhältniss von x_i zu x_j bestimmt.

loge Coordinatenbestimmung des ebenen Strahlensystems in dieser.

Wenn Π durch eine Tetraederkante $\mathsf{A}_i \mathsf{A}_j$ geht, so verschwinden die Coordinaten ξ_k und ξ_l, und die Ebene wird durch das Verhältniss von ξ_i zu ξ_j bestimmt.

Fig. 5.



Bei einer Bewegung von P, resp. Π, etwa in der Geraden PE oder um die Gerade ΠE, ändert sich im Momente des Durchganges durch eine der Ebenen A_i resp. einen der Punkte A_i das

Zeichen der betreffenden Coordinate x_i resp. ξ_i; die Festsetzung, dass die Coordinaten von E und E gleich $+1$ sind, bestimmt somit die Zeichen der Coordinaten für jedes P und jede Π.

Denken wir (Fig. 5) die Tetraeder der A_i und der A_j in der Art identisch, dass die Ecke A_i die Ebene A_i zur Gegenfläche hat, bezeichnen wir die Schnittpunkte der Strahlen von A_i nach P respective E mit der Gegenfläche A_i durch P_i, E_i, die Schnittpunkte der Ebenen aus der Kante A_iA_j nach denselben Punkten mit der Gegenkante A_kA_l durch P_{kl}, E_{kl}, endlich die Schnittpunkte der Ebenen Π und E mit der Kante A_kA_l des Fundamentaltetraders durch Π_{kl}, E_{kl} (Fig. 5), so bestehen die Relationen

$$(A_iA_j\cdot A_kA_lEP)=(A_kA_lE_{kl}P_{kl}),$$
$$(\mathsf{A}_i\mathsf{A}_j\cdot\mathsf{A}_k\mathsf{A}_l\mathsf{E}\Pi)=(A_lA_k\mathsf{E}_{kl}\Pi_{kl}),$$

und somit zur Definition der Coordinatenverhältnisse die Gleichungen

$$\frac{x_1}{x_4}=(A_1A_4E_{14}P_{14}),\quad \frac{x_2}{x_4}=(A_2A_4E_{24}P_{24}),\quad \frac{x_3}{x_4}=(A_3A_4E_{34}P_{34});$$
$$\frac{\xi_1}{\xi_4}=(A_4A_1\mathsf{E}_{14}\Pi_{14}),\quad \frac{\xi_2}{\xi_4}=(A_4A_2\mathsf{E}_{24}\Pi_{24}),\quad \frac{\xi_3}{\xi_4}=(A_4A_3\mathsf{E}_{34}\Pi_{34}).$$

Wir bestimmen endlich die gegenseitige Lage des Einheitpunktes E und der Einheitebene E durch die Angabe der Werthe

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_4}=(A_1A_4\mathsf{E}_{14}E_{14}),\quad -\frac{\lambda_2}{\lambda_4}=(A_2A_4\mathsf{E}_{24}E_{24}),\quad \frac{\lambda_3}{\lambda_4}=(A_3A_4\mathsf{E}_{34}E_{34})$$

und erhalten dann durch Multiplication der entsprechenden Werthe

$$-\frac{\lambda_1\xi_1x_1}{\lambda_4\xi_4x_4}=(A_1A_4E_{14}P_{14})\,(A_4A_1\mathsf{E}_{14}\Pi_{14})\,(A_1A_4\mathsf{E}_{14}E_{14})=(A_1A_4\Pi_{14}P_{14}),$$
$$-\frac{\lambda_2\xi_2x_2}{\lambda_4\xi_4x_4}=(A_2A_4\Pi_{24}P_{24}),\quad -\frac{\lambda_3\xi_3x_3}{\lambda_4\xi_4x_4}=(A_3A_4\Pi_{34}P_{34}).$$

Wir werden zeigen, dass die Summe dieser drei Doppelverhältnisse immer und nur dann gleich Eins ist, wenn die Ebene Π den Punkt P enthält, so dass für die Coordinaten eines solchen Punktes x_i und einer solchen Ebene ξ_i stets die Relation besteht

$$-\frac{\lambda_1\xi_1x_1+\lambda_2\xi_2x_2+\lambda_3\xi_3x_3}{\lambda_4\xi_4x_4}=1,$$

welche ihre einfachste Form annimmt, nämlich die Form

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0,$$

wenn $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ sind, d. h. wenn der Einheitpunkt und die Einheitebene der Coordinaten x_i und ξ_i an allen

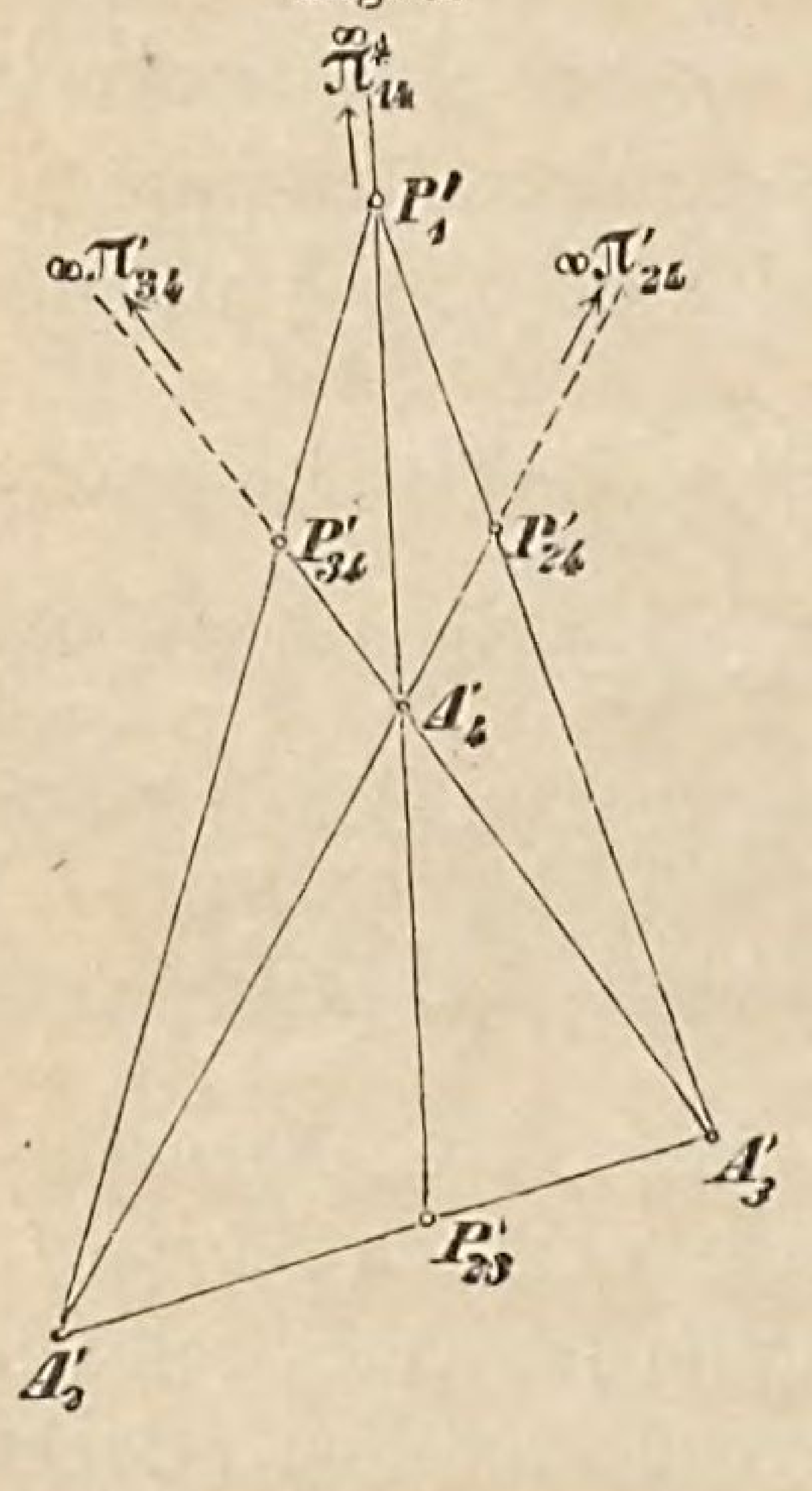
Ecken, in allen Kanten und auf allen Flächen des Tetraeders durch dasselbe harmonisch getrennt sind. Dieser Einfachheit wegen wollen wir die Einheitelemente immer so gewählt denken, wenn nicht das Gegentheil angegeben wird.

Liegt der Punkt P in der Ebene Π (Fig. 5), so ist jede der in den erhaltenen Doppelverhältnissen auftretenden Reihen auf die Ebene der beiden andern von P aus projicirt, z. B. die Reihe $A_1 A_4 \Pi_{14} P_{14}$ auf die Ebene $A_2 A_3 A_4$ der beiden letzten Reihen in $P_1 A_4 \Pi_{14}{}^* P_{23}$, wenn $\Pi_{14}{}^*$ den Schnitt von $A_4 P_1$ mit der Geraden $\Pi_{24} \Pi_{34} \Pi_{23}$ bezeichnet. Wir ermitteln dann die Summe der Doppelverhältnisse

$$(A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}),\ (A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34}),\ (P_1 A_4 \Pi_{14}{}^* P_{23}),$$

und projiciren zu diesem Zwecke die Figur der drei Reihen aus einem Punkte C auf eine Ebene, welche zur projicirenden Ebene der Geraden $\Pi_{24} \Pi_{14}{}^* \Pi_{34}$, also zu $C \Pi_{24} \Pi_{34}$ parallel ist, so dass das Bild dieser Geraden $\Pi_{24}' \Pi_{14}'^* \Pi_{34}'$ unendlich fern liegt und die vorigen Doppelverhältnisse durch die gleichwerthigen (Fig. 6)

Fig. 6.



$$(A_2' A_4' \infty P_{24}',\ A_3' A_4' \infty P_{34}'),$$
$$(P_1' A_4' \infty P_{23}')$$

ersetzt werden, für welche man ferner schreiben kann

$$(A_4', A_2', A_3' P_1'),\ (A_4', A_3', P_1' A_2'),$$
$$(A_4', P_1', A_2' A_3'),$$

wenn man durch diese Symbole die Verhältnisse bezeichnet, nach denen die Seiten des Dreiecks $A_3' P_1' A_2'$ die Strecken $A_4' A_2'$, $A_4' A_3'$, $A_4' P_1'$ respective theilen. Wenn man aber endlich diese Verhältnisse durch die Verhältnisse der entsprechenden Dreiecksflächen wie folgt ersetzt

$$\frac{\Delta A_4' A_3' P_1'}{\Delta A_2' A_3' P_1'},\ \frac{\Delta A_4' P_1' A_2'}{\Delta A_3' P_1' A_2'},\ \frac{\Delta A_4' A_2' A_3'}{\Delta P_1' A_2' A_3'},$$

so folgt aus der nothwendigen Gleichheit

$$\Delta A_4' A_3' P_1' + \Delta A_4' P_1' A_2' + \Delta A_4' A_2' A_3' = \Delta A_2' A_3' P_1',$$

dass die Summe der drei betrachteten Doppelverhältnisse die positive Einheit ist*).

Wir nennen $\xi_1 x_1 + \cdots = 0$ die Incidenzbedingung für die Ebene ξ_i und den Punkt x_i, die Bedingung ihrer vereinigten Lage oder ihres Ineinanderliegens. Sie ist die algebraische Ausprägung der Dualität zwischen Punkten und Ebenen im Raume von drei Dimensionen.

Wenn in der Gleichung

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

die ξ_i Constanten sind, so ist sie die Gleichung der durch die Coordinaten x_i bestimmten und also nach

$$\frac{\xi_k}{\xi_l} = (A_l A_k \mathrm{E}_{kl} \Pi_{kl})$$

construirbaren Ebene, d. h. die Gleichung, welche von den Coordinaten aller Punkte dieser Ebene befriedigt wird.

Sind in derselben Gleichung die x_i Constanten, so ist sie die Gleichung des durch die Coordinaten x_i bestimmten Punktes, welchen man nach $\frac{x_k}{x_l} = (A_k A_l E_{kl} P_{kl})$ construirt; die Coordinaten aller durch diesen Punkt gehenden Ebenen genügen ihr.

Man sieht leicht, dass wie in Art. 23 eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in den x_i eine Fläche n^{ter} Ordnung ausdrückt, dass zwei solche Gleichungen von den Graden n_1 und n_2 wie in Art. 24 eine Curve von der Ordnung $n_1 n_2$, und drei solche von den Graden n_1, n_2, n_3 eine Gruppe von $n_1 n_2 n_3$ Punkten bezeichnen. Aber es tritt hinzu, dass eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in den ξ_i eine Fläche n^{ter} Classe d. h. eine Fläche ausdrückt, von deren Tangentialebenen je n durch eine gegebene Gerade gehen; dass zwei solche Gleichungen die Gesammtheit der

*) Man zeigt in analoger Weise (mit C' unendlich fern) aber einfacher, dass

$$(ABCD) + (ACBD) = 1;$$

überdies so: Es ist

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} + \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \frac{(AB + BC)(BC + CD) - AB \cdot CD}{BC \cdot AD} = \frac{BC(AB + BC + CD)}{BC \cdot AD} = 1.$$

gemeinsamen Tangentialebenen der bezüglichen beiden Flächen liefern (vergl. Art. 135) und drei die Gruppe der gemeinsamen Tangentialebenen an Zahl $n_1 n_2 n_3$ der bezüglichen drei Flächen.

53. Durch besondere Voraussetzungen über die gegenseitige Lage der Fundamentalemente können diese allgemeinen Coordinaten specialisirt werden.

Ist E der Mittelpunkt einer dem Tetraeder der A_i eingeschriebenen Kugel, so sind die vier Einheiten gleich, nach denen die x_i gemessen werden, wenn man sie als Längenzahlen der Entfernungen von P von den Fundamentalebenen betrachtet, und dieselben können daher als diese Längenzahlen selbst im gewöhnlichen Sinne bezeichnet werden (Vierebenen-Coordinaten). Der Uebergang vom Einheitpunkte E mit den Abständen e_i zu diesem Punkte der gleichen Abstände als Einheitpunkt entspricht der Multiplication der Coordinaten x_i mit der Längenzahl des respectiven e_i.

Ist E der Schwerpunkt des Tetraeders, so sind jene vier Einheiten die Viertel der entsprechenden Tetraederhöhen und die Coordinaten x_i die Verhältnisse der Entfernungen von P von den Fundamentalebenen zu den entsprechenden Höhen des Tetraeders,[5]) oder die Verhältnisse der Volumina der Tetraeder $PA_jA_kA_l$ und $A_iA_jA_kA_l$ (Volumen-Coordinaten). Zugleich ist dann bei harmonischer Trennung die Einheitebene E unendlich fern und man erhält $\frac{\xi_i}{\xi_k} = \frac{A_i \Pi_{ik}}{A_k \Pi_{ik}}$, d. h. die Coordinaten der Ebene ihren Abständen von den Fundamentalpunkten proportional (Vierpunkt-Coordinaten).

Denkt man endlich das Fundamentaltetraeder als regulär, den Einheitpunkt als seinen Mittelpunkt, die Einheitebene also unendlich fern, so erhält man allgemeine Coordinaten, die als regulär bezeichnet werden mögen und zugleich Vierpunkt-, Vierebenen- und Volumen-Coordinaten sind.

Wenn wir voraussetzen, dass eine Fläche des Fundamentaltetraeders z. B. $A_1A_2A_3$ oder A_4 die unendlich ferne Ebene des Raumes sei, so bilden die Punkte P_1, P_2, P_3 und E_1, E_2, E_3 die Parallelprojectionen der Punkte P und E nach den Richtungen A_1, A_2, A_3 respective auf die Ebenen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$, und man hat wegen $(A_4 \infty \mathsf{E}_{4i} E_{4i}) = -1$

$$A_4\mathsf{E}_{41} = -A_4E_{41},\quad A_4\mathsf{E}_{42} = -A_4E_{42},\quad A_4\mathsf{E}_{43} = -A_4E_{43};$$

also für die bezüglichen Coordinaten x_i und ξ_i

$$x_4 = p_4 : e_4 = 1, \quad \frac{x_1}{x_4} = \frac{A_4 P_{41}}{A_4 E_{41}} = x_1,$$

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{A_4 P_{42}}{A_4 E_{42}} = x_2, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{A_4 P_{43}}{A_4 E_{43}} = x_3$$

und

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = -\frac{1}{\frac{A_4 \Pi_{41}}{A_4 E_{41}}}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_4} = -\frac{1}{\frac{A_4 \Pi_{42}}{A_4 E_{42}}}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_4} = -\frac{1}{\frac{A_4 \Pi_{43}}{A_4 E_{43}}},$$

vgl. Fig. 2, S. 2, wo nur O, A, B, C, D, E, F durch A_4, P_1, P_2, P_3, P_{41}, P_{42}, P_{43} respective zu ersetzen und die unendlich fernen Punkte auf x, y, z durch A_1, A_2, A_3 zu bezeichnen sind.

Macht man endlich $A_4 E_{41} = A_4 E_{42} = A_4 E_{43} = 1$, so sind die x_1, x_2, x_3 die gewöhnlichen Cartesischen Punkt-Coordinaten x, y, z, und die $\frac{\xi_1}{\xi_4}, \frac{\xi_2}{\xi_4}, \frac{\xi_3}{\xi_4}$ die entsprechenden (Plücker'schen) Ebenen-Coordinaten ξ, η, ζ. Mit A_1 als Anfangspunkt und A_1 als unendlich fern wird $x_1 = 1$ und x_2, x_3, x_4 können als die Cartesischen Coordinaten x, y, z genommen werden, sowie die Verhältnisse von ξ_2, ξ_3, ξ_4 zu ξ_1 als die Plücker'schen Coordinaten ξ, η, ζ. Wir behalten uns die eine oder andere Schreibweise vor. Die Gleichung $\xi_1 x_1 + \cdots = 0$ geht in $\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$ über, d. h. in der Gleichung der Ebene sind die Verhältnisse der Coefficienten zum absoluten Gliede ihre Plücker'schen Coordinaten und in der Gleichung des Punktes dieselben Verhältnisse seine Cartesischen Coordinaten.

Der Uebergang von den allgemeinen projectivischen Raumcoordinaten zu den elementaren Coordinatensystemen von Cartesius und Plücker entspricht einer Reliefbildung, bei welcher die eine Fläche des Fundamentaltetraeders zur Gegenebene gewählt wird.[6]) Damit ist auch die Bedeutung der Substitution $x : w$, $y : w$, $z : w$ für x, y, z geometrisch erklärt.

Wenn aber bei dieser Umformung nur eine Ecke des Fundamentaltetraeders respective nur eine Kante desselben als in der Gegenebene liegend angenommen wird, so entstehen zwei Coordinatenbestimmungen, die wir als prismatische Coordinaten und als Keilcoordinaten respective bezeichnen wollen, weil im ersten Falle an Stelle des Fundamentaltetraeders ein dreiseitiges Prisma — sagen wir von der Basis $A_1 A_2 A_3$ und der Richtung A_4 seiner parallelen Kanten —, im zweiten Falle die

keilförmige Verbindung von zwei ebenen Parallelstreifen über derselben Basis, $A_1 A_2$ etwa, in zwei verschiedenen Ebenen und den Seitenrichtungen A_3 und A_4 tritt.

Man erhält im ersten Falle für die Verhältnisse der Punktcoordinaten

$$\frac{x_1}{x_4} = (A_1 A_4 E_{14} P_{14}) = \frac{A_1 E_{14}}{A_1 P_{14}};\ \frac{x_2}{x_4} = \frac{A_2 E_{24}}{A_2 P_{24}};\ \frac{x_3}{x_4} = \frac{A_3 E_{34}}{A_3 P_{34}}$$

und somit für $A_1 E_{14} = A_2 E_{24} = A_3 E_{34} = -1$

$$\frac{x_1}{x_4} = -\frac{1}{A_1 P_{14}},\ \frac{x_2}{x_4} = -\frac{1}{A_2 P_{24}},\ \frac{x_3}{x_4} = -\frac{1}{A_3 P_{34}};$$

oder die negativen Reciproken der Abschnitte, welche die von P durch $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ respective gelegten Ebenen auf den Gegenkanten $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$ respective machen.

Und für die Ebenencoordinaten ξ_i wegen $\xi_4 = 1$

$$\xi_1 = (A_4 A_1 \mathsf{E}_{14} \Pi_{14}) = \frac{A_1 \Pi_{14}}{A_1 \mathsf{E}_{14}},\ \xi_2 = \frac{A_2 P_{24}}{A_2 \mathsf{E}_{24}},\ \xi_3 = \frac{A_3 P_{34}}{A_3 \mathsf{E}_{34}}$$

d. h. mit harmonischer Trennung von E und E oder $A_1 \mathsf{E}_{14} = A_2 \mathsf{E}_{24} = A_3 E_{34} = 1$

$$\xi_1 = A_1 \Pi_{14},\ \xi_2 = A_2 \Pi_{24},\ \xi_3 = A_3 \Pi_{34}$$

die Ebenencoordinaten als die von der Ebene in den parallelen Fundamentalgeraden gemachten Abschnitte. Das System entspricht dem der Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten nach dem Princip der Dualität.

Für die Keilcoordinaten, die nach dem Dualitätsprincip sich selbst entsprechen müssen, hat man

$$\frac{x_2}{x_1} = (A_2 A_1 E_{12} P_{12});\ \frac{x_3}{x_1} = (A_3 A_1 E_{13} P_{13}) = \frac{A_1 P_{13}}{A_1 E_{13}};\ \frac{x_4}{x_1} = \frac{A_1 P_{14}}{A_1 E_{14}}$$

oder mit $A_1 E_{13} = A_1 E_{14} = A_2 E_{23} = A_2 E_{34} = A_1 E_{12} = -A_2 E_{12} = 1$

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{A_1 P_{12}}{A_2 P_{12}},\ \frac{x_3}{x_1} = A_1 P_{13},\ \frac{x_4}{x_1} = A_1 P_{14}$$

zur einfachen Construction der Punkte aus ihren Coordinaten.

Für die Ebene ξ_i aber ist

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (A_1 A_2 \mathsf{E}_{12} \Pi_{12}),\ \frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 A_3 \mathsf{E}_{13} \Pi_{13}) = \frac{A_1 \mathsf{E}_{13}}{A_1 \Pi_{13}},\ \frac{\xi_4}{\xi_1} = \frac{A_1 \mathsf{E}_{14}}{A_1 \Pi_{14}}$$

und bei harmonischer Trennung von E und E also

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{A_2 \Pi_{12}}{A_1 \Pi_{12}},\ \frac{\xi_3}{\xi_1} = -\frac{1}{A_1 \Pi_{13}},\ \frac{\xi_4}{\xi_1} = -\frac{1}{A_1 \Pi_{14}}.$$

B. 1. Drei Punkte von den Coordinaten y_i, z_i, w_i bestimmen eine Ebene von der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \end{vmatrix} = 0.$$

(Vergl. Art. 30.)

Drei Ebenen von den Coordinaten η_i, ζ_i, ω_i bestimmen einen Punkt von der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4 \end{vmatrix} = 0.$$

(Vergl. Art. 33.)

Die Unterdeterminanten oder Differentiale nach den Elementen der ersten Zeile sind die Coordinaten der Verbindungsebene resp. des Schnittpunktes.

Da diese Gleichungen auch als die Resultate der Elimination der k, l, m, n oder $\varkappa$, λ, μ, ν zwischen den Systemen

$$kx_i + ly_i + mz_i + nw_i = 0, \quad \varkappa\xi_i + \lambda\eta_i + \mu\zeta_i + \nu\omega_i = 0 \; (i = 1, 2, 3, 4)$$

betrachtet werden können, so hat man für die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Ebene y_i, z_i, w_i respective die Coordinaten einer Ebene durch den Punkt η_i, ζ_i, ω_i die Ausdrücke

$$x_i = -\frac{ly_i + mz_i + nw_i}{k} \text{ (vergl. Art. 9)}, \quad \xi_i = -\frac{\lambda\eta_i + \mu\zeta_i + \nu\omega_i}{\varkappa},$$

deren Nenner bei der Substitution in Gleichungen dann vernachlässigt werden können, wenn dieselben in den x_i respective ξ_i homogen sind.

B. 2. Die Ebenen, welche zwei Punkte y_i, z_i mit den Fundamentalpunkten A_i verbinden, und die geraden Linien, in welchen sie die Gegenebenen A_i durchschneiden, sind durch

$$x_j(y_k z_l - y_l z_k) + x_k(y_l z_j - y_j z_l) + x_l(y_j z_k - y_k z_j) = 0$$

dargestellt; analog die Punkte, welche die Schnittlinie zweier Ebenen η_i, ζ_i mit den Fundamentalebenen A_i gemein hat, durch dieselben Gleichungen in den ξ, η, ζ.

Da diese Gleichungen als die Eliminationsresultate der Systeme

$$lx_j + my_j + nz_j = 0, \; lx_k + my_k + nz_k = 0, \; lx_l + my_l + nz_l = 0, \text{ etc.}$$

angesehen werden können, so erhält man für die Coordinaten x_i eines Punktes in der Verbindungslinie der beiden Punkte y_i, z_i, respective für die Coordinaten ξ_i einer Ebene durch die Schnittlinie von zwei Ebenen η_i, ζ_i die Parameterausdrücke

$$x_i = -\frac{my_i + nz_i}{l} \text{ (vergl. Art. 8)}, \quad \xi_i = -\frac{\mu\eta_i + \nu\zeta_i}{\lambda}.$$

Ihre Substitution in die Gleichung der Ebene von den Coordinaten ξ_i (respective des Punktes von den Coordinaten x_i) giebt für den Parameter des Schnittpunktes der Ebene mit der Geraden etc.

$$m:n = -(\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4):(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4);\ \text{etc.}$$

B. 3. Dieselben Gleichungen führen zur allgemeinen geometrischen Interpretation der Zahlen m und n; man erhält z. B. aus den zwei ersten

$$l x_1 + m y_1 + n z_1 = 0,\quad l x_2 + m y_2 + n z_2 = 0$$

durch Elimination von l

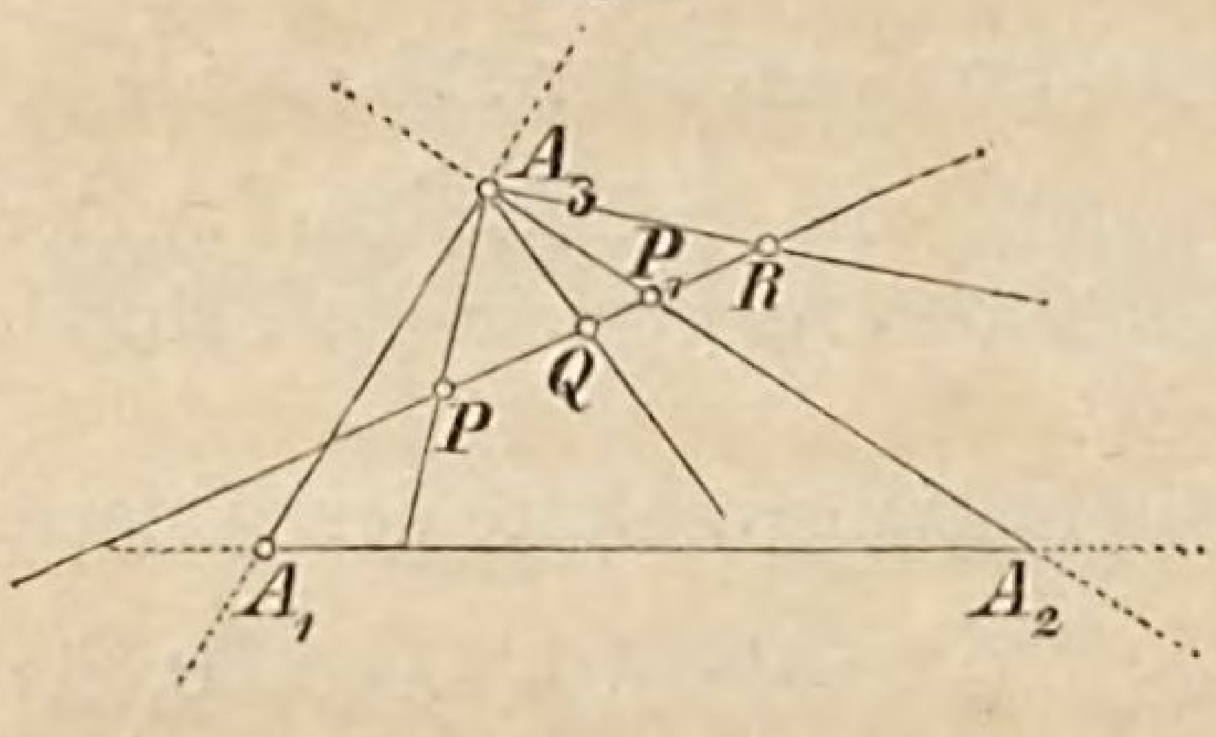
$$\frac{m}{n} = -\frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}$$

und analoge Werthe aus den übrigen Paaren. Die Umformung dieses Ausdrucks führt aber zur geometrischen Interpretation; es ist, wenn wir die Doppelverhältnisse in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ messen und dafür P_4 und E_4 durch P, E bezeichnen und wenn Q, R ebenso den Punkten von den Coordinaten y_i, z_i entsprechen:

$$\frac{m}{n} = -\frac{x_2 z_1 \left(1 - \frac{x_1}{x_2} : \frac{z_1}{z_2}\right)}{x_2 y_1 \left(1 - \frac{x_1}{x_2} : \frac{y_1}{y_2}\right)} = -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{1 - (A_3 \cdot A_1 A_2 E P):(A_3 \cdot A_1 A_2 E R)}{1 - (A_3 \cdot A_1 A_2 E P):(A_3 \cdot A_1 A_2 E Q)}$$

$$= -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{1 - (A_3\ A_1 A_2 R P)}{1 - (A_3 \cdot A_1 A_2 Q P)} = -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{(A_3\ A_1 R A_2 P)}{(A_3 \cdot A_1 Q A_2 P)}\ \text{(vgl. Anm.* S. 55).}$$

Fig. 7.



Also

$$\frac{m}{n} = -\frac{z_1}{y_1}(P_1 P Q R) = -\frac{RP}{PQ},$$

weil $z_1 : y_1 = P_1 R : P_1 Q$ ist, für P_1 als den Schnittpunkt der Fundamentallinie $A_2 A_3$ mit der Geraden QR in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 7). In derselben Weise findet man

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\xi_1}{\eta_1}(A_1 P_3 Q_3 R_3) = -\frac{\sin pr}{\sin pq}.$$

Sind dann aber ferner P_1, P_2, P_3, P_4 vier Punkte in der geraden Verbindungslinie der Punkte Q und R, denen respective die Werthe $m_1 : n_1$, $m_2 : n_2$, $m_3 : n_3$, $m_4 : n_4$ entsprechen, so erhält

man für das Doppelverhältniss derselben folgende einfache Entwicklung. Man hat

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_3 Q P_1 P_2) : (P_4 Q P_1 P_2) = \frac{(R P_1 Q P_3)}{(R P_2 Q P_3)} : \frac{(R P_1 Q P_4)}{(R P_2 Q P_4)}$$

$$= \frac{(R Q P_1 P_3) - 1}{(R Q P_2 P_3) - 1} : \frac{(R Q P_1 P_4) - 1}{(R Q P_2 P_4) - 1} = \frac{\frac{(A_2 P_1 Q R)}{(A_2 P_3 Q R)} - 1}{\frac{(A_2 P_2 Q R)}{(A_2 P_3 Q R)} - 1} : \frac{\frac{(A_2 P_1 Q R)}{(A_2 P_4 Q R)} - 1}{\frac{(A_2 P_2 Q R)}{(A_2 P_4 Q R)} - 1}$$

$$= \frac{\frac{m_1}{n_1} : \frac{m_3}{n_3} - 1}{\frac{m_2}{n_2} : \frac{m_3}{n_3} - 1} : \frac{\frac{m_1}{n_1} : \frac{m_4}{n_4} - 1}{\frac{m_2}{n_2} : \frac{m_4}{n_4} - 1} = \frac{m_1 n_3 - m_3 n_1}{m_2 n_3 - m_3 n_2} : \frac{m_1 n_4 - m_4 n_1}{m_2 n_4 - m_4 n_2},$$

oder für $n_i : m_i = k_i$ (vergl. „Kegelschnitte", Art. 82 f.)

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} : \frac{k_4 - k_1}{k_4 - k_2} = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}.$$

Und analog für vier Ebenen durch eine Gerade mit den Theilverhältnissen $\nu_i : \mu_i = \varkappa_i$.

B. 4. Unter der speciellen Voraussetzung, dass P_1 mit Q, P_2 mit R zusammenfallen, ist wegen $n_1 = 0$, $m_2 = 0$

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (Q R P_3 P_4) = \frac{n_3}{-m_3} : \frac{n_4}{-m_4} = \frac{k_3}{k_4}.$$

Sollen P_3, P_4 mit Q, R eine harmonische Gruppe bilden, so muss $k_3 = -k_4$ sein, und man hat also für die Coordinaten x_i solcher Punkte, die mit y_i und z_i eine harmonische Gruppe bilden, die Werthe $(y_i \pm k z_i)$.

B. 5. Wenn zwei Reihen von Punkten projectivisch, also von gleichem Doppelverhältniss sein sollen, d. h. wenn $(P_1 P_2 P_3 P) = (P_1' P_2' P_3' P')$ ist, und wir durch k_i, k_i' die Parameter der einzelnen Punkte in Bezug auf beliebige Fixpunkte ihrer Reihen ausdrücken, so ist nach Beisp. 3 (vergl. „Kegelschnitte", Art. 92)

$$\frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k}{k_2 - k} = \frac{k_1' - k_3'}{k_2' - k_3'} : \frac{k_1' - k'}{k_2' - k'};$$

wir betrachten P_1, P_2, P_3 und folglich auch P_1', P_2', P_3' als feste Punkte, die drei gegebenen Paare der projectivischen Reihen, und erhalten als Bedingung der Projectivität eine Gleichung von der Form

$$akk' - bk + ck' - d = 0$$

zwischen den Parametern der beweglichen entsprechenden Punkte P, P'.

Substituirt man für k, k' die durch das Vorige bestimmten Werthe von der Form

$$k = -\frac{\frac{x_2}{x_1} y_1 - y_2}{\frac{x_2}{x_1} z_1 - z_2}, \quad k' = -\frac{\frac{x_2'}{x_1'} v_1' - v_2'}{\frac{x_2'}{x_1'} w_1' - w_2'},$$

so entsteht eine Gleichung von derselben Form, die wir schreiben wollen

$$a_{12} \frac{x_2 x_2'}{x_1 x_1'} - a_{22} \frac{x_2}{x_1} + a_{11} \frac{x_2'}{x_1'} - a_{21} = 0,$$

und aus welcher man für das Verhältniss der Coordinaten des Punktes der gestrichenen Reihe, der einem gegebenen Punkte der ungestrichenen Reihe entspricht, erhält

$$\frac{x_2'}{x_1'} = \frac{a_{21} + a_{22} \frac{x_2}{x_1}}{a_{11} + a_{12} \frac{x_2}{x_1}} = \frac{a_{21} x_1 + a_{22} x_2}{a_{11} x_1 + a_{12} x_2}.$$

Soll eine Beziehung dieser Art im ganzen Raume stattfinden, so muss eine Abhängigkeit von der Form

$$\frac{x_i'}{x_1'} = \frac{a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4}{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4}$$

bestehen, aus welcher für alle entsprechenden geraden Reihen die projectivische Beziehung wieder hervorgeht, oder man muss haben

$$\mu x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4.$$

(Vergl. unten in Kap. VIII die Lehre von der Collineation.)

54. Wir können die allgemeinen Formeln für die Transformation von Vierebenen-Coordinaten x, y, z, w (Art. 50) aufstellen, indem wir die Lehre vom Theilpunkt in Art. 9 um einen Schritt weiter führen.

Wenn in einem Tetraeder von den Ecken B_1, B_2, B_3, B_4 auf der Kante $B_3 B_4$ der Punkt P_{34} vom Theilverhältniss $n : m$ mit B_2 durch eine Gerade verbunden und in ihr der Punkt P_1 vom Theilverhältniss $l : (m + n)$ genommen wird, und endlich in der Geraden $P_1 B_1$ der Punkt P vom Theilverhältniss $k : (l + m + n)$, so ist der Abstand x dieses Punktes P von irgend einer Ebene, deren Abstände von B_1, B_2, B_3, B_4 respective x_1, x_2, x_3, x_4 sind, ausgedrückt durch

$$x = \frac{k x_1 + l x_2 + m x_3 + n x_4}{k + l + m + n}.$$

Da nun $k:(k+l+m+n)$ das Verhältniss der Volumina der aus P und B_1 über der Dreiecksfläche $B_2B_3B_4$ gebildeten Pyramiden ist, oder das Verhältniss der Abstände der Punkte P und B_1 von der Ebene $B_2B_3B_4$ — mit analogen Werthen für die Verhältnisse von l, m, n zu $(k+l+m+n)$ —, so wird für $B_1B_2B_3B_4$ als das Tetraeder der Fundamentalpunkte neuer Vierebenen-Coordinaten x', y', z', w' und für h_x', h_y', h_z', h_w' als seine zugehörigen Höhen der Ausdruck von x zu

$$x = \frac{x'}{h_x'}x_1 + \frac{y'}{h_y'}x_2 + \frac{z'}{h_z'}x_3 + \frac{w'}{h_w'}x_4.$$

Und man findet in gleicher Weise für die Coordinaten x, y, z, w von P die Ausdrücke

$$y = \frac{x'}{h_x'}y_1 + \frac{y'}{h_y'}y_2 + \frac{z'}{h_z'}y_3 + \frac{w'}{h_w'}y_4, \text{ etc.},$$

vier Gleichungen, durch die man von den alten Coordinaten x, y, z, w zu den neuen x', y', z', w' übergeht.

In derselben Weise erhält man auch die Gleichungen für den umgekehrten Uebergang von den neuen zu den alten Coordinaten, wenn man mit x_1', x_2', x_3', x_4'; y_1', y_2', y_3', y_4'; etc. die Abstände der alten Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 von den neuen Fundamentalebenen und mit h_x, etc. die zugehörigen Höhen des alten Fundamentaltetraeders bezeichnet, in der Form

$$x' = \frac{x}{h_x}x_1' + \frac{y}{h_y}x_2' + \frac{z}{h_z}x_3' + \frac{w}{h_w}x_4', \text{ etc.}$$

(Vergl. die Ableitung der Transformationsgleichungen für den allgemeinsten Fall in Art. 128 unten.)

Wir bemerken noch, dass für F_x, F_y, F_z, F_w als die Inhaltzahlen der Flächen des Fundamentaltetraeders der x, y, z, w mit den Höhen $h_x, \cdots$ und für V als sein Volumen die Relationen

$$F_xh_x = F_yh_y = F_zh_z = F_wh_w = 3V$$

bestehen, sowie dass für einen Punkt von den Coordinaten x, y, z, w die Summe der bezüglichen Pyramiden

$$xF_x + yF_y + zF_z + wF_w = 3V$$

sein muss; dass also auch für die Vierebenen-Coordinaten eines Punktes stets

$$\frac{x}{h_x} + \frac{y}{h_y} + \frac{z}{h_z} + \frac{w}{h_w} = 1$$

sein muss. (Vergl. „Kegelschnitte", Art. 67.)

B. Das Volumen eines Tetraeders soll durch die homogenen Coordinaten seiner Ecken ausgedrückt werden.

Wenn wir die in Art. 34 als Ausdruck für das sechsfache Volumen W gefundene Determinante

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \\ x'''', & y'''', & z'''', & 1 \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 0 \\ \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma', & 0 \\ \cos\alpha'', & \cos\beta'', & \cos\gamma'', & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

multipliciren, der Determinante aus der Note des Art. 31 und zugleich der Determinante der Transformation (G) des Art. 18, so erhalten wir als Product das sechsfache Volumen in die Grösse, die wir in Art. 38 als den Sinus der Ecke (XYZ) bezeichnet sahen, nämlich

$$\begin{vmatrix} X', & Y', & Z', & 1 \\ X'', & Y'', & Z'', & 1 \\ X''', & Y''', & Z''', & 1 \\ X'''', & Y'''', & Z'''', & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun sind diese Coordinaten längs der Axen gemessen, und wir brauchen ihren Ausdruck mittelst der Normalen zu den Coordinatenebenen

$$x = X \sin p, \quad y = Y \sin q, \quad z = Z \sin r$$

für p, q, r als die Winkel, welche die Axen X, Y, Z mit den Ebenen YZ, ZX, XY respective bilden; wir erhalten somit

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \\ x'''', & y'''', & z'''', & 1 \end{vmatrix} = 6\, W \sin p \sin q \sin r \sin(XYZ)$$

und somit wegen der für jeden Punkt gültigen Relation

$$\frac{x}{h_x} + \frac{y}{h_y} + \frac{z}{h_z} + \frac{w}{h_w} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & w' \\ x'', & y'', & z'', & w'' \\ x''', & y''', & z''', & w''' \\ x'''', & y'''', & z'''', & w'''' \end{vmatrix} = 6\, W h_w \sin p \sin q \sin r \sin(XYZ).$$

Indem wir anmerken, dass die Determinante sich für das Fundamentaltetraeder auf ihr erstes Glied als Produkt der vier Höhen reducirt oder dass

$$h_x h_y h_z h_w = 6 V h_w \sin p \sin q \sin r \sin (XYZ)$$

ist, erhalten wir die andere Form

$$\begin{vmatrix} x' , & y' , & z' , & w' \\ x'' , & y'' , & z'' , & w'' \\ x''' , & y''' , & z''' , & w''' \\ x'''' , & y'''' , & z'''' , & w'''' \end{vmatrix} : h_x h_y h_z h_w = W : V.$$

55. Die gerade Linie ist das zu sich selbst duale Element des Raumes, als Träger von unendlich vielen Punkten und zugleich von unendlich vielen Ebenen; durch zwei ihrer Punkte ebenso bestimmt wie durch zwei ihrer Ebenen. Denken wir die Verbindungslinie von zwei Punkten y, z identisch mit der Schnittlinie von zwei Ebenen η, ζ, so gelten gleichzeitig die vier Gleichungen

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 = 0,$$
$$\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 + \eta_4 z_4 = 0,$$
$$\zeta_1 y_1 + \zeta_2 y_2 + \zeta_3 y_3 + \zeta_4 y_4 = 0,$$
$$\zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \zeta_3 z_3 + \zeta_4 z_4 = 0.$$

Die successive Elimination von $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ zwischen den beiden ersten Gleichungen dieser Gruppe giebt das System

$$\begin{aligned} &(y_1 z_2 - y_2 z_1)\eta_2 - (y_3 z_1 - y_1 z_3)\eta_3 + (y_1 z_4 - y_4 z_1)\eta_4 = 0, \\ -(y_1 z_2 - y_2 z_1)\eta_1 \qquad &+ (y_2 z_3 - y_3 z_2)\eta_3 + (y_2 z_4 - y_4 z_2)\eta_4 = 0, \\ (y_3 z_1 - y_1 z_3)\eta_1 - (y_2 z_3 - y_3 z_2)\eta_2 \qquad &+ (y_3 z_4 - y_4 z_3)\eta_4 = 0, \\ -(y_1 z_4 - y_4 z_1)\eta_1 - (y_2 z_4 - y_4 z_2)\eta_2 - (y_3 z_4 - y_4 z_3)\eta_3 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Dasselbe System, nur mit Ersetzung der η durch die ζ, giebt die successive Elimination der ζ_i zwichen den beiden letzten Gleichungen der obigen Gruppe.

Eliminirt man dagegen nach einander y_1, y_2, y_3, y_4 zwischen der ersten und dritten oder der zweiten und vierten der vier ursprünglichen Gleichungen, so erhält man das System

$$\begin{aligned} &(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1) y_2 - (\eta_3 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_3) y_3 + (\eta_1 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_1) y_4 = 0, \\ -(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1) y_1 \qquad &+ (\eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2) y_3 + (\eta_2 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_2) y_4 = 0, \\ (\eta_3 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_3) y_1 - (\eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2) y_2 \qquad &+ (\eta_3 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_3) y_4 = 0, \\ -(\eta_1 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_1) y_1 - (\eta_2 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_2) y_2 - (\eta_3 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_3) y_3 \qquad &= 0, \end{aligned}$$

und ein ihm gleiches mit Ersetzung der y durch die z aus der Elimination der z zwischen der zweiten und vierten von jenen Gleichungen.

Mit den Abkürzungen

$$p_{ik} \equiv y_i z_k - y_k z_i, \quad \pi_{ik} \equiv \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$$

schreiben wir diese Systeme, wie folgt — die mit den ζ und z statt der η und y geschriebenen lassen wir weg —

$$1) \quad \begin{array}{llll} p_{12}\eta_2 - p_{31}\eta_3 + p_{14}\eta_4 = 0, & & \pi_{12}y_2 - \pi_{31}y_3 + \pi_{14}y_4 = 0, \\ -p_{12}\eta_1 + p_{23}\eta_3 + p_{24}\eta_4 = 0, & & -\pi_{12}y_1 + \pi_{23}y_3 + \pi_{24}y_4 = 0, \\ p_{31}\eta_1 - p_{23}\eta_2 + p_{34}\eta_4 = 0, & & \pi_{31}y_1 - \pi_{23}y_2 + \pi_{34}y_4 = 0, \\ -p_{14}\eta_1 - p_{24}\eta_2 - p_{34}\eta_3 = 0; & & -\pi_{14}y_1 - \pi_{24}y_2 - \pi_{34}y_3 = 0. \end{array}$$

Eliminirt man zwischen den Gleichungen der ersten Gruppe in η und in ζ die p_{ik} successive oder zwischen den Gleichungen der zweiten Gruppe in y und in z die π_{ik}, so erhält man stets je eine der in folgender Kette vereinigten Proportionalitäten

$$2) \quad p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \pi_{34} : \pi_{14} : \pi_{24} : \pi_{23} : \pi_{31} : \pi_{12};$$

z. B. durch die Elimination von p_{12} zwischen den beiden Formen in η_i und in ζ_i der ersten Gleichung links

$$-p_{31}\pi_{23} + p_{14}\pi_{24} = 0 \text{ oder } p_{31} : p_{14} = \pi_{24} : \pi_{23}.$$

Diese Proportionalität der p_{ik} und π_{lm} wird auch nicht gestört, wenn die zur Bestimmung der Geraden benutzten Punkte in ihrer Reihe verlegt oder wenn die zur Bestimmung derselben benutzten Ebenen in ihrem Büschel gedreht werden; denn eine solche Veränderung wird nach Art. 53, 2. durch die Substitution von

$$m_1 y_i + n_1 z_i, \quad m_2 y_i + n_2 z_i \text{ für } y_i \text{ und } z_i$$

und respective von

$$\mu_1 \eta_i + \nu_1 \zeta_i, \quad \mu_2 \eta_i + \nu_2 \zeta_i \text{ für } \eta_i \text{ und } \zeta_i$$

ausgedrückt, und man erhält somit

$$\begin{aligned} p_{ik} &= (m_1 y_i + n_1 z_i)(m_2 y_k + n_2 z_k) - (m_1 y_k + n_1 z_k)(m_2 y_i + n_2 z_i) \\ &= (m_1 n_2 - m_2 n_1)(y_i z_k - y_k z_i); \end{aligned}$$

ebenso auch

$$\pi_{ik} = (\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1)(\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i);$$

d. h. die p_{ik} und π_{ik} ändern sich nur durch Hinzutreten eines constanten, nämlich aus den Coefficienten der Substitution gebildeten Factors, der Substitutionsdeterminante $\begin{vmatrix} m_1, & n_1 \\ m_2, & n_2 \end{vmatrix}$ gleich $(m_1 n_2 - m_2 n_1)$, oder ihre Verhältnisse ändern sich nicht.

Eliminirt man aber zwischen den vier Gleichungen des ersten Systems 1) die η und zwischen denen des zweiten die y, so erhält man als zwischen den p_{ik} respective π_{ik} bestehende Relationen

$$\begin{vmatrix} 0, & p_{12}, & -p_{31}, & p_{14} \\ -p_{12}, & 0, & p_{23}, & p_{24} \\ p_{31}, & -p_{23}, & 0, & p_{34} \\ -p_{14}, & -p_{24}, & -p_{34}, & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0, & \pi_{12}, & -\pi_{31}, & \pi_{14} \\ -\pi_{12}, & 0, & \pi_{23}, & \pi_{24} \\ \pi_{31}, & -\pi_{23}, & 0, & p_{34} \\ -\pi_{14}, & -\pi_{24}, & -\pi_{34}, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder durch Entwickelung die Quadrate von

3) $$p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0, \quad \pi_{12}\pi_{34} + \pi_{23}\pi_{14} + \pi_{31}\pi_{24} = 0; \text{ oder } R = 0.$$

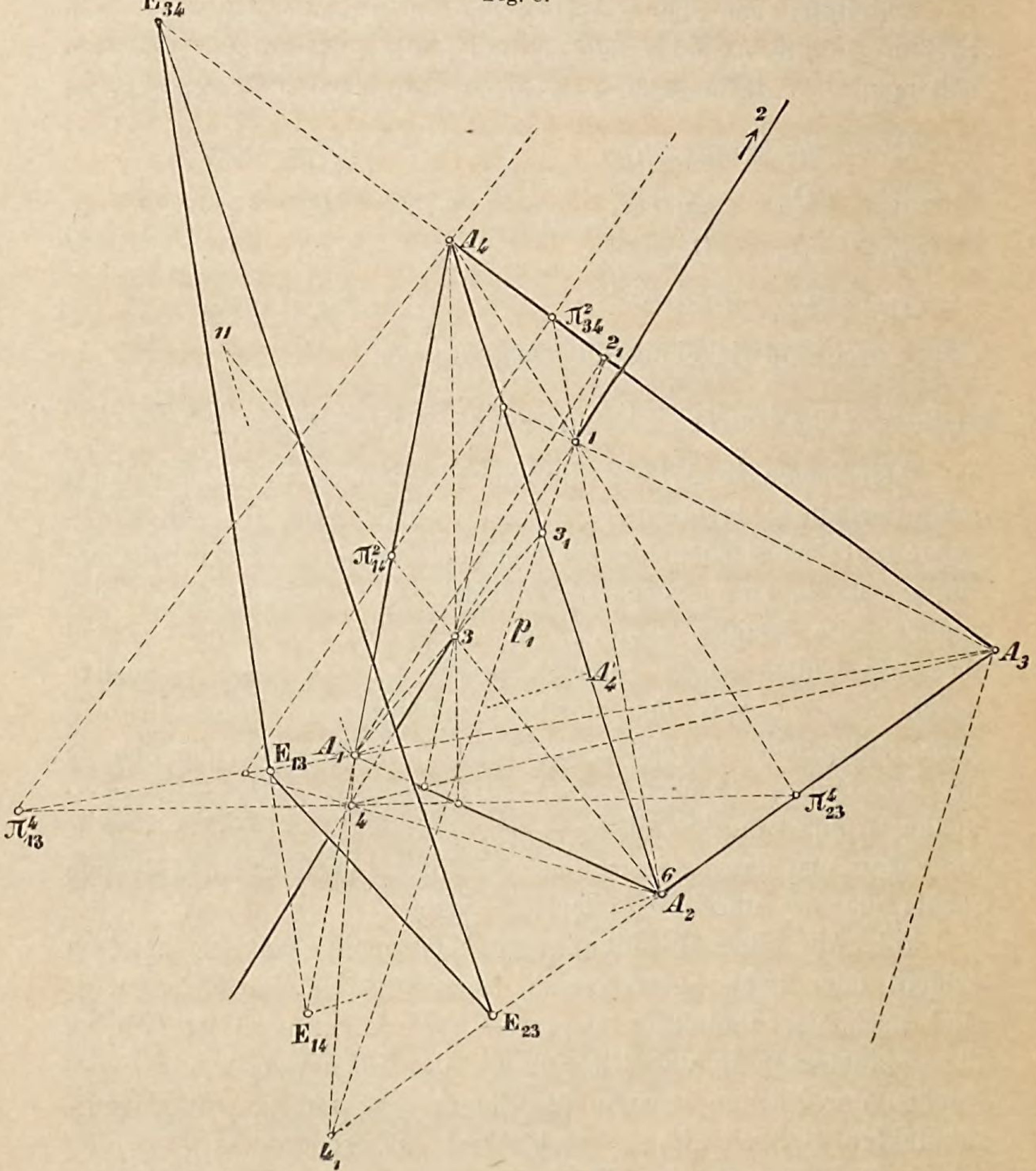
Wir haben in Art. 49 dieselben Relationen in anderer Form schon erhalten; ersetzen wir, wie es nach Art. 53 beim Rückgange zu Cartesischen Coordinaten sein muss, die Verhältnisse von y_1, y_2, y_3 zu y_4 respective durch x, y, z und bezeichnen wir zugleich die jetzigen $\pi_{14}, \pi_{24}, \pi_{34}$ respective durch a, b, c nnd ihre wir wollen sagen complementären $\pi_{23}, \pi_{31}, \pi_{12}$ respective durch l, m, n, was den dortigen Bedeutungen dieser Grössen genau entspricht, so geht in der That die rechts stehende Gruppe der Gleichungen 1) oben $\pi_{12}y_2 - \pi_{23}y_3 + \pi_{14}y_4 = 0, \; -\pi_{12}y_1 \cdots$ in die Gruppe von Art. 49 $ny - mz + a = 0, \; -nx + \cdots$ über. Sie sagen aus, dass y_i in π_{ik} oder p_{lm} liegt, sowie die der Gruppe rechts, dass η_i durch p_{ik} oder π_{lm} geht.

56. Alle diese Resultate sind aber auch direct geometrisch evident oder haben geometrische Bedeutung.[7]) Die Grössen p_{ik} sind nach der Definition $\equiv y_i z_k - y_k z_i$, d. h. nach Art. 53, 2. die Coefficienten in den Gleichungen der Ebenen oder die Coordinaten der Ebenen, welche die Gerade y, z mit den Fundamentalpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 verbinden, insbesondere p_{34}, p_{24}, p_{23} die Coefficienten in der Gleichung der Ebene $A_1 yz$; wir dürfen sagen, die p_{ik} seien die Coordinaten der Ebenen, welche die Gerade yz aus den Fundamentalpunkten projiciren.

Dagegen sind die Grössen $\pi_{ik} \equiv \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$ die Coefficienten in den Gleichnngen, also die Coordinaten derjenigen Punkte,

in welchen die Gerade yz die Fundamentalebenen A_i schneidet, oder die Coordinaten ihrer Durchstosspunkte in den Fundamentalebenen. Man sieht unmittelbar, dass durch diese geometrische Bedeutung die Unveränderlichkeit der Verhältnisse

Fig. 8.



der p_{ik} beim Uebergange von y und z zu $m_1 y + n_1 z$, $m_2 y + n_2 z$ oder der Verhältnisse der π_{ik} beim Uebergange von η, ζ zu $\mu_1 \eta + \nu_1 \zeta$, $\mu_2 \eta + \nu_2 \zeta$ nothwendig bedingt ist. Man erkennt aber auch die geometrische Begründung der Proportionalität 2) und die geome-

trische Nothwendigkeit der Relationen 3). In der That folgt jene Proportionalität aus dem Umstande, dass die Schnittlinien der projicirenden Ebenen ς_i der Geraden mit den Fundamentalebenen nothwendig die Durchstosspunkte S_k derselben enthalten müssen. Die Fig. 8 macht dies anschaulich, indem sie für die projicirenden Ebenen ihre Schnittlinien mit den Fundamentalebenen zeigt, z. B. für die projicirenden Ebenen aus A_2, A_4 von der Geraden mit den Durchstosspunkten 1, 2, 3, 4 in den Ebenen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \mathsf{A}_4$ die Schnittlinien mit diesen vier Ebenen $A_2 1 \Pi_{34}{}^2$, $\Pi_{34}{}^2 \Pi_{14}{}^2 2$, $\mathsf{A}_2 3 \Pi_{14}{}^2$, $A_2 4$; und $A_4 1 \Pi_{23}{}^4$, $A_4 \Pi_{13}{}^4 2$, $A_4 3$, $\Pi_{13}{}^4 4 \Pi_{23}{}^4$. Nach dem Vorigen sind die Gleichungen der projicirenden Ebenen ς_1, ς_2, ς_3, ς_4 respective

$$p_{34}x_2 - p_{24}x_3 + p_{23}x_4 = 0, \quad - p_{34}x_1 + p_{14}x_3 + p_{31}x_4 = 0,$$
$$p_{24}x_1 - p_{14}x_2 + p_{12}x_4 = 0, \quad - p_{23}x_1 - p_{31}x_2 - p_{12}x_3 = 0;$$

die Substitution der Coordinatengruppen der Durchstosspunkte S_i, nämlich für S_1: $0, \pi_{34}, -\pi_{24}, \pi_{23}$; für S_2: $-\pi_{34}, 0, \pi_{14}, \pi_{31}$; für S_3: $\pi_{24}, -\pi_{14}, 0, \pi_{12}$ und für S_4: $-\pi_{23}, -\pi_{31}, -\pi_{12}, 0$ in diese vier Gleichungen giebt die vier Gruppen von Relationen

$$\begin{array}{rr}
p_{31}\pi_{34} + p_{24}\pi_{24} + p_{23}\pi_{23} = 0, & - p_{14}\pi_{24} + p_{31}\pi_{32} = 0, \\
- p_{24}\pi_{14} + p_{23}\pi_{31} = 0, & p_{34}\pi_{34} + p_{14}\pi_{14} + p_{31}\pi_{31} = 0, \\
- p_{34}\pi_{14} + p_{23}\pi_{12} = 0, & - p_{34}\pi_{24} + p_{31}\pi_{12} = 0, \\
- p_{34}\pi_{31} + p_{24}\pi_{12} = 0; & p_{34}\pi_{23} - p_{14}\pi_{12} = 0; \\
- p_{14}\pi_{34} + p_{12}\pi_{23} = 0, & - p_{31}\pi_{34} + p_{12}\pi_{24} = 0, \\
- p_{24}\pi_{34} + p_{12}\pi_{31} = 0, & p_{23}\pi_{34} - p_{12}\pi_{14} = 0, \\
p_{24}\pi_{24} + p_{14}\pi_{14} + p_{12}\pi_{12} = 0, & - p_{23}\pi_{24} + p_{31}\pi_{14} = 0, \\
- p_{24}\pi_{23} + p_{14}\pi_{31} = 0; & p_{23}\pi_{23} + p_{31}\pi_{31} + p_{12}\pi_{12} = 0.
\end{array}$$

Den zwölf zweigliedrigen unter denselben entspringt aber die Kette der Proportionalitäten 2), und auf Grund der letzteren gehen aus den vier dreigliedrigen die Relationen 3) hervor, wenn man in ihnen entweder die p_{ij} durch die π_{kl} oder die π_{ij} durch die p_{kl} ersetzt, die ihnen proportional sind. Die 2) und 3) sagen also einfach aus, dass die Schnittpunkte der Geraden mit den Fundamentalebenen in den Verbindungsebenen derselben Geraden mit den Fundamentalpunkten liegen müssen. Zugleich sind die Relationen 3) in ihrer Determinantenform wegen derselben Proportionalität die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit die vier

Ebenen ς_i durch dieselbe Gerade gehen, respective die vier Punkte S_i in derselben Geraden liegen. Sie sind also eben so nothwendig als hinreichend.

Die Grössen p_{ik}, π_{ik} können nach den gewonnenen Ergebnissen als die sechs Coordinaten der Geraden im Raume bezeichnet werden; denn ihre Verhältnisse bestimmen dieselbe mittelst ihrer projicirenden Ebenen aus den Fundamentalpunkten oder ihrer Durchstosspunkte mit den Fundamentalebenen; dieselben sind von der Wahl der Bestimmungspunkte in den Geraden oder den Bestimmungsebenen durch dieselbe unabhängig und kommen auf vier unabhängige Veränderliche zurück, entsprechend den vier Bedingungen, welche eine Gerade erfüllen kann. Ihre Verwendung zur geometrischen Construction zeigt Fig. 8, in welcher A_1, A_2, A_3, A_4 die Fundamentalpunkte und $\mathsf{E}_{23}\mathsf{E}_{34}\mathsf{E}_{13}$ die Einheitebene bezeichnen, für die Gerade von den Coordinaten

$p_{12} = -3$, $p_{23} = -9$, $p_{31} = 6$, $p_{14} = -9$, $p_{24} = -8$, $p_{34} = 11$,

welche die Relation 3) erfüllen. Für die projicirende Ebene aus A_2 ist $\xi_1 = -11$, $\xi_3 = -9$, $\xi_4 = 6$ und somit

$$-\frac{11}{6} = (A_4 A_1 \mathsf{E}_{14} \Pi_{14}{}^2), \quad -\frac{3}{2} = (A_4 A_3 \mathsf{E}_{34} \Pi_{34}{}^2);$$

und für die projicirende Ebene aus A_4 ebenso $\xi_1 = 9$, $\xi_2 = -6$, $\xi_3 = 3$, also $3 = (A_3 A_1 \mathsf{E}_{13} \Pi_{13}{}^4)$, $-2 = (A_3 A_2 \mathsf{E}_{23} \Pi_{23}{}^4)$. Darnach sind in Fig. 8 die Punkte $\Pi_{14}{}^2$, $\Pi_{34}{}^2$; $\Pi_{13}{}^4$, $\Pi_{23}{}^4$ construirt und so die beiden projicirenden Ebenen ς_2, ς_4 und die Gerade 1234 ermittelt. Man zog z. B. $A_1 A_4'$ parallel $A_2 \mathsf{E}_{14}$ und trug auf die Parallele zu $A_2 A_4$ durch A_1 das $-\frac{11}{6}$fache von $A_4' A_2$ auf, um in der Verbindungsgeraden des erhaltenen Endpunktes mit A_2 den Punkt $\Pi_{14}{}^2$ zu finden.

Setzt man für den Uebergang zu Cartesischen Coordinaten A_4 als Anfangspunkt und somit

$y_4 = z_4 = 1$, $y_1 = x'$, $z_1 = x''$; $y_2 = y'$; $z_2 = y''$; $y_3 = z'$, $z_3 = z''$,

so erhält man

$$\begin{aligned} p_{12} &= x'y'' - x''y', & p_{23} &= y'z'' - y''z', & p_{31} &= z'x'' - z''x', \\ p_{14} &= x' - x'', & p_{24} &= y' - y'', & p_{34} &= z' - z'', \end{aligned}$$

und die Relation zwischen den sechs Coordinaten lautet

$$\begin{aligned} (x'y'' - x''y')(z' - z'') &+ (y'z'' - y''z')(x' - x'') \\ &+ (z'x'' - z''x')(y' - y'') = 0. \end{aligned}$$

Man kann die allgemeinen Coordinaten der Geraden auch ableiten aus den Coordinaten des Theilpunktes in der Reihe und der Theilebene im Büschel

$$x_i = l y_i + m z_i \text{ respective } \xi_i = \lambda \eta_i + \mu \zeta_i.$$

Denn die Elimination von l, m respective λ, μ zwischen den je vier bezüglichen Gleichungen liefert die Vierergruppen von verschwindenden Determinanten für die Gerade als Punktreihe respective als Ebenenbüschel

$$\begin{Vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \end{Vmatrix} = 0, \quad \begin{Vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \end{Vmatrix} = 0,$$

in denen die Coordinaten y, z respective η, ζ nur in den Verbindungen p_{ik}, π_{ik} erscheinen, die durch die Identität

$$p_{12}p_{34} + \cdots = 0, \quad \pi_{12}\pi_{34} + \cdots = 0$$

verbunden sind.

Ebenso die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_2p_{34} - x_3p_{24} + x_4p_{23} &= 0, & \xi_2\pi_{34} - \xi_3\pi_{24} + \xi_4\pi_{23} &= 0, \\ -x_1p_{34} + x_3p_{14} + x_4p_{31} &= 0, & -\xi_1\pi_{34} + \xi_3\pi_{14} + \xi_4\pi_{31} &= 0, \\ x_1p_{24} - x_2\pi_{14} + x_4p_{12} &= 0, & \xi_1\pi_{24} - \xi_2\pi_{14} + \xi_4\pi_{12} &= 0, \\ x_1p_{23} + x_2\pi_{31} + x_3p_{12} &= 0, & \xi_1\pi_{23} + \xi_2\pi_{31} + \xi_3\pi_{12} &= 0, \end{aligned}$$

die die Coordinaten irgend eines Punktes mit denen einer durch ihn gehenden Geraden respective irgend einer Ebene mit denen einer in ihr liegenden Geraden verbinden; respective auch in den Formen

$$x_2\pi_{12} - x_3\pi_{31} + x_4\pi_{14} = 0, \text{ etc.} \quad \xi_2p_{12} - \xi_3p_{31} + \xi_4p_{14} = 0, \text{ etc.}$$

ausdrückbar.

B. Den speciellen Lagen der Geraden in Bezug auf die Fundamentalelemente entsprechen folgende Besonderheiten. a) Ihrem Schnitt mit einer Fundamentallinie A_iA_k das Verschwinden der Coordinaten p_{lm} (oder π_{ik}); weil z. B. aus $0, y_2, y_3, 0$ und z_1, z_2, z_3, z_4 folgen $p_{12} = -y_2z_1$, $p_{23} = y_2z_3 - y_3z_2$, $p_{31} = y_3z_1$, $p_{14} = 0$, $p_{24} = y_2z_4$, $p_{34} = y_3z_4$; b) dem Schnitt mit zwei Gegenkanten das Nullsein der beiden gleichnamigen Coordinaten, so dass für

Schnitt mit A_2A_3, A_1A_4 z. B. p_{23}, p_{14} verschwinden; c) dem Schnitt mit drei Kanten einer Fläche, z. B. $A_1A_2A_4$, das Verschwinden der Coordinaten p_{23}, p_{31}, p_{34}; d) dem Schnitt mit drei Kanten einer Ecke, z. B. A_1, das Verschwinden von p_{23}, p_{24}, p_{34} oder der complimentären π; e) für eine Fundamentallinie sind alle Coordinaten p_{ik}, die mit ihr gleichnamigen ausgenommen, Null.

57. Zwei gerade Linien p_{ik}, p'_{ik} durchschneiden einander, wenn ihre Coordinaten der Bedingung genügen

$$p_{12}p'_{34} + p_{23}p'_{14} + p_{31}p'_{24} + p_{14}p'_{23} + p_{24}p'_{31} + p_{34}p'_{12} = 0,$$

welche nichts anderes ist als die mit Hilfe der Abkürzungen

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i, \quad p'_{ik} = y'_i z'_k - y'_k z'_i$$

ausgedrückte Entwicklung der Bedingung

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ y'_1, & y'_2, & y'_3, & y'_4 \\ z'_1, & z'_2, & z'_3, & z'_4 \end{vmatrix} = 0,$$

unter welcher die beiden Paare der sie bestimmenden Punkte in einer Ebene liegen. Sie ist auch in der Form $\Sigma p'_{ik} \dfrac{dR}{dp_{ik}} = 0$ ausdrückbar für R als linke Seite der identischen Relation 3) in Art. 55. Weil für jede Kante A_iA_k des Fundamentaltetraeders alle Coordinaten bis auf p_{ik} verschwinden, so sagt dies nach dem Beispiel Art. 56 aus, dass dieselbe alle Tetraederkanten, die gegenüberliegende allein ausgenommen, durchschneidet.

Bezeichnen wir durch x_i die Coordinaten des Schnittpunktes der zwei geraden Linien, so drücken die Gruppen von Gleichungen

$$\begin{array}{llll} & p_{34}x_2 - p_{24}x_3 + p_{23}x_4 = 0, & & p'_{34}x_2 - p'_{24}x_3 + p'_{23}x_4 = 0, \\ -p_{34}x_1 & \quad + p_{14}x_3 + p_{31}x_4 = 0, & -p'_{34}x_1 & \quad + p'_{14}x_3 + p'_{31}x_4 = 0, \\ p_{24}x_1 - p_{14}x_2 & \quad + p_{12}x_4 = 0, & p'_{24}x_1 - p'_{14}x_2 & \quad + p'_{12}x_4 = 0, \\ -p_{23}x_1 - p_{31}x_2 - p_{12}x_3 & \quad = 0, & -p'_{23}x_1 - p'_{31}x_2 - p'_{12}x_3 & \quad = 0 \end{array}$$

aus, dass die projicirenden Ebenen der ersten sowohl als der zweiten Geraden ihn enthalten. Die Vergleichung der entsprechenden Gleichungen beider Gruppen giebt die Verhältnisse

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$$
$$= \quad P_1 \quad : (p'_{23}p_{24} - p_{23}p'_{24}) : (p'_{23}p_{34} - p_{23}p'_{34}) : (p_{24}p'_{31} - p'_{24}p_{31})$$
$$= (p'_{31}p_{14} - p_{31}p'_{14}) : \quad P_2 \quad : (p'_{31}p_{34} - p_{31}p'_{34}) : (p_{34}p'_{14} - p'_{34}p_{14})$$
$$= (p'_{12}p_{14} - p_{12}p'_{14}) : (p'_{12}p_{24} - p_{12}p'_{24}) : \quad P_3 \quad : (p_{14}p'_{24} - p'_{14}p_{24})$$
$$= (p'_{31}p_{12} - p_{31}p'_{12}) : (p'_{12}p_{23} - p_{12}p'_{23}) : (p'_{23}p_{31} - p_{23}p'_{31}) : \quad P_4;$$

und durch Vergleichung derselben bestimmt man endlich die Grössen P_1, P_2, P_3, P_4 wie folgt:

$$P_1 = p'_{14}p_{23} + p'_{31}p_{24} + p'_{12}p_{34}, \quad P_2 = p'_{23}p_{14} + p'_{24}p_{31} + p'_{12}p_{34},$$
$$P_3 = p'_{23}p_{14} + p'_{31}p_{24} + p'_{34}p_{12}, \quad P_4 = p'_{14}p_{23} + p'_{24}p_{31} + p'_{34}p_{12}.$$

Dasselbe System von Grössen rechts giebt nach Vertauschung der Zeilen mit den Reihen die Verhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4$ für die Coordinaten der Ebene, welche die beiden sich schneidenden Geraden bestimmen.

Mit diesen Entwickelungen ist das Princip der Dualität (vergl. Art. 50, 52) vollständig bewiesen.

58. Wir können dann mit der Gleichung $R = 0$, welcher die Coordinaten einer geraden Linie stets genügen, eine in den sechs Coordinaten homogene Gleichung, zwei oder drei oder endlich vier solche Gleichungen verbinden und dadurch verschiedene Gesammtheiten von geraden Linien ausdrücken, welche den bezüglichen Gruppen entsprechen.[8])

Wir erhalten 1) mit einer homogenen Gleichung n^{ten} Grades $f^{(n)} = 0$ ein dreifach unendliches System von Geraden, das wir als einen Strahlencomplex n^{ten} Grades bezeichnen. Das System aller Strahlen, welche eine gegebene gerade oder krumme Linie schneiden, das System aller der Geraden, welche eine gegebene Oberfläche berühren, sind specielle Formen davon. Den Grundcharakter des allgemeinen Complexes erläutern wir durch folgende Ueberlegungen. Wenn in der Gleichung $f^{(n)} = 0$ der eine der Bestimmungspunkte jedes Strahls z. B. z_i als fest gedacht wird, so verwandelt sich dieselbe in die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung, deren Punkte sämmtlich auf Geraden aus z_i liegen, d. h. sie repräsentirt eine Kegelfläche n^{ter} Ordnung, die den festen Punkt zur Spitze oder zum Mittelpunkt hat. Ersetzen wir aber in $f^{(n)} = 0$ die p_{ij} durch die ihnen proportionalen π_{kl} und denken sodann eine der Bestimmungsebenen des variabeln Strahles z. B. ζ_i als unveränderlich, so verwandelt sich die Gleichung in die

Gleichung einer Fläche n^{ter} Classe, deren Ebenen sämmtlich durch Gerade auf ξ_i gehen, d. h. sie repräsentirt eine ebene Curve n^{ter} Classe. Im Complex n^{ten} Grades bilden also die Strahlen aus einem Punkte einen Kegel n^{ter} Ordnung und die in einer Ebene liegenden eine Curve n^{ter} Classe; dieselbe Zahl ist die Zahl der Complexstrahlen in einem Strahlenbüschel. Rücksichtlich der vorerwähnten Specialfälle übersieht man sofort, dass die Strahlen, welche eine Curve n^{ter} Ordnung schneiden, die erste Eigenschaft in allgemeiner Form, die letzte aber in der speciellen Form besitzen, dass die Curve n^{ter} Classe in n Punkte degenerirt; etc.

Wenn wir sodann den festen Punkt der ersten Betrachtung einen Strahl durchlaufen oder die feste Ebene der zweiten sich um diesen Strahl drehen lassen, so hat der Strahl dort mit dem veränderlichen Kegel in jeder Lage des Punktes eine bestimmte Tangentialebene und hier mit der veränderlichen Curve in jeder Lage der Ebene einen bestimmten Berührungspunkt gemein. Und es ist — wie wir in Art. 53, Beisp. 5 sahen (vergl. „Kegelschn.“ Art. 92) — eine unmittelbare Folge der algebraischen Abhängigkeit dieser Ebenen und Punkte von einander, dass sie zwei projectivische Gebilde beschreiben, ein Büschel von Ebenen durch den Strahl und eine zu ihm projectivische Punktreihe auf demselben. Im Falle des Strahlencomplexes der Tangenten einer Fläche fallen alle Punkte der vorbetrachteten Reihe in dem Berührungspunkte des Strahles mit der Fläche zusammen.

Der Complex ersten Grades oder der lineare Complex — das Strahlengewinde wie man ihn auch genannt hat[9]) — hat in jeder Ebene und durch jeden Punkt ein Büschel von Strahlen und in jedem Strahlenbüschel einen Strahl. Seine geometrische Construction knüpft sich an die Entstehung involutorischer Reihen oder Büschel aus projectivischen Büscheln oder Reihen in derselben Ebene („Kegelschn.“ Art. 94).

a) Die Gesammtheit der Geraden, welche zwei projectivische Ebenenbüschel durch windschiefe Gerade in involutorischen Reihen schneiden, ist ein linearer Complex; denn in jeder Ebene entsteht zu den beiden aus jenen Büscheln geschnittenen projectivischen Strahlenbüscheln an ihrem Perspectivcentrum ein Büschel von Geraden, die sie und also jene in Involution schneiden.

b) Die Gesammtheit der Geraden, die mit zwei projectivi-

schen Punktreihen auf windschiefen Geraden durch involutorische Ebenenbüschel verbunden werden, bildet einen linearen Complex; denn jene Reihen werden von einem Punkte aus durch projectivische Strahlenbüschel projicirt und jeder Strahl in ihrer Perspectivebene aus dem gemeinsamen Scheitel bildet mit ihnen Ebenenbüschel in Involution.[10])

Und durch die Construction erweist sich als einfachste Verbindung beider Erzeugungsweisen a) und b) die dritte, die den Vorzug hat, in sich dual zu sein, nämlich

c) Wenn zwei projectivische Strahlenbüschel in zwei verschiedenen Ebenen und an verschiedenen Scheiteln in ihrer Schnittlinie so liegen, dass sie diese zu einem sich selbst entsprechenden Strahl haben, so bilden alle Gerade, welche Paare ihrer entsprechenden Strahlen schneiden, einen linearen Complex. Dann ist in jeder Ebene das Perspectivcentrum der aus den Büscheln geschnittenen perspectivischen Reihen der Scheitel des Büschels der Complexstrahlen und dual.

Wir erhalten 2) mit zwei homogenen Gleichungen n^{ten} respective m^{ten} Grades $f^{(n)} = 0$, $f^{(m)} = 0$ zwischen den Coordinaten p_{ik} ein zweifach unendliches System von geraden Linien, welche beiden den Gleichungen einzeln entsprechenden Complexen vom n^{ten} respective m^{ten} Grade zugleich angehören; wir sagen ein Strahlensystem oder eine Congruenz. Durch jeden Punkt im Raume gehen mn Strahlen einer solchen Congruenz, die gemeinsamen Erzeugenden der beiden diesem Punkte entsprechenden Kegel, und in jeder Ebene liegen eben so viele Strahlen derselben, die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven beider Complexe in dieser Ebene. (Sich selbst duale Congruenzen — mn ihr Grad.)

Nach dem Vorigen wird in jedem Strahle der Congruenz zu dem Büschel der sich um denselben drehenden Ebene eine ihm projectivische Reihe durch den ersten und eine andere durch den zweiten Complex bestimmt, so dass also diese Reihen zu einander projectivisch sind und als in demselben Strahl liegend zwei Doppelpunkte haben, denen zwei bestimmte Ebenen des Büschels entsprechen. Diese Punkte und Ebenen bestimmen sich offenbar durch die dem betrachteten Strahl unendlich nahe benachbarten Strahlen der Congruenz, welche ihn schneiden. Sie sind die Berührungspunkte und zugehörigen Tangentialebenen mit einer algebraischen Fläche, als deren Doppeltangenten die Strahlen der

Congruenz erscheinen. Jedoch kann diese Fläche in zwei zerfallen oder degeneriren, so dass man folgende Fälle erhält, von denen der erste der allgemeine ist. Die Strahlen einer Congruenz sind entweder

a) die Doppeltangenten und die dreipunktig berührenden oder Haupttangenten einer Fläche, oder
b) die doppeltschneidenden Geraden einer Curve, oder
c) die gemeinsamen Tangenten von zwei Flächen, oder
d) die Tangenten einer Fläche aus den Punkten einer Curve, oder
e) die gemeinschaftlichen Transversalen von zwei Curven.

Die Normalen einer Oberfläche bilden ein Strahlensystem oder eine Congruenz; jede von ihnen berührt, wie wir sehen werden, in zwei Punkten, den Hauptkrümmungscentren, eine Fläche, die Fläche der Krümmungsmittelpunkte. (Vergl. unten Art. 221 und den Schlussabschnitt von Kap. X über die Krümmung der Flächen zweiten Grades.)

3) Drei homogene Gleichungen zwischen den p_{ik} von den respectiven Graden n, m, l, also $f^{(n)}=0$, $f^{(m)}=0$, $f^{(l)}=0$ bestimmen eine einfach unendliche Schaar von Geraden, die eine geradlinige oder Regelfläche bilden und die man als einen Regulus bezeichnen kann. Im Allgemeinen werden zwei unendlich nahe benachbarte unter ihnen sich nicht schneiden. Nicht durch jeden Punkt des Raumes gehen und nicht in jeder Ebene desselben liegen Strahlen des Systems. Wenn wir mit den Gleichungen $R=0$, $f^{(n)}=0$, $f^{(m)}=0$, $f^{(l)}=0$ die Gleichung einer beliebigen Geraden $p_{12}p_{34}'+\cdots+p_{14}p_{23}'+\cdots=0$ combiniren, so erhalten wir nach den Regeln der Algebra $2lmn$ gemeinsame Auflösungen dieser Gleichungen und damit eben so viele Gerade der Regelfläche, welche die angenommene schneiden. Diese Zahl ist der Grad des Regulus — wie wir sehen werden zugleich die Classe und Ordnung der Regelfläche. Für l, m, n gleich 1 erhält man die einfachste Regelfläche, ihr Grad ist 2 und wir nennen die den linearen Complexen gemeinsamen Geraden eine Regelschaar. Als Regelfläche ersten Grades kann man das Strahlenbüschel bezeichnen.

Wenn wir im Falle 2) mit den Gleichungen $R=0$, $f^{(n)}=0$, $f^{(m)}=0$ die Gleichungen von zwei beliebigen Geraden combiniren, so erhalten wir die Zahl von Strahlen in der Congruenz, welche zwei Gerade schneiden. Der Fall, wo die angenommenen Geraden sich schneiden, lehrt, dass diese Zahl sich zusammen-

setzt aus der der Strahlen durch einen Punkt d. i. der Ordnung, und der Zahl der Strahlen in einer Ebene d. i. der Classe der Congruenz.

Analog kann man im Falle des Complexes die Zahl seiner Strahlen hervorheben, welche drei gegebene Gerade treffen.

Es tritt zu diesen Untersuchungen als allgemeiner Fall hinzu, wenn 4) vier homogene Gleichungen $f^{(n)} = 0$, $f^{(m)} = 0$, $f^{(l)} = 0$, $f^{(k)} = 0$ von den Graden n, m, l, k respective eine Anzahl $2klmn$ von Strahlen bestimmen, die allen diesen Complexen gemeinsam sind.

B. Wir wollen das an der homogenen Gleichung ersten Grades noch erläutern. 1) Die Bedingungsgleichung des vorigen Art. für das Schneiden mit einer Geraden giebt den speciellen linearen Complex, den alle Transversalen einer Geraden (seiner Axe) bilden; und wir haben in ihr die Gleichung für den allgemeinen linearen Complex $f^{(1)} = 0$, sobald wir die p_{ik}' als völlig willkürliche nicht durch $R = 0$ verbundene Constante betrachten. Im linearen Complex liegen alle Strahlen durch einen Punkt in einer Ebene und alle Strahlen in einer Ebene gehen durch einen Punkt; bezeichnet man diesen Punkt und diese Ebene als Nullpunkt und Nullebene, so liegt der Nullpunkt in der Nullebene und wir haben — wie wir später sehen werden — die Reciprocität eines Nullsystems (siehe Art. 133); die sich selbst conjugirten Strahlen desselben (ebenda) bilden den linearen Complex. Nach den fünf unabhängigen Constanten der homogenen linearen Gleichung zwischen den p_{ik} wird der lineare Complex durch fünf seiner Strahlen bestimmt.

2) Sind $f^{(1)} = 0$, $f^{(1)'} = 0$ die Gleichungen zweier linearer Complexe, so drückt die Gleichung $f^{(1)} + \lambda f^{(1)'} = 0$ mit λ als einem veränderlichen Parameter ein einfach unendliches System linearer Complexe aus, welche alle die den Complexen $f^{(1)} = 0$, $f^{(1)'} = 0$ gemeinsame Congruenz enthalten. Offenbar kann in der Gleichung $f^{(1)} + \lambda f^{(1)'} = 0$ mittelst der Relation $R = 0$, also aus der Gleichung

$$(a_{12} + \lambda a_{12}')(a_{34} + \lambda a_{34}') + \cdots = 0$$

für a_{ik} und a_{ik}' als die Coefficienten der p_{ik} in $f^{(1)} = 0$ und $f^{(1)'} = 0$ der Parameter λ zweifach so bestimmt werden, dass alle durch sie dargestellte Strahlen je eine feste Gerade oder Axe schneiden oder dass der entsprechende Complex speciell ist; die Congruenz zweier linearer Complexe, das Strahlensystem erster Ordnung und Classe, ist daher als die Gesammtheit der Geraden aufzufassen, welche zwei reelle oder conjugirt imaginäre

feste Gerade (Axen der Congruenz) schneiden, oder als das System der sich selbst entsprechenden Geraden eines geschaart involutorischen Systems. (Vergl. Art. 132.) Wenn die Axen zusammenfallen (d. h. bei Wurzelgleichheit der quadratischen Bedingungsgleichung), so ist die doppelt zählende Axe selbst ein Strahl der Congruenz; wenn sie unbestimmt sind, so sind alle Complexe des Systems solche mit Axen und alle diese Axen bilden ein Strahlenbüschel.

3) Drei lineare Complexe $f^{(1)}=0$, $f^{(1)'}=0$, $f^{(1)''}=0$ haben eine Regelfläche zweiten Grades, nämlich die eine Schaar ihrer Erzeugenden gemein. Diese Regelschaar gehört auch allen den zweifach unendlich vielen linearen Complexen an, welche die Gleichung

$$f^{(1)}+\lambda f^{(1)'}+\mu f^{(1)''}=0$$

mit zwei veränderlichen Parametern λ, μ umfasst. Unter ihnen sind einfach unendlich viele specielle — weil die Existenz einer Axe nur eine Bedingung zwischen λ und μ fordert — und die Gesammtheit ihrer Axen muss von den Strahlen der gemeinsamen Regelschaar geschnitten werden; sie bilden also eine zweite Regelschaar.

4) Vier lineare Complexe bestimmen im Allgemeinen zwei gerade Linien, die ihnen gemeinsam sind. Die Aufsuchung der gemeinsamen Transversalen von vier Geraden $p_{ik}^{(1)}$, $p_{ik}^{(2)}$, $p_{ik}^{(3)}$, $p_{ik}^{(4)}$ ist ein Beispiel dafür. Die Aufgabe liefert die vier Bedingungsgleichungen — Gleichungen specieller linearer Complexe —

$$p_{12}^{(i)}p_{34}+p_{23}^{(i)}p_{14}+p_{31}^{(i)}p_{24}+p_{14}^{(i)}p_{23}+p_{24}^{(i)}p_{31}+p_{34}^{(i)}p_{12}=0$$
$$(i=1,2,3,4);$$

drücken wir mit Hilfe derselben die Coordinaten p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14} in Function der beiden letzten p_{24}, p_{34} aus, so erhalten wir durch Substitution dieser Ausdrücke in die Bedingungsgleichung $R=0$ eine quadratische Gleichung zur Bestimmung des Verhältnisses $p_{23}:p_{34}$ und aus dieser zwei Wurzeln, von denen jede eine einfache Reihe von Werthen der p_{ik} bestimmt, die den Bedingungen genügen.[11])

5) Wenn die vier Geraden $p_{ik}^{(j)}$ $(j=1,2,3,4)$ zur nämlichen Regelschaar gehören, so ist die Zahl ihrer gemeinsamen Transversalen unendlich gross oder die erwähnten Ausdrücke der p_{12}, p_{23}, p_{32}, p_{14} werden unbestimmt. Die Bedingung, unter welcher dies eintritt, geht dahin, dass es vier reelle algebraische Zahlen $\lambda_1, \ldots \lambda_4$ giebt, welche durch Multiplication mit den

gleichnamigen Coordinaten der vier gegebenen Geraden die Summe Null liefern, also dass man hat

$$\lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \lambda_2 p_{ik}^{(2)} + \lambda_3 p_{ik}^{(3)} + \lambda_4 p_{ik}^{(4)} = 0.$$

6) Wenn die erörterte Bestimmung auf zwei conjugirt imaginäre Wurzeln führt, so bezeichnet man die beiden Geraden der Lösung als conjugirt imaginäre Gerade im Raume. Setzt man unter fortwährender Erfüllung der Bedingung $R = 0$ für p_{ik} die Summe $p'_{ik} + ip''_{ik}$, so sind dies die Coordinaten solcher nicht reellen Geraden; sie werden von allen den Geraden geschnitten, deren Coordinaten den bei der Trennung des reellen und des imaginären Theils in der Substitutionsgleichung entstehenden Bedingungen

$$p'_{12} p_{34} + \cdots + p'_{14} p_{23} + \cdots = 0, \quad p''_{12} p_{34} + \cdots + p''_{14} p_{23} + \cdots = 0$$

genügen. Vier beliebige bestimmen aber diese Gleichungen und damit jene Geraden als ihre gemeinsamen Transversalen.

Man erläutere den Fall gleicher Wurzeln.

7) Wenn für einen linearen Complex fünf Gerade gegeben sind, so liefert jede Gruppe von vieren unter ihnen zwei zugeordnete Polaren desselben in ihren gemeinsamen Transversalen, und alle die Strahlen, welche dieselben schneiden, gehören dem Complex an. Die Nullebene eines Punktes wird durch die von ihm ausgehenden Transversalen zu zwei Paaren solcher conjugirten Pole bestimmt, der Nullpunkt einer Ebene durch die in ihr liegenden Transversalen zu zwei solchen Paaren.

8) In dem linearen System aus drei linearen Complexen $\varkappa f^{(1)} + \varkappa' f^{(1)'} + \varkappa'' f^{(1)''} = 0$ giebt es für eine feste Ebene und einen Punkt in ihr stets einen Complex, für welchen dieser Punkt und diese Ebene Nullpunkt und Nullebene sind. (B. unter 1.) Denn für y_i als Coordinaten des Punktes und η_1, η_2, η_3 als drei der Coordinaten der Ebene folgen mit $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ aus

$$\Sigma(\varkappa a_{ik} + \varkappa' a'_{ik} + \varkappa'' a''_{ik})\, p_{ik} = 0$$

durch Ordnung nach den x_i drei in den $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ lineare Ausdrücke für η_1, η_2, η_3, aus denen sich jene stets reell ergeben.

V. Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

59. Wir schreiben die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d + 2fyz + 2gxz + 2hxy$$
$$+ 2lx + 2my + 2nz = 0.$$

Sie enthält zehn Glieder und da durch Division einer der Coefficienten der Einheit gleich gemacht werden kann, so erkennt man neun lineare Bedingungen als hinreichend zur Bestimmung einer Fläche zweiter Ordnung. Wenn z. B. neun Punkte der Fläche gegeben sind, so erhalten wir durch die successive Substitution der Coordinaten eines jeden in die allgemeine Gleichung neun lineare Gleichungen, welche zur Bestimmung der neun unbekannten Grössen $b:a$, $c:a$, ..., $n:a$ etc. hinreichend sind. In derselben Art erkennen wir die Anzahl der zur Bestimmung einer Fläche n^{ten} Grades nothwendigen Bedingungen als um Eins kleiner als die Anzahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades.

Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades kann auch (siehe Art. 50) als eine homogene Function der Gleichungen von vier gegebenen Ebenen x, y, z, w in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$
$$+ 2lxw + 2myw + 2nzw = 0$$

ausgedrückt werden, denn die neun unabhängigen Constanten dieser Gleichung können so bestimmt werden, dass die Fläche durch neun gegebene Punkte geht, d. i. jede gegebene Fläche zweiten Grades kann durch sie dargestellt werden.

Man kann durch Einführung einer linearen Einheit w jede Gleichung in x, y, z homogen machen und erreicht in zahlreichen

Fällen durch die Anwendung solcher Gleichungen eine grössere Symmetrie der rechnerischen Resultate.

Die consequente Anwendung von Indices lässt die vier Veränderlichen der homogenen Form durch x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen und die allgemeine Gleichung zweiten Grades in projectivischen Coordinaten

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$$
$$+ 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

symbolisch durch

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^2 = 0$$

und abgekürzt durch

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji};\ i, j = 1, 2, 3, 4)$$

darstellen. Mit dem Fundamentalpunkte A_4 als dem Anfangspunkte Cartesischer Coordinaten entsprechend und x_1, x_2, x_3, x_4 resp. als x, y, z, w oder x, y, z, 1 gehen die vorher geschriebenen Gleichungsformen durch Reliefbildung (S. 57) aus ihnen hervor. An einigen wichtigen Stellen soll Rücksicht auf diese Bezeichnung genommen werden.

Es ist überflüssig, das Gleiche für die Coordinaten ξ_i zu wiederholen.

Der Einfachheit wegen verweilen wir besonders bei der Anwendung gewöhnlicher Cartesischer Coordinaten.

B. Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung durch die neun Punkte $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, ... $x_i^{(9)}$ entsteht durch die Elimination der a_{ik} aus der Gruppe der zehn entsprechenden Bedingungsgleichungen

$$a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots = 0,$$
$$a_{11}\overset{(1)}{x_1}{}^2 + \cdots + 2a_{12}\overset{(2)}{x_1}\overset{(3)}{x_2} + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

in der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2, & 2x_1x_2, & 2x_2x_3, & 2x_1x_3, & 2x_1x_4, & 2x_2x_4, & 2x_3x_4 \\ \overset{(1)}{x_1}{}^2, & \overset{(1)}{x_2}{}^2, & \overset{(1)}{x_3}{}^2, & \overset{(1)}{x_4}{}^2, & 2\overset{(1)}{x_1}\overset{(1)}{x_2}, & 2\overset{(1)}{x_2}\overset{(1)}{x_3}, & 2\overset{(1)}{x_1}\overset{(1)}{x_3}, & 2\overset{(1)}{x_1}\overset{(1)}{x_4}, & 2\overset{(1)}{x_2}\overset{(1)}{x_4}, & 2\overset{(1)}{x_3}\overset{(1)}{x_4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(9)}{x_1}{}^2, & \overset{(9)}{x_2}{}^2, & \overset{(9)}{x_3}{}^2, & \overset{(9)}{x_4}{}^2, & 2\overset{(9)}{x_1}\overset{(9)}{x_2}, & 2\overset{(9)}{x_2}\overset{(9)}{x_3}, & 2\overset{(9)}{x_1}\overset{(9)}{x_3}, & 2\overset{(9)}{x_1}\overset{(9)}{x_4}, & 2\overset{(9)}{x_2}\overset{(9)}{x_4}, & 2\overset{(9)}{x_3}\overset{(9)}{x_4} \end{vmatrix} = 0,$$

welche mit Vertauschung der Reihen und Zeilen zugleich die Bedingung der Verträglichkeit der zehn Gleichungen

$$c_1 x_1^2 + c_2 \overset{(1)}{x}_1{}^2 + c_3 \overset{(2)}{x}_1{}^2 + \cdots + c_{10} \overset{(9)}{x}_1{}^2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$2\,(c_1 x_1 x_2 + c_2 \overset{(1)}{x}_1 \overset{(1)}{x}_2 + c_3 \overset{(2)}{x}_1 \overset{(2)}{x}_2 + \cdots + c_{10} \overset{(9)}{x}_1 \overset{(9)}{x}_2) = 0$$
$$\vdots$$

ist, die erforderlich sind, damit sich zehn Constanten c_i so bestimmen lassen, dass die Summe der mit ihnen multiplicirten Quadrate der Gleichungen der zehn Punkte x, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... $x^{(9)}$ identisch Null sei. Also: Zehn Punkte liegen auf derselben Fläche zweiter Ordnung, wenn die Summe der Quadrate ihrer mit geeigneten Constanten multiplicirten Gleichungen Null ist. Zehn Ebenen berühren dieselbe Fläche zweiter Classe, wenn die Summe der Quadrate ihrer mit gewissen Constanten multiplicirten Gleichungen Null ist.

60. Die Coordinaten werden zu beliebigen neuen parallelen durch einen Punkt x', y', z' gehenden Axen transformirt, indem man (Art. 16)

$$x + x',\ y + y',\ z + z' \text{ für } x,\ y,\ z$$

respective substituirt. Indem wir die Bezeichnung der Coefficienten mit Indices beibehalten, ergiebt sich das Resultat dieser Substitution dahin, dass die Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{13}, a_{12})$ unverändert bleiben, dass das neue absolute Glied mit dem Resultat der Substitution von x', y', z' für x, y, z in die gegebene Gleichung übereinstimmt, welches wir durch U' bezeichnen; dass der neue Coefficient von x

$$= 2\,(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}) \text{ oder } \frac{dU'}{dx'}$$

wird und in derselben Weise die neuen Coefficienten von y und z respective gleich sind

$$\frac{dU'}{dy'} \text{ und } \frac{dU'}{dz'}.$$

Es ist eine zweckmässige Abkürzung, die halben Differentiale der Function U nach x, y, z, w oder x_1, x_2, x_3, x_4 respective durch U_1, U_2, U_3, U_4 zu bezeichnen; ebenso brauchen wir U_1', etc.

61. Wir können die allgemeine Gleichung zu Polarcoordinaten transformiren, indem wir

$$x = \lambda\varrho,\quad y = \mu\varrho,\quad z = \nu\varrho$$

setzen (wo für rectanguläre Axen λ, μ, ν respective gleich $\cos\alpha$,

cos β, cos γ und für schiefwinklige Axen nach der Anmerkung des Art. 11 λ, μ, ν allgemein Functionen der Winkel sind, welche die Linie mit diesen Axen einschliesst); die Gleichung wird

$$\varrho^2 (a_{11}\lambda^2 + a_{22}\mu^2 + a_{33}\nu^2 + 2a_{23}\mu\nu + 2a_{13}\lambda\nu + 2a_{12}\lambda\mu) \\ + 2\varrho(a_{14}\lambda + a_{24}\mu + a_{34}\nu) + a_{44} = 0,$$

und liefert nach ihrer Natur als quadratische Gleichung für die Länge des einer gegebenen Richtung entsprechenden Radius vector zwei Werthe; da jeder beliebige Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt werden kann, so beweist sie, dass *jede gerade Linie eine Fläche zweiter Ordnung in zwei Punkten schneidet*, wie wir schon früher (Art. 23) erkannt haben.

62. Wir betrachten zuerst den Fall, wo der Anfangspunkt der Coordinaten in der Fläche liegt, also $a_{44} = 0$, und somit eine der Wurzeln der eben erhaltenen quadratischen Gleichung gleich Null ist; wir suchen die *Bedingung, unter welcher der Radius vector die Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten berührt.*

Da in diesem Falle die zweite Wurzel unserer quadratischen Gleichung ebenfalls gleich Null sein muss, so ist

$$a_{14}\lambda + a_{24}\mu + a_{34}\nu = 0$$

die fragliche Bedingung. Sie geht durch Multiplication mit ϱ und Wiedereinführung von x, y, z für $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$, $\nu\varrho$ in die Form

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0$$

über und drückt offenbar aus, dass der Radius vector in einer gewissen festen Ebene liegt. Und da λ, μ, ν keiner andern als der eben beschriebenen Beschränkung unterliegen, so muss *jeder* durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende und in dieser Ebene gelegene Radius vector die Fläche berühren.

Wir erkennen, *dass in einem gegebenen Punkte einer Fläche zweiter Ordnung unendlich viele Tangenten derselben gezogen werden können und dass dieselben alle in einer Ebene liegen, welche die Tangentenebene in diesem Punkte genannt wird.*

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$u_2 + u_1 = 0$$

geschrieben wird, in welcher die Glieder vom ersten und die vom zweiten Grade in den Veränderlichen gesondert sind, so ist $u_1 = 0$

die Gleichung der Tangentenebene im Anfangspunkte der Coordinaten.

63. Wir können die Gleichung der Tangentenebene der Fläche in einem beliebigen ihrer Punkte x', y', z' durch Transformation der Coordinaten finden; denn durch Verlegung des Anfangspunktes nach diesem Punkte verschwindet das absolute Glied und die Gleichung der Tangentenebene ist (Art. 60)

$$x U_1' + y U_2' + z U_3' = 0,$$

oder durch den Rückgang zu den alten Axen

$$(x - x') U_1' + (y - y') U_2' + (z - z') U_3' = 0.$$

Durch Einführung der Lineareinheit w kann dieselbe Gleichung in einer vollkommen symmetrischen Gestalt gegeben werden; denn nach der Natur einer homogenen Function U und weil x', y', z' der Gleichung der Fläche genügen, haben wir

$$x' U_1' + y' U_2' + z' U_3' + w' U_4' = U' = 0$$

und erhalten durch Addition dieser Gleichung zu der zuletzt gefundenen die Gleichung der Tangentenebene in der Form

$$x U_1' + y U_2' + z U_3' + w U_4' = 0,$$

oder entwickelt

$$x(a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13} z' + a_{14}) + y(a_{12} x' + a_{22} y' + a_{23} z' + a_{24})$$
$$+ z(a_{13} x' + a_{23} y' + a_{33} z' + a_{34}) + a_{14} x' + a_{24} y' + a_{34} z' + a_{44} = 0.$$

Indem man bemerkt, dass diese Gleichung in Bezug auf die Gruppen x, y, z und x', y', z' symmetrisch ist, findet man, dass sie auch in der Form geschrieben werden kann

$$x' U_1 + y' U_2 + z' U_3 + w' U_4 = 0.$$

64. Man soll den Berührungspunkt einer Tangente oder Tangentenebene bestimmen, welche durch einen gegebenen nicht in der Fläche liegenden Punkt x', y', z' geht.

Die zuletzt gefundene Gleichung drückt eine zwischen x, y, z, w, als Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangentenebene, und x', y', z', w' als Coordinaten ihres Berührungspunktes bestehende Relation aus; und um auszudrücken, dass die ersten Coordinaten gegeben und die letzten gesucht sind, haben wir nur die Accente der ersten zu beseitigen und sie den letzten bei-

zufügen. Wir finden also, dass der Berührungspunkt in der durch

$$xU_1' + yU_2' + zU_3' + wU_4' = 0$$

dargestellten Ebene liegen muss; sie wird die Polarebene des gegebenen Punktes genannt, indem man zugleich diesen als ihren Pol bezeichnet.

Da der Berührungspunkt keiner andern Bedingung als dieser zu genügen hat, so gehen die Tangentenebenen der Fläche in allen ihrer Durchschnittscurve mit der Polarebene angehörigen Punkten durch den Pol, und die gerade Verbindungslinie eines Berührungspunktes mit dem gegebenen Punkte ist eine Tangente der Fläche. Die Gesammtheit aller dieser Verbindungslinien, d. i. die Schaar der Tangenten, welche durch den gegebenen Punkt an die Fläche gezogen werden können, bildet den diesem Punkte entsprechenden Tangentenkegel oder Berührungskegel der Fläche (vergl. Art. 58); insbesondere für x', y', z' als unendlich fern den zugehörigen Berührungscylinder (Art. 25).

65. Die Polarebene kann auch als der Ort der vierten harmonischen Punkte in den durch den Pol gehenden Radien vectoren der Fläche definirt werden.

Untersuchen wir nämlich den Ort der Punkte der harmonischen Theilung für die durch den Anfangspunkt gehenden Radien vectoren und bezeichnen wir durch ϱ', ϱ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung des Art. 61 und durch ϱ den Radius vector des fraglichen Ortes, so ist

$$\frac{2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = -\frac{2(\lambda a_{14} + \mu a_{24} + \nu a_{34})}{a_{44}},$$

d. i. durch Rückkehr zu den x, y, z-Coordinaten

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0,$$

oder die Gleichung der Polarebene des Anfangspunktes, die auch aus der entwickelten Gleichung des Art. 63 für $x' = y' = z' = 0$ hervorgeht.

Aus dieser Definition der Polarebene ist evident, dass für jeden durch einen gegebenen Punkt gehenden ebenen Schnitt einer Fläche zweiten Grades die Polare des Punktes in Bezug auf die Schnittcurve durch den Durchschnitt der Ebene des Schnittes mit der Polarebene des

Punktes gegeben wird; denn der Ort der harmonischen Mittel aller durch diesen Punkt gehenden Radien vectoren enthält nothwendig auch den Ort der harmonischen Mittel derjenigen Radien vectoren, welche in der Schnittebene liegen.

66. Wenn die Polarebene eines Punktes A den Punkt B enthält, so geht die Polarebene des Punktes B durch den Punkt A. (Vergl. Art. 134.)

Denn da die Gleichung der Polarebene in Bezug auf x, y, z und x', y', z' symmetrisch ist, so erhalten wir offenbar dasselbe Resultat durch die Substitution der Coordinaten des zweiten Punktes in die Gleichung der Polarebene des ersten, als durch die der Coordinaten der ersten in die Gleichung der Polarebene des zweiten.

Der Durchschnitt der Polarebenen von A und B ist eine gerade Linie, welche wir die Polarlinie der Geraden AB oder ihre polar-conjugirte in Bezug auf die Fläche nennen wollen. Man sieht, dass die Polarlinie von AB der Ort der Pole aller der Ebenen ist, welche durch die Linie AB gelegt werden können.

Die Polarebene eines Punktes der Fläche ist ihre Tangentialebene in diesem. Von zwei Polarlinien geht daher die eine durch die Berührungspunkte der Tangentialebenen aus der andern. Weil somit an eine Fläche zweiter Ordnung durch eine Gerade auch zwei Tangentialebenen gehen, so sagt man, eine Fläche zweiter Ordnung sei zugleich von der zweiten Classe; man nennt diese Flächen auch kurz zusammenfassend Flächen zweiten Grades.

67. Wenn in der Originalgleichung nicht nur $a_{44} = 0$, sondern auch $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ sind, so wird die gefundene Gleichung der Tangentenebene (Art. 69) illusorisch, weil jedes ihrer Glieder verschwindet, und keine einzelne Ebene kann als die Tangentenebene der Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet werden. Denn der Coefficient von ϱ (Art. 68) verschwindet für jede dem ϱ beigelegte Richtung; jede durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende gerade Linie schneidet die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten, d. h. der Anfangspunkt ist ein singulärer spec. ein Doppelpunkt in der Fläche.

In dem gegenwärtigen Falle bezeichnet die Gleichung einen Kegel, der den Anfangspunkt zum Scheitel hat; in der That thut dies jede in x, y, z homogene Gleichung. Denn wenn

eine solche durch die Coordinaten x', y', z' befriedigt wird, so genügen ihr auch die Coordinaten kx', ky', kz' (wo k eine beliebige Constante ist), d. h. die Coordinaten aller Punkte der geraden Verbindungslinie des Punktes (x', y', z') mit dem Anfangspunkt; diese Verbindungslinie liegt somit ganz in der Fläche und dieselbe muss unendlich viele gerade Linien enthalten, welche durch den Anfangspunkt gehen.

Die Gleichung der Tangentenebene für irgend einen Punkt dieser Kegelfläche kann in den Formen

$$xU_1' + yU_2' + zU_3' = 0, \quad x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = 0$$

geschrieben werden, von denen die erste durch den Mangel des absoluten Gliedes anzeigt, dass die Tangentenebene in einem beliebigen Punkte des Kegels durch den Anfangspunkt geht, während die zweite ausdrückt, dass die Tangentenebene in irgend einem Punkte (x', y', z') die Fläche in jedem Punkte der geraden Linie berührt, welche den Punkt (x', y', z') mit dem Scheitel verbindet, weil sie noch die nämliche Ebene repräsentirt, wenn man für x', y', z' respective kx', ky', kz' substituirt.

Wenn der Punkt (x', y', z') nicht in der Fläche liegt, so repräsentirt die zuletzt betrachtete Gleichung die Polarebene dieses Punktes und man erkennt in gleicher Weise, dass die Polarebene jedes Punktes durch den Scheitel des Kegels geht, und dass alle Punkte, die in derselben geraden durch den Scheitel gehenden Linie gelegen sind, die nämliche Polarebene haben.

Um daher die Polarebene eines Punktes in Bezug auf einen Kegel zu finden, haben wir nur irgend einen ebenen Schnitt durch diesen Punkt zu legen und die Polarlinie des Punktes in Bezug auf die entsprechende Schnittcurve zu bestimmen; die durch sie und den Scheitel gehende Ebene ist die fragliche Polarebene, denn es ward im Art. 65 bewiesen, dass die Polarebene diese Polarlinie enthält und jetzt wurde erkannt, dass sie zugleich durch den Scheitel des Kegels geht.

68. Wir können leicht die Bedingung entwickeln, unter welcher die allgemeine Gleichung zweiten Grades einen Kegel repräsentirt.

Denn unter dieser Voraussetzung muss es möglich sein, durch Transformation der Coordinaten die neuen Coefficienten a_{14}, a_{24},

a_{34}, a_{44} zum Verschwinden zu bringen; die Coordinaten des neuen Anfangspunktes, d. i. des Scheitels, müssen daher (Art. 60) die Bedingungen

$$U_1' = 0, \quad U_2' = 0, \quad U_3' = 0, \quad U' = 0$$

erfüllen, deren letztere in Verbindung mit den übrigen mit der Bedingung $U_4' = 0$ äquivalent ist.

Wenn wir aber x', y', z' aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14} &= 0, \\ a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24} &= 0, \\ a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + a_{34} &= 0, \\ a_{14}x' + a_{24}y' + a_{34}z' + a_{44} &= 0 \end{aligned}$$

eliminiren, so erhalten wir die fragliche Bedingung in der Form des Verschwindens einer Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix}$$

oder entwickelt

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + 2a_{11}a_{23}a_{24}a_{34} + 2a_{22}a_{13}a_{14}a_{34} + 2a_{33}a_{12}a_{14}a_{24} \\ & + 2a_{44}a_{23}a_{13}a_{12} - a_{22}a_{33}a_{14}^2 - a_{33}a_{11}a_{24}^2 - a_{11}a_{22}a_{34}^2 - a_{11}a_{44}a_{23}^2 \\ & - a_{22}a_{44}a_{13}^2 - a_{33}a_{44}a_{12}^2 + a_{23}^2a_{14}^2 + a_{13}^2a_{24}^2 + a_{12}^2a_{34}^2 \\ & - 2a_{13}a_{12}a_{24}a_{34} - 2a_{12}a_{23}a_{34}a_{14} - 2a_{23}a_{13}a_{14}a_{24} = 0, \end{aligned}$$

deren linke Seite die Discriminante Δ und zugleich die Hesse'sche Determinante der gegebenen Gleichung ist*).

Wir werden es vortheilhaft finden, die Differentialquotienten der Discriminante nach den Elementen a_{ii} und a_{ik} oder ihre Unterdeterminanten nach diesen durch A_{ii} respective $2A_{ik}$ zu bezeichnen, so dass man hat

*) Vergl. „Vorlesungen" Art. 118, 127.

$$A_{11} = a_{22}a_{33}a_{44} + 2a_{23}a_{24}a_{34} - a_{22}a_{34}^2 - a_{33}a_{24}^2 - a_{44}a_{23}^2,$$

$$A_{22} = a_{33}a_{44}a_{11} + 2a_{13}a_{34}a_{14} - a_{33}a_{14}^2 - a_{11}a_{34}^2 - a_{44}a_{13}^2, \text{ etc.};$$

$$A_{23} = a_{11}a_{24}a_{34} + a_{44}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{44}a_{23} + a_{23}a_{14}^2 - a_{12}a_{34}a_{14} - a_{13}a_{14}a_{24}, \text{ etc.};$$

$$A_{14} = a_{22}a_{13}a_{34} + a_{33}a_{12}a_{24} - a_{22}a_{33}a_{14} + a_{14}a_{23}^2 - a_{12}a_{23}a_{34} - a_{13}a_{23}a_{24}, \text{ etc.}$$

69. Wir kehren nun zur Betrachtung der quadratischen Gleichung des Art. 61 zurück, und untersuchen unter der Voraussetzung, dass a_{44} nicht verschwindet, die Bedingung, unter welcher der Radius vector im Anfangspunkt halbirt wird.

Es ist dazu nothwendig und hinreichend, dass der Coefficient von ϱ in dieser Gleichung mit Null identisch ist, weil wir dann aus ihr für ϱ numerisch gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen erhalten. Die verlangte Bedingung ist daher

$$a_{14}\lambda + a_{24}\mu + a_{34}\nu = 0;$$

mit ϱ multiplicirt zeigt sie, dass der Radius vector dann in der Ebene

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0$$

liegen muss. Nach Art. 65 schliessen wir daraus, dass jede durch den Anfangspunkt der Coordinaten in einer zur Polarebene desselben parallelen Ebene gezogene gerade Linie im Anfangspunkte halbirt wird.

70. Unter den gleichzeitig geltenden Voraussetzungen $a_{14} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{34} = 0$ wird jede durch den Anfangspunkt gehende gerade Linie in ihm halbirt, und der Anfangspunkt wird dann das Centrum der Fläche genannt.

Jede Fläche zweiter Ordnung hat im Allgemeinen ein und nur ein Centrum. Denn wenn wir durch Transformation der Coordinaten die Coefficienten a_{14}, a_{24}, a_{34} der allgemeinen Gleichung auf den gemeinschaftlichen Werth Null bringen wollen, so erhalten wir die drei Bedingungsgleichungen

$$U_1' = 0 \text{ oder } a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14} = 0,$$

$$U_2' = 0 \text{ oder } a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24} = 0,$$

$$U_3' = 0 \text{ oder } a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + a_{34} = 0,$$

welche zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen x', y', z'

nothwendig und hinreichend sind. Man erhält mit den Bezeichnungen des Art. 68 zur Bestimmung der Coordinaten des Centrums $A_{44}x' = A_{14}$, $A_{44}y' = A_{24}$, $A_{44}z' = A_{34}$. Wenn jedoch $A_{44} = 0$ ist, so werden diese Coordinaten unendlich gross und die Fläche besitzt kein im endlichen Raume gelegenes Centrum*).

Wenn wir die Originalgleichung in der Form

$$u_2 + u_1 + u_0 = 0$$

schreiben, in der wir die Glieder vom zweiten und ersten Grade und die vom Grade Null unterscheiden, so ist offenbar A_{44} die Discriminante des Polynoms u_2.

71. Man soll den Ort der Mittelpunkte der Sehnen finden, welche parallel sind einer gegebenen geraden Linie $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$.

Wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach irgend einem Punkte des fraglichen Ortes verlegen, so müssen die neuen Coefficienten a_{14}, a_{24}, a_{34} die im Art. 69 gefundene Bedingung

$$a_{14}\lambda + a_{24}\mu + a_{34}\nu = 0$$

erfüllen, und daher ist nach Art. 60 die Gleichung des Ortes

$$\lambda U_1 + \mu U_2 + \nu U_3 = 0.$$

Diese Gleichung bezeichnet eine durch den Durchschnittspunkt der Ebenen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ oder das Centrum der Fläche gehende Ebene; wir benennen sie als die der ge-

*) Wenn, wie es möglich ist, die Zähler der für x', y', z' erhaltenen Brüche gleichzeitig mit dem Nenner verschwinden, so sind die Coordinaten des Centrums unbestimmt und die Fläche besitzt unendlich viele Centra. So dann, wenn die drei Ebenen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ durch dieselbe gerade Linie gehen; dann ist jeder Punkt in dieser Linie ein Centrum. Die Bedingung, unter welcher dies eintritt, kann in der Form

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \end{matrix} \right\| = 0$$

geschrieben werden, welche das gleichzeitige Verschwinden der vier Determinanten bezeichnet, die aus den geschriebenen vier Verticalreihen zu dreien gebildet werden können. Wir kommen im folgenden Kapitel auf diese Fälle zurück.

gebenen Richtung der Sehnen conjugirte Diametralebene der Fläche.

Wenn irgend ein Punkt in dem durch den Anfangspunkt der Coordinaten in der gegebenen Richtung gezogenen Radius vector die Coordinaten x', y', z' hat, so kann die Gleichung seiner Diametralebene in der Form geschrieben werden

$$x' U_1 + y' U_2 + z' U_3 = 0.$$

Die Gleichung der Polarebene des Punktes kx', ky', kz'

$$kx' U_1 + ky' U_2 + kz' U_3 + U_4 = 0$$

giebt aber, durch k dividirt und für unendlich wachsendes k die nämliche Gleichung; welches zeigt, dass die Diametralebene die Polarebene des unendlich entfernten Punktes der gegebenen geraden Linie ist, wie wir auch mittelst geometrischer Betrachtungen hätten beweisen können.

In derselben Weise wird erkannt, dass das Centrum der Pol der unendlich entfernten Ebene ist; denn wenn der Anfangspunkt das Centrum der Fläche ist, so wird (Art. 65) die Gleichung seiner Polarebene $a_{44} = 0$, welches nach Art. 29 die unendlich entfernte Ebene repräsentirt.

Wenn speciell die gegebene Fläche ein Kegel ist, so fällt die Ebene, welche alle zu einer durch den Scheitel gehenden festen Geraden parallelen Sehnen halbirt, mit der Polarebene irgend eines Punktes dieser Linie zusammen. Wir haben früher erkannt, dass allen Punkten einer solchen Geraden dieselbe Polarebene entspricht und finden jetzt in Uebereinstimmung damit, dass die Polarebene ihres unendlich entfernten Punktes, d. i. die ihr conjugirte Diametralebene, die nämliche ist.

72. Die Ebene, welche die der Axe der x parallelen Sehnen halbirt, wird durch die Voraussetzungen $\mu = 0$, $\nu = 0$ aus der Gleichung des vorigen Art. gefunden und ist also $U_1 = 0$ oder $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$ *); sie ist der Axe der y parallel, wenn $a_{12} = 0$ ist. Dies ist aber auch die Bedingung, unter

*) Daraus folgt, dass die Ebene $x = 0$ die der Axe der x parallelen Sehnen halbirt, wenn $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = 0$ sind; oder wenn die Originalgleichung keine ungerade Potenz von x enthält. Es ist überdies offenbar, dass dies der Fall sein muss, damit für beliebige bestimmte Werthe von y und z gleiche und entgegengesetzte Werthe für x erhalten werden.

welcher die der Axe der y conjugirte Diametralebene der Axe der x parallel ist; d. h. wenn die einer gegebenen Richtung conjugirte Diametralebene eine andere Richtung enthält, so enthält die dieser letzteren Richtung conjugirte Diametralebene auch die erste Richtung.

Wenn $a_{12} = 0$ ist, so sind offenbar die Axen der x und y einem Paare von conjugirten Durchmessern des durch die Ebene xy bestimmten Schnittes parallel, und man erkennt ausserdem, dass die jedem dieser Durchmesser conjugirte Diametralebene den andern enthält; denn der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen der Fläche, welche einer gegebenen Geraden parallel sind, schliesst nothwendig den Ort der Mittelpunkte aller der Sehnen dieser Art ein, welche in einer gegebenen Ebene enthalten sind.

Drei Diametralebenen heissen conjugirt, wenn jede von ihnen zur Durchschnittslinie der beiden andern conjugirt ist; und drei Durchmesser heissen conjugirt, wenn jeder von ihnen conjugirt ist der Ebene der beiden andern. Wir erhalten also ein System von drei conjugirten Durchmessern, wenn wir zu zwei conjugirten Durchmessern eines beliebigen ebenen durch das Centrum geführten Schnittes den zur Schnittebene conjugirten Durchmesser gesellen. Für die gleichzeitig erfüllten Voraussetzungen $a_{23} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$ erhellt aus dem Anfang dieses Art., dass die Coordinatenebenen drei conjugirten Diametralebenen parallel sind.

Wenn die Fläche ein Kegel ist, so ergiebt sich aus dem in den Art. 67, 71, 78 Gesagten, dass ein System von drei conjugirten Durchmessern eine beliebige Ebene in drei Punkten schneidet, von denen jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf die entsprechende Schnittcurve ist.

73. Eine Diametralebene wird als Hauptebene bezeichnet, wenn sie zu den Sehnen normal steht, zu denen sie conjugirt ist.

Unter der Voraussetzung rectangulärer Axen und für λ, μ, ν als die Richtungscosinus der Sehne haben wir im Art. 71 die Gleichung der entsprechenden Diametralebene

$$\lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + \mu(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) \\ + \nu(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}) = 0$$

erhalten, und erkennen, dass dieselbe zur Sehne normal ist, wenn

(Art. 41) die Coefficienten von x, y, z respective proportional zu λ, μ, ν sind, d. i. wenn die Gleichungen

$$\lambda a_{11} + \mu a_{12} + \nu a_{13} = k\lambda,$$
$$\lambda a_{12} + \mu a_{22} + \nu a_{23} = k\mu,$$
$$\lambda a_{13} + \mu a_{23} + \nu a_{33} = k\nu$$

bestehen. Wir können aus diesen in λ, μ, ν linearen Gleichungen λ, μ, ν eliminiren und erhalten zur Bestimmung von k

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k, & a_{12} & , a_{13} \\ a_{12} & , a_{22}-k, & a_{23} \\ a_{13} & , a_{23} & , a_{33}-k \end{vmatrix} = 0,$$

oder in entwickelter Form

$$k^3 - k^2(a_{11}+a_{22}+a_{33}) + k(a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}-a_{23}^2-a_{13}^2 \\ -a_{12}^2) - (a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2) = 0.$$

Die successive Einführung der drei durch diese Gleichung bestimmten Werthe von k in die vorigen Bedingungsgleichungen erlaubt uns die Bestimmung der entsprechenden Werthe von λ, μ, ν.

Eine Fläche zweiten Grades hat daher im Allgemeinen drei Hauptdiametralebenen; die drei zu ihnen normalen Durchmesser werden die Axen der Fläche genannt*).

B. Man soll die Hauptebenen bestimmen für

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz = 6.$$

Die cubische Gleichung für k ist

$$k^3 - 18k^2 + 99k - 162 = 0$$

von den Wurzeln 3, 6, 9. Dabei sind die drei Gleichungen

$$7\lambda - 2\mu = k\lambda, \quad -2\lambda + 6\mu - 2\nu = k\mu, \quad -2\mu + 5\nu = k\nu.$$

Die Substitution $k = 3$ in dieselben liefert $2\lambda = \mu = \nu$, und man erhält durch Multiplication mit ϱ und durch Substitution von x für $\lambda\varrho$, etc. für die eine der Axen die Gleichungen $2x = y = z$.

Die durch den Coordinatenanfangspunkt, der hier mit dem Centrum zusammenfällt, gehende Normalebene zu dieser Geraden ist also

$$x + 2y + 2z = 0.$$

*) Wir werden die zur Bestimmung derselben gewonnene Gleichung in Kap. VI noch genauer discutiren.

In gleicher Art werden die beiden andern Hauptebenen gefunden, als von den Gleichungen

$$2x - 2y + z = 0, \quad 2x + y - 2z = 0\text{ *)}.$$

74. Die von einer Fläche zweiten Grades mit parallelen Ebenen bestimmten Durchschnittslinien sind einander ähnlich und ähnlich gelegen.

Da jede Ebene zur Ebene der xy gewählt werden kann, so genügt für den Beweis die Betrachtung der durch diese gebildeten Schnittcurve, deren Gleichung durch die Substitution $z = 0$ aus der Gleichung der Fläche abgeleitet wird. Der durch eine zu ihr parallele Ebene erzeugte Schnitt wird erhalten, indem man die Gleichung zu parallelen Axen durch einen neuen Anfangspunkt der Coordinaten in der Axe der z transformirt, d. h. $z + c$ für z einsetzt und sodann $z = 0$ oder sofort $z = c$ einführt. Und da bei einer solchen Transformation die Coefficienten der höchsten Potenzen ungeändert bleiben, so erhalten wir in jedem Falle dieselben Coefficienten für x^2, xy und y^2 und die Cuven sind somit einander ähnlich und in ähnlicher Lage. („Kegelschn.“ V, Art. 242.)

Was aus geometrischen Gründen offenbar ist, dass der Ort der Centra der parallelen Schnitte der zur Stellung ihrer Ebenen conjugirte Durchmesser der Fläche ist, lässt sich ebenfalls leicht algebraisch nachweisen.

75. Wenn ϱ', ϱ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung des Art. 61 bezeichnen, so ist ihr Product $\varrho'\varrho''$ gleich dem durch den Coefficienten von ϱ^2 dividirten a_{44}. Transformiren wir nun die Gleichung zu parallelen Axen, um einen mit dem ersten parallelen Radius vector zu betrachten, so bleibt der Coefficient von ϱ^2

*) Wenn U die Glieder vom höchsten Grade in der Gleichung bezeichnet, und V die Function

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)x^2 + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)y^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)z^2 + 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})yz$$
$$+ 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})xz + 2(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})xy,$$

so ist die Gleichung der drei Hauptebenen für das Centrum als Anfangspunkt der Coordinaten durch die Determinante gegeben

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ U_1, & U_2, & U_3 \\ V_1, & V_2, & V_3 \end{vmatrix} = 0.$$

unverändert und das Product der beiden Werthe der Radien vectoren ist dem neuen a_{44} proportional.

Wenn also durch die gegebenen Punkte A, B beliebige parallele Sehnen gezogen werden, welche mit der Fläche die Punkte R, R'; S, S' respective bestimmen, so sind die Producte $RA \cdot AR'$, $SB \cdot BS'$ zu einander in einem constanten Verhältniss, nämlich im Verhältniss $U' : U''$, wenn wir durch U' und U'' die Resultate der Substitution der Coordinaten von A und B in die Gleichung der Fläche bezeichnen.

76. Wir schliessen hieran den Nachweis, wie die im Vorhergehenden aus der Discussion von geraden Linien aus dem Anfangspunkte der Coordinaten erhaltenen Sätze durch ein allgemeineres Verfahren erhalten werden können, welches dem in Art. 160 der „Kegelschnitte“ angewendeten analog ist. Wir bedienen uns dabei der grösseren Symmetrie wegen homogener Gleichungen mit vier Veränderlichen.

Man soll die Punkte bestimmen, in denen eine gegebene Fläche zweiten Grades durch die gerade Verbindungslinie der Punkte (x', y', z', w'), (x'', y'', z'', w'') geschnitten wird.

Wir betrachten als unbekannte Grösse das Verhältnis $\mu : \lambda$, nach welchem die bezeichnete Verbindungslinie in den Punkten getheilt wird, in denen sie die Fläche schneidet, so dass die Coordinaten dieses Punktes (Art. 8 und Art. 53, 2) zu

$$\lambda x' + \mu x'', \quad \lambda y' + \mu y'', \quad \lambda z' + \mu z'', \quad \lambda w' + \mu w''$$

respective proportional sind; und wir erhalten durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung der Fläche zur Bestimmung von $\mu : \lambda$ eine quadratische Gleichung

$$\lambda^2 U' + 2\lambda\mu P + \mu^2 U'' = 0.$$

In ihr werden die Coefficienten von μ^2 und λ^2, wie es durch die Bezeichnung angedeutet ist, leicht als die Resultate der Substitution der Coordinaten x'', y'', z'', w'' und x', y', z', w' in die Gleichung der Fläche erkannt; während der Coefficient von $\lambda\mu$ durch Taylor's Theorem oder in anderer Weise unter den Formen

$$x' U_1'' + y' U_2'' + z' U_3'' + w' U_4'',$$
$$x'' U_1' + y'' U_2' + z'' U_3' + w'' U_4'$$

erhalten wird. Wenn man aus dieser quadratischen Gleichung

die Werthe von $\mu:\lambda$ bestimmt, welche ihr genügen, so liefert ihre Substitution in die Ausdrücke

$$\frac{\lambda x' + \mu x''}{\lambda + \mu}, \quad \frac{\lambda y' + \mu y''}{\lambda + \mu}, \quad \text{etc.}$$

die Coordinaten der Punkte, in denen die gegebene gerade Linie die Fläche durchschneidet.

B. Die Bestimmung der Tangentialebenen, die durch eine gerade Linie, setzen wir den Schnitt der Ebenen ξ_i', ξ_i'', an die Fläche gehen, welche die quadratische homogene Gleichung in den Coordinaten ξ_i darstellt (Art. 66), geschieht ganz in gleicher Weise. Die Coordinaten ξ_i der gesuchten Ebenen, die von der Form

$$\lambda\xi_i' + \mu\xi_i''.$$

sind, müssen jener Gleichung genügen, deren linke Seite durch das Symbol Σ vertreten werden möge; ihre Substitution in dieselbe giebt drei Glieder links mit den resp. Factoren λ^2, $2\lambda\mu$ und μ^2 und es sind offenbar die mit λ^2 resp. μ^2 behafteten Polynome einfach die Resultate der Substitution der einfach-, resp. zweifachgestrichenen ξ_i an Stelle der Veränderlichen in das Polynom Σ, also durch Σ' und resp. Σ'' zu bezeichnen; für das mit $2\lambda\mu$ multiplicirte Polynom — es sei mit dem Symbol P bezeichnet — liefert die Taylor'sche Entwicklung die äquivalenten bilinearen Formen

$$\xi_1'\Sigma_1'' + \xi_2'\Sigma_2'' + \xi_3'\Sigma_3'' + \xi_4'\Sigma_4'',$$
$$\xi_1''\Sigma_1' + \xi_2''\Sigma_2' + \xi_3''\Sigma_3' + \xi_4''\Sigma_4',$$

wenn wir wieder durch die Indices die halben partiellen Differentiale von Σ nach den gleichnamigen Variabeln und durch die Striche die Substitution der gleichgestrichenen ξ_i an Stelle der Variabeln in jene anzeigen.

Die durch die Gleichung

$$\lambda^2\Sigma' + 2\lambda\mu\mathsf{P} + \mu^2\Sigma'' = 0$$

bestimmten beiden Werthe von $\mu:\lambda$ liefern durch Substitution in die $\lambda\xi_i' + \mu\xi_i''$ die Coordinaten der gesuchten Ebenen.

77. Wenn der Punkt (x', y', z', w') der Fläche selbst angehört, so ist $U' = 0$, und eine der Wurzeln der betrachteten quadratischen Gleichung ist $\mu = 0$; sie entspricht dem Punkte (x', y', z', w'), wie natürlich. Die Bedingung, unter welcher auch die zweite Wurzel den Werth Null hat, ist $P = 0$. Wenn also die Verbindungslinie der Punkte

$$(x', y', z', w'), \quad (x'', y'', z'', w'')$$

die Fläche im ersten Punkte berühren soll, so müssen die Coordinaten des zweiten Punktes die Gleichung

$$xU_1' + yU_2' + zU_3' + wU_4' = 0$$

erfüllen; und da (x'', y'', z'', w'') jeden Punkt in jeder durch (x', y', z', w') gehenden Tangente bezeichnen kann, so folgt, dass jede solche Tangente in der durch die eben geschriebene Gleichung repräsentirten Ebene liegt.

B. Mit ξ_i' als Coordinaten einer die Fläche berührenden Ebene ist $\Sigma' = 0$ und eine der Wurzeln der Gleichung im Beispiel des vorigen Art. Null, eben dieser Ebene entsprechend. Für $\mathsf{P} = 0$ und nur dann wird auch die zweite Wurzel Null, d. h. wenn die Schnittlinie der Ebenen ξ_i' und ξ_i'' die Fläche berühren soll, so müssen die ξ_i'' der Gleichung

$$\xi_1\Sigma_1' + \xi_2\Sigma_2' + \xi_3\Sigma_3' + \xi_4\Sigma_4' = 0$$

genügen, d. h. jede solche Tangente geht durch den Punkt, den die eben geschriebene Gleichung repräsentirt, den Berührungspunkt der Ebene ξ_i'.

78. Wenn der Punkt (x', y', z', w') nicht in der Oberfläche liegt und die Relation $P = 0$ durch die Coordinaten erfüllt ist, so nimmt die quadratische Gleichung des Art. 76 die Form $\lambda^2 U' + \mu^2 U'' = 0$ an und liefert daher für $\mu : \lambda$ numerisch gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die Verbindungsstrecke der gegebenen Punkte wird also (Art. 53, 4) durch die Fläche äusserlich und innerlich in demselben Verhältniss, d. h. sie wird harmonisch getheilt; jene Punkte heissen dann harmonische Pole der Fläche. Somit ist der Ort der harmonischen Theilpunkte der durch (x', y', z', w') gehenden Radien vectoren der Fläche die Polarebene

$$xU_1' + yU_2' + zU_3' + wU_4' = 0;$$

oder die Punkte x, y, z, w und x', y', z', w' sind harmonische Pole in Bezug auf die Fläche

$$U \equiv a_{11}x^2 + \cdots + 2a_{12}xy + \cdots\cdots = 0,$$

wenn man hat

$$x(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}w') + y(a_{12}x' + a_{22}y' + \cdot\cdot)$$
$$+ z(a_{13}x' + a_{23}y' + \cdot\cdot) + w(a_{14}x' + \cdot\cdot) = 0.$$

Anderseits wird, wenn die Ebene ξ_i' die Fläche $\Sigma = 0$ nicht berührt, die Bestimmungsgleichung des B. in Art. 76 rein qua-

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

dratisch, wenn die Substitutionen der ξ_i in P diesem den Werth Null geben; der Winkel der Ebenen wird durch die ihrem Büschel angehörenden Tangentialebenen harmonisch getheilt oder jene sind **harmonische Polarebenen** für sie. Und die Enveloppe der durch die Geraden in ξ_i' also gehenden harmonischen Polarebenen ist der Pol von ξ_i', den die Gleichung

$$\xi_1 \Sigma_1' + \xi_2 \Sigma_2' + \xi_3 \Sigma_3' + \xi_4 \Sigma_4' = 0$$

ausdrückt.

B. 1. Man erhält für die Schnittlinie der Polarebenen zweier Punkte (x', y', z', w'), (x'', y'', z'', w'') in Bezug auf die durch die allgemeine Gleichung dargestellte Fläche zweiten Grades aus der Tafel ihrer Coordinaten die Coordinatenwerthe

$$\begin{Vmatrix} U_1', & U_2', & U_3', & U_4' \\ U_1'', & U_2'', & U_3'', & U_4'' \end{Vmatrix}, \quad \begin{array}{l} \pi_{12}^* = U_1' U_2'' - U_2' U_1'', \cdots \\ \pi_{14}^* = U_1' U_4'' - U_4' U_1'', \cdots \end{array}$$

oder ausgeschrieben

$$\pi_{12}^* = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) p_{12} + (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) p_{23} + (a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}) p_{31}$$
$$+ (a_{11} a_{24} - a_{12} a_{14}) p_{14} + (a_{12} a_{24} - a_{14} a_{22}) p_{24} + (a_{13} a_{24} - a_{14} a_{23}) p_{34}; \text{ etc.}$$

allgemein für die Coordinaten der Polargeraden von p_{lm}

$$\pi_{ik}^* = \Sigma(a_{il} a_{km} - a_{kl} a_{im}) p_{lm}.$$

Die Untersuchung der Polargeraden lässt sich ebenso von zwei Ebenen aus für die Verbindungsgerade ihrer Pole führen.

B. 2. Die Polarebene der Spitze des Kegels ist unbestimmt; zu jeder beliebigen Geraden ist eine durch die Spitze gehende conjugirt (Art. 67 f.) und zugleich folgt, dass die Coordinaten s_i der Spitze den ersten Minoren der Discriminante proportional sind, die zu einer Zeile gehören; also

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} : A_{i4}$$

oder auch $\theta s_i s_k = A_{ik}$.

79. Wenn allgemein die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte die Fläche berühren soll, so muss die quadratische Gleichung des Art. 76 gleiche Wurzeln haben, und die Coordinaten der beiden Punkte müssen somit durch die Relation

$$U' U'' = P^2$$

verbunden sein. Wenn der Punkt (x', y', z', w') als fest gedacht wird, so ist diese Relation erfüllt, sobald der Punkt in einer der Tangenten gelegen ist, welche von ihm aus an die Oberfläche

gezogen werden können. Der durch alle diese Tangenten erzeugte Kegel hat in Folge dessen die Gleichung

$$UU' = P^2, \text{ für } P \equiv xU_1' + yU_2' + zU_3' + wU_4'.$$

B. Man soll die Gleichung des vom Punkte $(x', y' z')$ ausgegenden Tangentenkegels der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

finden.

Sie ist

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1\right)^2.$$

80. Man soll die Bedingung ausdrücken, unter welcher die Ebene

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega w = 0$$

die durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades gegebene Fläche berührt.

Wenn x, y, z, w die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen und k ein unbestimmter Factor ist, so gelten nach Art. 63 die Gleichungen

$$k\xi = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}w,$$
$$k\eta = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}w,$$
$$k\zeta = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}w,$$
$$k\omega = a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}w,$$

und wir können zwischen ihnen und der Gleichung der Ebene

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega w = 0$$

die Veränderlichen x, y, z, w eliminiren. Die Auflösung derselben für x, y, z, w giebt (vgl. „Vorlesungen" Art. 29)

$$\Delta x = k(A_{11}\xi + A_{12}\eta + A_{13}\zeta + A_{14}\omega),$$
$$\Delta y = k(A_{12}\xi + A_{22}\eta + A_{23}\zeta + A_{24}\omega),$$
$$\Delta z = k(A_{13}\xi + A_{23}\eta + A_{33}\zeta + A_{34}\omega),$$
$$\Delta w = k(A_{14}\xi + A_{24}\eta + A_{34}\zeta + A_{44}\omega),$$

mit den Bezeichnungen des Art. 68. Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega w = 0$$

liefert dann die geforderte Relation in der Form

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + A_{44}\omega^2 + 2A_{23}\eta\zeta + 2A_{13}\xi\zeta + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{14}\xi\omega + 2A_{24}\eta\omega + 2A_{34}\zeta\omega = 0,$$

wo die Ersetzung von w und ω durch Eins die auf Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten bezügliche Form giebt; oder für die Ebenencoordinaten ξ_i und die Punktcoordinaten x_i

$$A_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + \cdots + 2A_{14}\xi_1\xi_4 + \cdots = 0.$$

Man kann sie auch als Eliminationsresultat in der Form der gesäumten Discriminante schreiben

$$\begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \xi_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ \xi_2, & a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ \xi_3, & a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ \xi_4, & a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man von der Gleichung der Fläche

$$a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots\cdots = 0$$

in Ebenencoordinaten aus, also von

$$A_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots\cdots = 0$$

zu ihrer Gleichung in Punktcoordinaten übergeht, so erhält man diese in der Form

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1, & A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & A_{14} \\ x_2, & A_{12}, & A_{22}, & A_{23}, & A_{24} \\ x_3, & A_{13}, & A_{23}, & A_{33}, & A_{34} \\ x_4, & A_{14}, & A_{24}, & A_{34}, & A_{44} \end{vmatrix} = 0$$

und muss erwarten, dass ihre entwickelte Gestalt mit der ursprünglichen Punktcoordinatengleichung übereinstimme. In der That sind die ersten Minoren, schreiben wir A_{11}, A_{12}, A_{13} etc. der Determinante der A_{ik}, die ihre Coefficienten bei x_1^2, $2x_1x_2$, $2x_1x_3$ etc. sein werden, nach den Regeln der Determinantentheorie (vergl. „Vorlesungen", Art. 31) den Producten der gleich indicirten Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{13} etc. der ursprünglichen Gleichung in das Quadrat ihrer Discriminante Δ gleich, sodass $\mathsf{A}_{11}x_1^2 + \cdots + 2\mathsf{A}_{12}x_1x_2 + \cdots\cdots$ gleich der mit Δ^2 multiplicirten linken Seite der Originalgleichung ist. Mit dem Hinzutreten des Factors Δ^2 steht der besondere Fall des Kegels in Verbindung.

B. Da für einen Kegel, also mit $\Delta = 0$, die Producte der Coordinaten s_i und s_k seiner Spitze proportional sind zu A_{ik}, so wird die Gleichung der Kegelfläche zweiten Grades in Ebenen-Coordinaten zu

$$s_1^{\,2}\xi_1^{\,2} + \cdots + 2 s_2 s_3 \xi_2 \xi_3 + \cdots\cdots = 0$$

d. h. zu einem vollständigen Quadrat

$$(s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + s_3\xi_3 + s_4\xi_4)^2 = 0.$$

In der That berührt j e d e die Spitze enthaltende Ebene den Kegel, weil jede durch die Spitze gehende Gerade ihn da in zwei vereinigten Punkten schneidet. (Vergl. Art. 67.)

81. Die Bedingung, unter welcher die Fläche von einer durch

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0, \quad \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 + \eta_4 x_4 = 0$$

gegebenen Geraden berührt wird, oder die Gleichung der Fläche in den Strahlencoordinaten $(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i)$ der Art. 55 f., können wir durch die Bemerkung erhalten, dass die Gleichung der Tangentialebene im Berührungspunkte der Fläche mit der Geraden von der Form

$$(\xi_1 + \lambda\eta_1)x_1 + (\xi_2 + \lambda\eta_2)x_2 + (\xi_3 + \lambda\eta_3)x_3 + (\xi_4 + \lambda\eta_4)x_4 = 0$$

sein muss und dass sie somit die Bedingung der Berührung zwischen dieser und der Fläche sein wird; man wird also zwischen den durch Einführung von $\xi_1 + \lambda\eta_1$, $\xi_2 + \lambda\eta_2$, .. statt ξ, η, ζ, ω resp. geänderten ersten vier Gleichungen des Art. 80 und den beiden Gleichungen der Geraden die Grössen $\varkappa, \varkappa\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4$ eliminiren und erhält somit die Bedingung in der Form

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ 0, & 0, & \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \xi_1, & \eta_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ \xi_2, & \eta_2, & a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ \xi_3, & \eta_2, & a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ \xi_4, & \eta_4, & a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Sie enthält die Coefficienten der Gleichung der Fläche im zweiten Grade und ist zugleich eine quadratische Function der Determinanten $(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$, $(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)$ etc., welche nach Art. 55 durch π_{12}, π_{23}, etc. oder $p_{34}, p_{14}, \ldots.$ vertreten werden; sie ist

$$\Sigma(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\pi_{34}^2 + 2\Sigma(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\pi_{24}\pi_{34} + 2\Sigma a_{12}a_{34}(\pi_{14}\pi_{23} - \pi_{13}\pi_{24}) = 0,$$

schreiben wir symbolisch

$$\Psi = 0.$$

Wenn in der Bedingung des letzten Artikels die Substitution $\xi_i + \lambda\eta_i$ für ξ_i vollzogen und dann die Bedingung gebildet wird, unter welcher die dadurch entspringende Gleichung in λ gleiche Wurzeln hat, so ist das Resultat identisch mit dem Producte der Discriminante der Flächengleichung in die Bedingung dieses Artikels. Denn die zwei Ebenen, welche durch eine gegebene Linie gehen und eine Fläche zweiten Grades berühren, fallen zusammen, ebensowohl wenn jene Linie eine Tangente der Fläche ist, als wenn die Fläche einen Doppelpunkt besitzt.

Die Fläche ist in diesem Sinne ein specieller Strahlencomplex zweiten Grades; wie denn die durch einen Punkt gehenden und die in einer Ebene liegenden Strahlen desselben respective einen Kegel und eine Curve zweiten Grades bilden. (Art. 58.)

B. Man bilde die Bedingung, unter der zwei in Bezug auf die allgemeine Fläche zweiten Grades conjugirte oder polare Gerade p_{lm} und π_{ik}* sich schneiden. Sie ist, weil der Schnittpunkt und die Verbindungsebene als Pol und Polarebene, welche in einander liegen, ein Punkt und die zugehörige Tangentialebene der Fläche sind, die Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten, also von der Gleichung im Texte nicht wesentlich verschieden.

82. Man soll die Tangentialebenen bestimmen, welche durch eine Gerade p_{ik} an die Fläche zweiten Grades gehen, indem man ihre Berührungspunkte ermittelt.

Wir erhalten die Coordinaten ξ_i der durch drei Punkte x_i, y_i, z_i bestimmten Ebene durch Auflösung der Incidenzgleichungen

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,\ \xi_1 y_1 + \cdots = 0,\ \xi_1 z_1 + \cdots = 0,$$

$$\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4 = \begin{vmatrix} x_2, & x_3, & x_4 \\ y_2, & y_3, & y_4 \\ z_2, & z_3, & z_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3, & x_4, & x_1 \\ y_3, & y_4, & y_1 \\ z_3, & z_4, & z_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_4, & x_1, & x_2 \\ y_4, & y_1, & y_2 \\ z_4, & z_1, & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix}$$

oder für θ als einen noch unbestimmten Proportionalitätsfactor

$$\begin{aligned}
\theta\xi_1 &= \phantom{-x_1p_{34}}\quad x_2p_{34} - x_3p_{24} + x_4p_{23},\\
\theta\xi_2 &= -x_1p_{34} \phantom{- x_2p_{14}}\quad + x_3p_{14} + x_4p_{31},\\
\theta\xi_3 &= x_1p_{24} - x_2p_{14} \phantom{+ x_3p_{14}}\quad + x_4p_{12},\\
\theta\xi_4 &= -x_1p_{23} - x_2p_{31} - x_3p_{12} \qquad .
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Coordinaten irgend einer durch die Gerade y_iz_i gehenden Ebene mittelst eines Punktes x_i ausser ihr, nach dem sie geht. Nehmen wir also für die x_i die Differentialcoefficienten U_i, die dem Punkte entsprechen, so drücken wir aus, dass die Ebene einen Punkt enthält, dessen Polarebene sie selbst ist, d. h. den Berührungspunkt einer durch die Gerade p_{ik} gehenden Tangentialebene der Fläche.

Damit gehen diese Gleichungen aber über in vier nach den x_i homogene lineare Gleichungen, deren Verträglichkeit das Verschwinden der Determinante ihrer Coefficienten erfordert; nämlich in

$$\begin{aligned}
&\theta a_{11}x_1 + (\theta a_{12} - p_{34})x_2 + (\theta a_{13} + p_{24})x_3 + (\theta a_{14} - p_{23})x_4 = 0,\\
&(\theta a_{12} + p_{34})x_1 + \theta a_{22}x_2 + (\theta a_{23} - p_{14})x_3 + (\theta a_{24} - p_{31})x_4 = 0,\\
&(\theta a_{13} - p_{24})x_1 + (\theta a_{23} + p_{14})x_2 + \theta a_{33}x_3 + (\theta a_{34} - p_{12})x_4 = 0,\\
&(\theta a_{14} + p_{23})x_1 + (\theta a_{24} + p_{31})x_2 + (\theta a_{34} + p_{12})x_3 + \theta a_{44}x_4 = 0,
\end{aligned}$$

also mit der Bedingung für θ

$$\begin{vmatrix}
\theta a_{11}, & \theta a_{12} - p_{34}, & \theta a_{13} + p_{24}, & \theta a_{14} - p_{23}\\
\theta a_{12} + p_{34}, & \theta a_{22}, & \theta a_{23} - p_{14}, & \theta a_{24} - p_{31}\\
\theta a_{13} - p_{24}, & \theta a_{23} + p_{14}, & \theta a_{33}, & \theta a_{34} - p_{12}\\
\theta a_{14} + p_{23}, & \theta a_{24} + p_{31}, & \theta a_{34} + p_{12}, & \theta a_{44}
\end{vmatrix} = 0.$$

Man entwickelt diese Determinante durch Zerlegung nach ihren binomischen Elementen nach Potenzen von θ und erkennt zunächst, dass der Factor von θ^4 die Discriminante der Gleichung der Fläche zweiten Grades ist; sodann dass $\theta = 0$ der Bedingung genügt, weil die Determinante damit auf die schiefsymmetrische Form

$$\begin{vmatrix}
0, & -p_{34}, & p_{24}, & -p_{23}\\
p_{34}, & 0, & -p_{14}, & -p_{31}\\
-p_{24}, & p_{14}, & 0, & -p_{12}\\
p_{23}, & p_{32}, & p_{12}, & 0
\end{vmatrix}$$

kommt, die als gleich dem vollständigen Quadrat

$$(p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24})^2$$

verschwinden muss. Die Frage nach der geometrischen Bedeutung der Wurzel 0 zeigt sofort, dass sie eine Doppelwurzel ist; denn nach Art. 76 entspricht sie den zwei Schnittpunkten der Linie p_{ik} mit der Fläche. Demgemäss verschwindet die Summe der vier Determinanten, die den Factor von θ in der Entwicklung bilden, was ihr Anblick leicht bestätigt; und ebenso offenbar verschwindet die Summe der vier Determinanten, die den Factor von θ^3 bilden — die Glieder ihrer Entwicklung mit demselben Factor von p_{ik} zerstören sich paarweis, sodass wir endlich nur die Summe der sechs Determinanten zu untersuchen haben, die den Factor von θ^2 bilden. Jene sind in den Coefficienten der Gleichung zweiten Grades sowie in den Coordinaten der Geraden quadratisch und man erkennt leicht, dass diese die Function Ψ des Art. 81 ist,

$$\Sigma(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)p_{12}^2 + 2\Sigma(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})p_{31}p_{12} \text{ etc.},$$

sodass unsere Bedingungsgleichung die einfache Form erhält

$$\theta^2\Delta + \Psi = 0.$$

In der That fallen die Berührungspunkte zusammen, wenn p_{ik} selbst die Fläche berührt, also wenn Ψ gleich Null ist; und durch eine Gerade von allgemeiner Lage gehen an einen Kegel ($\Delta = 0$) keine Tangentialebenen. Die Substitution einer Wurzel unserer Gleichung, also $\theta = \pm\sqrt{\frac{-\Psi}{\Delta}}$ in die oben geschriebenen Bedingungsgleichungen macht dieselben verträglich und führt zur Bestimmung der Coordinaten des einen und des andern Berührungspunktes; die Verbindungsgerade beider ist die Polargerade von p_{ik} und die Gerade im Problem des Art. 76. Offenbar giebt die Anwendung des Princips der Dualität auf die gegenwärtige Untersuchung eine Lösung der Aufgabe des Art. 76 von den Schnittpunkten einer Geraden, und es ist darin begründet, dass bei der Auflösung der dortigen Grundgleichung

$$\lambda^2 U' + 2\lambda\mu P + \mu^2 U'' = 0$$

nach $\frac{\mu}{\lambda}$ unter dem Quadratwurzelzeichen dieselbe Function $-\Psi$ erscheint, die mit Art. 81 hier hervortrat — nur in anderer Bezeichnung, als $P^2 - U'U''$ nämlich; wir müssen dieses er-

innern, um aus unsern Ergebnissen die vollständigen Schlüsse zu ziehen wie folgt: Für Δ positiv und Ψ positiv resp. negativ sind die Schnittpunkte der Geraden und die Berührungspunkte der von ihr ausgehenden Tangentialebenen zugleich imaginär resp. reell; für Δ negativ sind bei positivem Ψ die Schnittpunkte imaginär, die Berührungspunkte reell, und bei negativem Ψ die Schnittpunkte reell und die Berührungspunkte imaginär.

Wenn durch eine gerade Linie drei Tangentialebenen an eine Fläche zweiten Grades gehen, so trägt sie unzählig viele, also lauter Tangentialebenen derselben; und wenn sie drei Punkte mit der Fläche gemein hat, so gehören alle Punkte derselben an, sie liegt in der Fläche. Die Gleichung des Art. 76 wird aber identisch Null für

$$U' = 0, \quad P = 0, \quad U'' = 0$$

d. h. für die gleichzeitige Erfüllung von

$$\begin{aligned} U_1'x_1' + U_2'x_2' + U_3'x_3' + U_4'x_4' &= 0, \\ U_1'x_1'' + U_2'x_2'' + U_3'x_3'' + U_4'x_4'' &= 0, \\ U_1''x_1' + U_2''x_2' + U_3''x_3' + U_4''x_4' &= 0, \\ U_1''x_1'' + U_2''x_2'' + U_3''x_3'' + U_4''x_4'' &= 0, \end{aligned}$$

deren geometrische Bedeutung die Identität der Verbindungslinie der beiden Punkte x_i' und x_i'' mit ihrer Polargeraden ist. Wir sehen, wie zum Schneiden der Polargeraden im Falle der Berührung mit der Fläche als weitere Specialität der Lage zur Fläche das Inihrliegen oder die Identität mit der Polargeraden tritt.

Die Erinnerung dass

$$\Psi = U'U'' - P^2$$

ist und die Bemerkung, dass deshalb die Differentiation von Ψ nach irgend einem der Coefficienten der Flächengleichung die Form

$$\alpha U' + \beta U'' + \gamma P$$

hat, zeigt dass für jede ganz in der Fläche zweiten Grades enthaltene Gerade durch ihre Coordinaten die zehn Relationen

$$\frac{\partial \Psi}{d a_{ik}} = 0$$

erfüllt sind und dass dieselben für nicht mehr als drei unabhängige Relationen zählen können. (Art. 45.)

Wir werden die in diesem und den folgenden Kapiteln leitenden Beziehungen der Polarität in Bezug auf Flächen zweiten Grades noch in allgemeinerer Form entwickeln. (Vergl. Art. 134.)

B. Für die auf ein Polartetraeder bezogene Gleichung der Fläche werden die Coordinaten der zu p_{ik} polarconjugirten Geraden einfach

$$\theta \pi_{ik}^* = a_{ii} a_{kk} p_{ik}$$

und daher für das Zusammenfallen solcher Paare, womit π_{ik}^* zu p_{lm} proportional wird,

$$k p_{12} = a_{33} a_{44} p_{34}, \quad k p_{34} = a_{11} a_{22} p_{12}; \quad \text{etc.},$$

also dass man durch Multiplication der Paare erhält

$$k^2 = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}, \quad k = \pm \sqrt{a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}}$$

und somit durch Einsetzen dieses Werthes

$$p_{12} \sqrt{a_{11} a_{22}} = \pm p_{34} \sqrt{a_{33} a_{44}}, \quad \text{etc.}$$

die Gleichungen von drei Paaren linearer Complexe, deren jedem sämmtliche Geraden der Fläche angehören; man unterscheidet nach der Zugehörigkeit zu dem Complex mit dem obern resp. untern Zeichen zwei Schaaren dieser Geraden, nämlich den Complexen mit $+$ gehört die eine und den drei Complexen mit $-$ die andere Schaar der Geraden an. Ueberdies entstehen durch Elimination des k zwischen den Bedingungsgleichungen die Gleichungen von speciellen Complexen zweiten Grades wie

$$a_3 p_{23} p_{34} = a_1 p_{12} p_{14}, \quad a_4 p_{14} p_{34} = a_2 p_{12} p_{23}, \quad \text{etc.}$$

VI. Kapitel.

Classification der Flächen zweiten Grades.

83. Es ist die Aufgabe dieses Kapitels, die allgemeine Gleichung zweiten Grades auf die einfachste Form zu reduciren, deren sie fähig ist, und die verschiedenen Flächen zu unterscheiden, welche sie darstellen kann.

Wir beginnen die Untersuchung unter der Voraussetzung, dass die nach Art. 68 durch A_{44} bezeichnete Grösse

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2$$

nicht gleich Null sei.

Indem wir die Gleichung zu parallelen Axen durch das Centrum transformiren, verschwinden die Coefficienten a_{14}, a_{24}, a_{34} und dieselbe erhält die Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{12}xy + a'_{44} = 0,$$

wenn wir durch a'_{44} das Resultat der Substitution der Coordinaten des Centrums in die Gleichung der Fläche bezeichnen. Indem man erinnert, dass

$$2U' = x'U_1' + y'U_2' + z'U_3' + w'U_4'$$

ist und dass die Coordinaten des Centrums die ersten drei Glieder U_1', U_2', U_3' verschwinden machen, berechnet man leicht, dass

$$a_{44}' = \frac{a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}}{A_{44}} = \frac{\Delta}{A_{44}}$$

ist, wieder in den Bezeichnungen des Art. 68.

84. Nachdem man durch Transformation zu parallelen Axen die Coefficienten von x, y, z auf Null reducirt hat, kann man durch eine Richtungsänderung der Axen unter Beibehaltung des Centrums als Anfangspunkt auch die

Coefficienten von yz, zx, xy zum Verschwinden bringen und so die Gleichung auf die Form reduciren

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + a'_{44} = 0,$$

für welche (vergl. Art. 64) die Coordinatenebenen mit der unendlich fernen Ebene ein Polartetraeder der Fläche bilden. Wir erfahren weiterhin (Art. 134), dass die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten die gleiche Form hat, und finden dieselbe auch aus Art. 80 sofort, nämlich

$$\frac{\xi^2}{a'_{11}} + \frac{\eta^2}{a'_{22}} + \frac{\zeta^2}{a'_{33}} + \frac{1}{a'_{44}} = 0.$$

Nach Art. 81 erhält aber auch die Gleichung in Liniencoordinaten π_{ik} oder p_{ik} dieselbe Form, nämlich $\Sigma a'_{11} a'_{22} \pi^2_{34} = 0$. Darum genügt die Weiterführung in Punktcoordinaten.

Es kann nach Art. 17 leicht nachgewiesen werden, dass zum Vollzug dieser Reduction über eine hinreichende Anzahl von Constanten verfügt wird; wir ziehen es aber vor, nach Analogie entsprechender Entwicklungen in der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte" zu zeigen, dass gewisse Functionen der Coefficienten beim Uebergange von einem rectangulären Axensystem zu einem andern unverändert bleiben und dass die neuen Coefficienten a_{11}, a_{22}, a_{33} mittelst derselben ausgedrückt werden können.

Wenn wir voraussetzen, dass die allgemeinste Transformation, welche von der Form

$$x = \lambda\overline{x} + \mu\overline{y} + \nu\overline{z}, \quad y = \lambda'\overline{x} + \mu'\overline{y} + \nu'\overline{z},$$
$$z = \lambda''\overline{x} + \mu''\overline{y} + \nu''\overline{z}$$

ist, die Function

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + 2a_{12}xy$$

in

$$a'_{11}\overline{x}^2 + a'_{22}\overline{y}^2 + a'_{33}\overline{z}^2 + 2a'_{23}\overline{yz} + 2a'_{13}\overline{zx} + 2a'_{12}\overline{xy}$$

überführt, was wir durch $U = \overline{U}$ ausdrücken wollen, so haben wir unter der Voraussetzung, dass beide Systeme rectangulär sind,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2,$$

welches durch $S = \overline{S}$ dargestellt werden mag.

Für eine beliebige Constante k ist in Folge dessen

$$kS - U = k\overline{S} - \overline{U},$$

und wenn die linke Seite dieser Identität in Factoren zerlegbar ist, so muss es auch die rechte Seite sein, d. h. die Discriminanten beider Polynome $kS - U$, $k\overline{S} - \overline{U}$ müssen für den nämlichen Werth der Constanten k verschwinden.

Nun ist die Discriminante von $(kS - U)$

$$k^3 - k^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + k(a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{12}^2)$$
$$- (a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2),$$

und die Vergleichung der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von k in diesem und dem Ausdrucke der andern Discriminante liefert für die Ueberführung der Gleichung von einem System rectangulärer Axen zu einem andern die Bedingungen

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33},$$
$$a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{12}^2$$
$$= a'_{22}a'_{33} + a'_{33}a'_{11} + a'_{11}a'_{22} - a'^2_{23} - a'^2_{13} - a'^2_{12},$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2$$
$$= a'_{11}a'_{22}a'_{33} + 2a'_{23}a'_{13}a'_{12} - a'_{11}a'^2_{23} - a'_{22}a'^2_{13} - a'_{33}a'^2_{12} \text{*)}.$$

85. Diese drei Gleichungen gestatten sogleich die Bestimmung derjenigen Transformation, für welche die Coefficienten a_{23}, a_{12}, a_{13} verschwinden, denn sie bestimmen die Coefficienten der cubischen Gleichung, welche die neuen Werthe a_{11}, a_{22}, a_{33} zu ihren Wurzeln hat. Dieselbe ist daher

$$a'^3_{11} - (a_{11} + a_{22} + a_{33})a'^2_{11} + (a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{12}^2)a'_{11}$$
$$- (a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) = 0 \text{**)},$$

oder in anderer Ausdrucksform

$$(a'_{11} - a_{11})(a'_{11} - a_{22})(a'_{11} - a_{33}) - a_{23}^2(a'_{11} - a_{11}) - a_{13}^2(a'_{11} - a_{22})$$
$$- a_{12}^2(a'_{11} - a_{33}) - 2a_{23}a_{13}a_{12} = 0.$$

*) Die Bildung der entsprechenden Gleichungen für schiefwinklige Coordinatensysteme hat keine Schwierigkeit. Nach Art. 19 substituiren wir dann für S

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

und indem wir genau so wie im Texte verfahren, erhalten wir eine in k cubische Gleichung, deren Coefficienten durch die Transformation ihre gegenseitigen Verhältnisse nicht ändern.

**) Es ist dieselbe cubische Gleichung, die wir im Art. 73 erhalten haben.

Cauchy hat folgendermassen bewiesen, dass die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung reell sind. Sie sei in der Form

$$(a_{11}' - a_{11})\{(a_{11}' - a_{22})(a_{11}' - a_{33}) - a_{23}^2\} - a_{13}^2(a_{11}' - a_{22})$$
$$- a_{12}^2(a_{11}' - a_{33}) - 2a_{23}a_{13}a_{12} = 0$$

geschrieben und α, β sollen die Werthe von a_{11}' bezeichnen, für welche $(a_{11}' - a_{22})(a_{11}' - a_{33}) - a_{23}^2 = 0$ wird; dann ist die grössere dieser Wurzeln α nothwendig grösser und die kleinere β nothwendig kleiner als jeder der Werthe a_{22} und a_{33} *). Durch die Substitution $a_{11}' = \alpha$ reducirt sich dann die gegebene cubische Gleichung auf

$$-\{(\alpha - a_{22})a_{13}^2 + 2a_{23}a_{13}a_{12} + (\alpha - a_{33})a_{12}^2\},$$

in welcher Form die innerhalb der Klammern stehende Grösse ein vollständiges Quadrat ist, weil man hat

$$(\alpha - a_{22})(\alpha - a_{33}) = a_{23}^2;$$

d. h. das Resultat dieser Substitution ist wesentlich negativ. Für die Substitution $a_{11}' = \beta$ erhält man hingegen den Werth

$$(a_{22} - \beta)a_{13}^2 - 2a_{23}a_{13}a_{12} + (a_{33} - \beta)a_{12}^2,$$

auch ein vollständiges Quadrat und somit wesentlich positiv. Da somit die Substitutionen $a_{11}' = \infty$, $a_{11}' = \alpha$, $a_{11}' = \beta$, $a_{11}' = -\infty$ abwechselnd positive und negative Resultate liefern, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, welche zwischen den durch jene Substitutionen bezeichneten Grenzen liegen. Dieselben sind die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 in der transformirten Gleichung, es ist aber willkürlich, welche von ihnen wir als den Coefficienten von x^2 oder y^2 nehmen,. weil wir jede der Axen als Axe der x bezeichnen können.

Den Beweis eines allgemeineren Satzes, von welchem dieser als ein specieller Fall erscheint, findet man in den „Vorlesungen" VI.

86. Die Flächen zweiten Grades werden nach den Vorzeichen der Wurzeln der vorbesprochenen cubischen Gleichung classificirt.

*) Man erkennt dies entweder durch wirkliche Auflösung oder durch die successiven Substitutionen $a_{11}' = \infty$, $a_{11}' = a_{22}$, $a_{11}' = a_{33}$, $a_{11}' = -\infty$, als welche die Resultate $+$, $-$, $-$, $+$ geben, zum Beweise dass die eine der Wurzeln grösser als a_{22} und die andere kleiner als a_{33} ist.

I. Wenn alle ihre Wurzeln positiv sind, so wird die Gleichung der Fläche in die Form

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + a'_{44} = 0 \text{*)}$$

gebracht. Die Fläche bestimmt dann in jeder der drei Axen reelle Abschnitte, und wenn man dieselben durch a, b, c respective bezeichnet, so kann die Gleichung in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

geschrieben werden. Da es willkürlich ist, welche der Axen zur Axe der x gewählt wird, so wollen wir voraussetzen, dass der Abschnitt a, welcher der Axe der x angehört, der längste, und der Abschnitt c, welcher der Axe der z angehört, der kürzeste sei.

Durch Transformation zu Polarcoordinaten wird die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2},$$

und kann wegen $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ in jeder der Formen

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\beta + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\gamma,$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\alpha - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos^2\beta$$

geschrieben werden, aus welchen sogleich erhellt, dass a der grösste und c der kleinste Werth des Radius vector ist. Die Fläche ist demnach in jeder Richtung begrenzt und wird als Ellipsoid bezeichnet.

Jeder ebene Querschnitt derselben ist eine Ellipse. Der einer Ebene $z = k$ entsprechende Schnitt ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2},$$

und für alle $k > c$ existirt daher kein reeller Schnitt mehr, oder die Fläche liegt ganz zwischen den Ebenen $z = \pm c$. Aehnliches gilt für die andern Axen.

Wenn zwei der Coefficienten z. B. a und b einander gleich sind, so sind alle Schnitte durch Ebenen, die der xy-Ebene

*) Im Folgenden wird a'_{44} $\left(= \frac{\Delta}{A_{44}}\right.$, Art. 83$\left.\right)$ negativ vorausgesetzt. Wäre es positiv, so ändern wir die Zeichen der Gleichung; wäre es Null, so stellt die Fläche einen Kegel dar. (Art. 68.)

parallel sind, Kreise; die Fläche ist eine Umdrehungsfläche, erzeugt durch Umdrehung einer Ellipse um ihre grosse oder um ihre kleine Axe, je nachdem die gleichen Coefficienten die beiden grösseren oder die beiden kleineren sind. Man bezeichnet diese Flächen als das verlängerte und das abgeplattete Rotations-Ellipsoid oder als Ei- und Planet-Ellipsoid.

Wenn alle drei Coefficienten einander gleich sind, ist die dargestellte Fläche eine Kugel; alle Durchmesser sind gleich, und sind Haupt- und Umdrehungsaxen.

87. II. Sei eine der drei Wurzeln der cubischen Gleichung negativ.

Die Gleichung kann dann in der Form geschrieben werden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo $a > b$ ist, und man sieht, dass die Axe der z die Fläche nicht in reellen Punkten schneidet. Die Polargleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

zeigt, dass der Radius vector die Fläche schneidet oder nicht schneidet, je nachdem die rechte Seite der Gleichung positiv oder negativ ist; und dass ferner für die Voraussetzung, dass sie gleich Null oder dass $\varrho = \infty$ sei, ein System von Radien vectoren erhalten wird, welches die Durchmesser, die die Fläche schneiden, von denen trennt, die sie nicht schneiden. Durch Rückgang zu den rechtwinkligen Coordinaten wird aus ihm die Gleichung des Asymptotenkegels erhalten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Die ebenen Schnitte der Fläche, welche der Ebene der xy parallel sind, sind elliptisch, diejenigen, welche den beiden andern Hauptebenen parallel sind, hyperbolisch; diese wechseln mit $x = a$ resp. $y = b$ die conjugirte und die reelle Axe. Da die Gleichung des elliptischen Schnittes für die Ebene $z = k$ durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

gegeben ist, so entspricht jedem Werthe von k ein reeller Durchschnitt und die Fläche ist daher ohne Unterbrechung. Man nennt sie ein einfaches Hyperboloid oder Hyperboloid mit einem Mantel.

Für $a = b$ erhält man eine Umdrehungsfläche derselben Art.

88. III. Wenn zwei Wurzeln der cubischen Gleichung negativ sind, so kann die Gleichung in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

geschrieben werden.

Die der Ebene yz parallelen Querschnitte sind Ellipsen, für $x = k$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1;$$

die Schnitte, welche den beiden andern Hauptebenen parallel geführt werden, sind Hyperbeln mit gleichgerichteten Hauptaxen. Jene Ellipse ist nicht reell, so lange die Constante k zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ liegt; jede Ebene $x = k$, für welche k ausserhalb jener Grenzen liegt, schneidet aber die Fläche in einer reellen Curve, d. i. kein Theil der Fläche liegt zwischen den Ebenen $x = \pm a$, die Fläche besteht aus zwei getrennten Theilen, welche ausserhalb dieser begrenzenden Ebenen liegen. Man nennt sie das zweifache Hyperboloid oder das Hyperboloid mit zwei Mänteln. Für $b = c$ hat man die Umdrehungsfläche derselben Art.

Die Anschauung der Umdrehungsflächen bietet eine sehr einfache Unterscheidung zwischen beiden Arten von Hyperboloiden dar; denn wenn eine Hyperbel um ihre transversale Axe gedreht wird, so besteht die erzeugte Fläche nothwendig aus zwei getrennten Theilen; sie ist aber ein einfaches Hyperboloid, wenn die conjugirte Axe zur Drehungsaxe gewählt wird.

IV. Unter der Voraussetzung, dass alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung negativ sind, nimmt die allgemeine Gleichung die Form an

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

der durch keine reellen Werthe der Coordinaten genügt wird. Die Fläche kann als imaginäres Ellipsoid benannt werden.

V. Wenn das absolute Glied den Werth Null erhält, so haben wir den Grenzfall der Kegelfläche; die Formen I und IV geben die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

welcher keine andern reellen Werthe der Coordinaten Genüge leisten, als $x = y = z = 0$, — daher Nullellipsoid insbesondere Nullkugel. Den Formen II und III entspringt die Gleichung der Kegelfläche in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

(Vergl. Art. 80, B.; 78, 2; 67.)

Nach den angezogenen Entwicklungen ist es erforderlich, den Fall der Gleichung in Ebenencoordinaten

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots = 0,$$

in welchem ihre Discriminante (vergl. Art. 68)

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44} + 2\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{34} + \cdot\cdot - \alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{14}^2 - \cdot\cdot\cdot$$
$$+ \alpha_{23}^2\alpha_{14}^2 + \cdot\cdot - 2\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{24}\alpha_{34} - \cdot\cdot$$

verschwindet, noch besonders zu untersuchen.

Nach dem Schluss des Art. 78 ist das Verschwinden der Discriminante die Bedingung für das gleichzeitige Gelten der vier Gleichungen

$$\alpha_{11}\xi_1' + \alpha_{12}\xi_2' + \alpha_{13}\xi_3' + \alpha_{14}\xi_4' = 0, \quad \alpha_{12}\xi_1' + \alpha_{22}\xi_2' + \alpha_{23}\xi_3' + \alpha_{24}\xi_4' = 0,$$
$$\alpha_{13}\xi_1' + \alpha_{23}\xi_2' + \alpha_{33}\xi_3' + \alpha_{34}\xi_4' = 0, \quad \alpha_{14}\xi_1' + \alpha_{24}\xi_2' + \alpha_{34}\xi_3' + \alpha_{44}\xi_4' = 0.$$

Dieselben bestimmen die Coordinaten σ_i einer festen Ebene, durch deren Gerade je zwei mit ihr zusammenfallende Tangentialebenen der Fläche gehen, eine Doppelebene der Fläche, deren Pol absolut unbestimmt ist. Diese wird von allen andern Ebenen der Fläche in den Tangenten eines Kegelschnittes geschnitten, so dass durch jede derselben ein Büschel von Ebenen der Fläche geht. Weil die Producte jener Coordinaten in Paaren also $\sigma_i\sigma_k$ den ersten Minoren A_{ik} der Discriminante von

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots = 0$$

proportional sind, so wird die Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten

$$\sigma_1^2 x_1^2 + \cdots + 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 + \cdots = 0$$

und somit ein vollständiges Quadrat, nämlich

$$(\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3 + \sigma_4 x_4)^2 = 0.$$

In dem so bestimmten Sinne ist das Polarsystem der Fläche zweiter Classe mit verschwindender Discriminante identisch mit

dem Polarsystem des besagten Kegelschnittes in der Doppelebene — wie das der Fläche zweiter Ordnung mit verschwindender Discriminante identisch mit dem des Kegels vom zweiten Grade aus dem Doppelpunkt (Art. 67 Schluss; vergl. Art. 134).

In dieser Aufzählung sind alle diejenigen Arten von Flächen zweiten Grades enthalten, welche ein bestimmtes Centrum im Endlichen haben.

B. 1. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy = 6.$

Die cubische Gleichung der Discriminante ist

$$a_{11}'^3 - 18a_{11}'^2 + 99a_{11}' - 162 = 0;$$

die transformirte Gleichung zeigt ein Ellipsoid an

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2.$$

B. 2. $11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy - 8yz + 4zx = 12.$

Die cubische Gleichung der Discriminante ist

$$a_{11}'^3 - 27a_{11}'^2 + 180a_{11}' - 324 = 0,$$

die transformirte Gleichung $x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 4$, also ein Ellipsoid.

B. 3. $7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy + 12yz - 12zx = \pm 84.$

Die cubische Gleichung der Discriminante ist

$$a_{11}'^3 - 343a_{11}' - 2058 = 0,$$

die transformirte Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = \pm 12,$$

d. h. je nach dem Zeichen des letzten Gliedes ein einfaches oder ein zweifaches Hyperboloid.

B. 4. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 4yz + 8zx = 8.$

Die cubische Gleichung der Discriminante ist

$$a_{11}'^3 - 9a_{11}'^2 - 3a_{11}' + 20 = 0.$$

Die Regel der Vorzeichen von Descartes beweist, dass diese Gleichung zwei positive Wurzeln hat, indess die dritte negativ ist; die gegebene Gleichung repräsentirt daher ein einfaches Hyperboloid.

89. Wir gehen nun zur Betrachtung des Falles über, in welchem $A_{44} = 0$ ist. Für denselben haben wir im Art. 70 gesehen, dass es dann unmöglich ist, durch Verlegung des Anfangspunktes die Glieder vom ersten Grade zum Verschwinden zu

bringen. Aber es ist offenbar gleichgültig, ob wir wie im Art. 70 mit der Transformation zu einem neuen Anfangspunkte beginnen, um die Coefficienten von x, y, z auf Null zu reduciren, oder ob wir zuerst, wie wir in diesem Kapitel gethan, zu neuen Axen mit demselben Anfangspunkte übergehen, um das von den Gliedern vom zweiten Grade gebildete Polynom auf die Form $a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2$ zu bringen; da für $A_{44} = 0$ die erste Transformation unmöglich ist, so beginnen wir mit der zweiten. Für diese Transformation zeigt der Umstand, dass das absolute Glied der cubischen Gleichung des Art. 85 gleich A_{44} ist, sofort, dass eine der drei Wurzeln derselben, d. i. eine der drei Grössen a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} gleich Null sein muss, dass also die Glieder zweiten Grades auf die Form $a'_{11}x^2 \pm a'_{22}y^2$ reducirt werden können. Und zu demselben Schluss führt die Bemerkung, dass $A_{44} = 0$ die Bedingung ist, unter welcher das Polynom der Glieder zweiten Grades in zwei reelle oder imaginäre Factoren zerlegbar ist, unter welcher es also auch als die Summe oder Differenz zweier Quadrate ausgedrückt werden kann.

Auf diesem Wege wird die allgemeine Gleichung in die Form

$$a'_{11}x^2 \pm a'_{22}y^2 + 2a'_{14}x + 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a_{44} = 0$$

gebracht, und wir können dann durch Uebergang zu einem neuen Anfangspunkte der Coordinaten die Coefficienten von x und y mit Null identisch machen, nicht aber denjenigen von z, so dass die Gleichung auf

$$a'_{11}x^2 \pm a'_{22}y^2 + 2a'_{34}z + a'_{44} = 0$$

reducirt wird. Die Discussion dieser Form bietet folgende Fälle dar.

I. Sei $a'_{34} = 0$. Die Gleichung enthält dann z nicht und repräsentirt daher nach Art. 25 einen Cylinder, welcher elliptisch oder hyperbolisch ist, je nachdem a'_{11} und a'_{22} dieselben oder verschiedene Vorzeichen haben. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein Centrum, weil die Glieder vom ersten Grade aus der Gleichung verschwunden sind, aber jeder Punkt in der Axe der z hat offenbar die nämlichen Eigenschaften und dieselbe wird daher als die Axe des Cylinders bezeichnet. Die Möglichkeit der Existenz einer geraden Linie, in der jeder Punkt ein Centrum der Fläche ist, wird dadurch angezeigt, dass Zähler und Nenner der Coordinaten des Centrums gleichzeitig identisch verschwinden. (Art. 70, Anmerkung.)

Wenn ausser a'_{34} auch a'_{44} gleich Null wird, so degenerirt die Fläche in zwei reelle oder imaginäre sich in der Axe durchschneidende Ebenen.

Für die allgemeine quadratische Gleichung in Punktcoordinaten verschwinden die ersten Minoren ihrer Discriminante, der Doppelpunkt, die Spitze des Kegels wird unbestimmt (Art. 78, B. 2); die Liniencoordinatengleichung wird ein vollständiges Quadrat, das Quadrat der Gleichung der Doppellinie, der Schnittlinie der beiden Ebenen.

Die Discussion der Gleichung in Ebenencoordinaten liefert ebenso zwei Punkte als Fläche zweiter Classe und ein Büschel von Doppelebenen.

Man wird die Polarentheorie des Kap. V (vergl. Art. 134) leicht für diese Fälle specialisiren.

II. Sei $a'_{34} \gtrless 0$. Durch eine Veränderung des Anfangspunktes bringen wir das absolute Glied auf den Werth Null und reduciren also die Gleichung auf die Form

$$a'_{11}x^2 \pm a'_{22}y^2 + 2a'_{34}z = 0.$$

Wir setzen zuerst voraus, dass das positive Vorzeichen von a'_{22} gelte, und erkennen, dass die durch Ebenen, welche den Coordinatenebenen xz oder yz parallel sind, gebildeten Schnitte Parabeln, die Schnitte mit zur Ebene der xy parallelen Ebenen aber Ellipsen sind. Man nennt daher die von ihr dargestellte Fläche das elliptische Paraboloid. Dasselbe ist offenbar nur nach dem einen Sinne der Axe z ausgedehnt, weil der der Ebene $z = k$ entsprechende Schnitt $a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 = -2ka'_{34}$ nur dann reell ist, wenn die rechte Seite seiner Gleichung positiv ist. Danach müssen a'_{34} und k entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Fläche liegt also bei positivem a'_{34} ganz auf der negativen Seite der xy-Ebene und für negatives a'_{34} ganz auf der positiven Seite derselben; sie kann Umdrehungsfläche werden.

III. Wenn in der Gleichungsform des vorigen Falles a'_{22} das negative Vorzeichen hat, so sind diejenigen Schnitte, welche von den zu xy parallelen Ebenen gebildet werden, Hyperbeln; die Fläche wird als ein hyperbolisches Paraboloid bezeichnet und man findet wie vorher, dass sie in beiderlei Sinn unbegrenzt ist. Der durch die Ebene xy mit ihr bestimmte Schnitt ist ein Paar von geraden Linien, zu denen die Asymptoten der vorbezeichneten Hyperbeln parallel sind. Diesseits und jenseits dieser Ebene

wechseln die hyperbolischen Schnitte die transversale und die conjugirte Axe. Die Form der Fläche erinnert an einen Sattel.

IV. $a'_{22} = 0$. Dann sind zwei Wurzeln der cubischen Gleichung der Discriminante gleich Null und die allgemeine Gleichung nimmt die Form

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a_{44} = 0$$

an; und indem man die Axen der y und z in ihrer eigenen Ebene verlegt, so dass die Ebene $a'_{24}y + a'_{34}z = 0$ und eine zu ihr normale durch die Axe der x zu Coordinatenebenen werden, reducirt sie sich weiter auf

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{24}y + a_{44} = 0,$$

welche nach Art. 25 einen Cylinder mit parabolischer Basis darstellt.

V. Wenn auch $a'_{24} = 0$, $a'_{34} = 0$ sind, so wird die Gleichung $a'_{11}x^2 + a_{44} = 0$ in Factoren zerlegbar und bezeichnet ein Paar von parallelen Ebenen.

VI. Endlich ist leicht zu sehen, dass die beiden Ebenen resp. Punkte, welche die Fläche zweiter Ordnung resp. zweiter Classe bilden können, sich zu einer Ebene resp. einem Punkte vereinigen werden, wenn die zweiten Minoren der Discriminante der allgemeinen Gleichung verschwinden; dann ist in der That die Liniencoordinatengleichung der Fläche (Art. 81) identisch erfüllt, jede Gerade berührt die Fläche, weil sie sie in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet resp. mit ihr zwei zusammenfallende Ebenen gemein hat.

90. Die Ausführung der Reduction der Gleichung eines Paraboloids auf die Form

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{34}z = 0$$

wird durch die Bemerkung abgekürzt, dass die Discriminante eine Invariante ist, d. h. eine durch Transformation der Coordinaten von einer Gruppe rechtwinkliger Axen zu einer andern derartigen Gruppe nicht alterirte Function*), dass sie also wie die Discriminante der schon reducirten Form auch für die allgemeine Gleichung gleich $-a'_{11}a'_{22}a'^2_{34}$ sein muss.

*) Vergl. „Vorlesungen“ XI., XII. oder „Kegelschnitte“ Art. 345 und den Schluss zur Note des Art. 31.

Da nun a'_{11} und a'_{22} als die beiden nicht verschwindenden Wurzeln der cubischen Gleichung bekannt sind, so ist auch a'_{34} bekannt.

Die Berechnung der Discriminante ferner wird in diesem Falle durch den Umstand erleichtert, dass sie ein vollkommenes Quadrat ist*).

Wir wählen ein Beispiel; für die Gleichung

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 6zx + 4xy + 2x + 4y + 6z = 8$$

ist die cubische Gleichung der Discriminante $\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0$, ihre Wurzeln also sind $\lambda = 0,\ 7,\ -2$; man hat $a'_{11} = 7$, $a'_{22} = -2$.

Die Discriminante ist in diesem Falle $(a_{14} + 2a_{24} - 3a_{34})^2$, also für die hier geltenden speciellen Werthe $a_{14} = 1$, $a_{24} = 2$, $a_{34} = 3$ gleich 16; daher ist $14a'^2_{34} = 16$, $a'_{34} = \frac{4}{\sqrt{14}}$ und die reducirte Gleichung $7x^2 - 2y^2 = \frac{8z}{\sqrt{14}}$.

Ohne die Eigenschaften der Discriminante anzuwenden, hätten wir nach dem Verfahren des Art. 73 die den Wurzeln der cubischen Gleichung $0,\ 7,\ -2$ entsprechenden Hauptebenen bestimmen müssen,

$$x + 2y - 3z = 0, \quad 4x + y + 2z = 0, \quad x - 2y - z = 0;$$

wir hätten, weil die neuen Coordinaten respective normal zu diesen Ebenen sind,

$$4x + y + 2z = X\sqrt{21}, \quad x - 2y - z = Y\sqrt{6},$$
$$x + 2y - 3z = Z\sqrt{14}$$

zu setzen und x, y, z durch die neuen Coordinaten auszudrücken, so dass die transformirte Gleichung die Gestalt

$$7x^2 - 2y^2 + \frac{24x}{\sqrt{21}} - 2y\sqrt{6} - \frac{8}{\sqrt{14}}z = 8$$

erhält; sie geht endlich durch Uebergang zu parallelen Axen durch einen neuen Anfangspunkt in die vorher angegebene einfachste Gestalt über.

Wenn in dem gewählten Beispiel die Werthe der Coefficienten a_{14}, a_{24}, a_{34} die Relation $a_{14} + 2a_{24} - 3a_{34} = 0$ erfüllt hätten, so verschwindet zwar die Discriminante identisch, aber die Reduction wird mit noch vermehrter Leichtigkeit durch die

*) Vergl. „Vorlesungen" Art. 37.

Bemerkung vollzogen, dass nun die Glieder in x, y, z in der Form

$$(4x + y + 2z) + \lambda (x - 2y - z)$$

ausgedrückt werden können; so dass z. B. für die Gleichung

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 6zx + 4xy + 2x + 2y + 2z = 8$$

die Form

$$(4x + y + 2z)^2 - (x - 2y - z)^2 + 2(4x + y + 2z) \\ - 2(x - 2y - z) = 24$$

entspringt, welche durch die vorher angegebene Transformation in

$$21x^2 - 6y^2 + 2x\sqrt{21} - 2y\sqrt{6} = 24$$

übergeht. Die letzte Reduction hat keine Schwierigkeit.

VII. Kapitel.

Ableitung von Eigenschaften der Flächen zweiten Grades aus speciellen Formen ihrer Gleichungen.

91. Wir werden nunmehr aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einige Eigenschaften der centralen Flächen zweiten Grades ableiten. Diese Ableitung umfasst sowohl Eigenschaften der Ellipsoide als der Hyperboloide, wenn wir die Vorzeichen von b^2 und c^2 als unbestimmt voraussetzen.

Die Gleichung der Polarebene des Punktes (x', y', z') oder die der Tangentenebene, wenn dieser Punkt der Fläche angehört, ist nach Art. 64

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

Die Länge der Normale vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Tangentenebene in (oder die Polarebene von) (x', y', z') wird nach Art. 32 durch die Gleichung

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}$$

bestimmt, und die Winkel α, β, γ, welche sie mit den Axen bildet, sind durch

$$\cos\alpha = \frac{px'}{a^2}, \quad \cos\beta = \frac{py'}{b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{pz'}{c^2}$$

gegeben, wie man durch Multiplication der Gleichung der Tangentenebene mit p und Vergleichung mit der Form der Gleichung der Ebene

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

am leichtesten erkennt.

Wir können aus den vorigen Gleichungen auch einen Ausdruck für die Länge der Normalen in Function der Winkel erhalten, welche sie mit den Axen bildet, nämlich

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma.$$

92. Man soll die Bedingung finden, unter welcher die Ebene

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega = 0$$

die Fläche berührt.

Die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der der Tangentenebene

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} + \frac{z z'}{c^2} = 1$$

liefert die Relationen

$$\frac{x'}{a} = -\frac{a\xi}{\omega}, \quad \frac{y'}{b} = -\frac{b\eta}{\omega}, \quad \frac{z'}{c} = -\frac{c\zeta}{\omega},$$

und damit die geforderte Bedingung in der Form

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 = \omega^2.$$

Auf demselben Wege erhält man als die Bedingung, unter welcher die Ebene

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

den Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

berührt, als

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2 = 0,$$

wie beides auch als specieller Fall des Art. 80 hätte gefunden werden können.

Die Gleichung des Poles der Ebene ξ', η', ζ', ω' oder die Relation zwischen den Coordinaten von zwei harmonischen Polarebenen der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1$$

ist

$$a^2 \xi \xi' + b^2 \eta \eta' + c^2 \zeta \zeta' = \omega \omega'.$$

B. Wenn die Ebene (ξ, η, ζ) die Nullkugel oder den unendlich fernen Kreis aller Kugeln berührt, so ist nothwendig

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

und wenn sie zugleich Tangentialebene der Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

im Punkte (x', y', z') ist, so hat man

$$\xi = \frac{x'}{a^2}, \quad \eta = \frac{y'}{b^2}, \quad \zeta = \frac{z'}{c^2},$$

somit

$$\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} = 0;$$

d. h. der reciproke Werth von p^2 (Art. 91) ist Null, oder der Abstand der Ebene vom Centrum unendlich gross.

93. Die Normale der Fläche ist eine im Berührungspunkte auf der Tangentenebene errichtete Perpendiculare. Ihre Gleichungen sind offenbar

$$\frac{a^2}{x'}(x - x') = \frac{b^2}{y'}(y - y') = \frac{c^2}{z'}(z - z').$$

Wenn wir den gemeinschaftlichen Werth dieser Ausdrücke durch R bezeichnen, so ist

$$x - x' = \frac{Rx'}{a^2}, \quad y - y' = \frac{Ry'}{b^2}, \quad z - z' = \frac{Rz'}{c^2},$$

und wir finden durch die Addition der Quadrate dieser Werthe, dass die Länge der Normale zwischen (x', y', z') und dem beliebigen Punkte (x, y, z) in ihr $= \pm \frac{R}{p}$ ist. Wählen wir den Punkt (x, y, z) als den Schnittpunkt der Normalen mit der Ebene xy, so ist $z = 0$ und die letzte der drei vorigen Gleichungen giebt $R^2 = -c^2$, so dass der zwischen dem Berührungspunkte und der Ebene xy gelegene Abschnitt der Normalen durch $c^2 : p$ gemessen ist. Aehnliche Ausdrücke gelten für die bis zu den Ebenen yz, zx gemessenen Abschnitte.

94. Die Summe der Quadrate der reciproken Werthe von irgend drei zu einander rechtwinkligen Durchmessern ist constant.

Dies folgt unmittelbar aus der Addition der Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2},$$

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2\alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{c^2},$$

$$\frac{1}{\varrho''^2} = \frac{\cos^2\alpha''}{a^2} + \frac{\cos^2\beta''}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma''}{c^2};$$

denn wegen $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1$, etc. erhält man

$$\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

d. h. gleich dem reciproken Quadrat des Abstandes der Verbindungsebene ihrer Endpunkte vom Centrum. (Art. 91.)

95. In gleicher Weise ist die Summe der Quadrate der Normalen, welche man vom Centrum auf drei zu einander rechtwinklige Tangentenebenen fällen kann constant. Denn die Addition der Gleichungen

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma,$$
$$p'^2 = a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma',$$
$$p''^2 = a^2\cos^2\alpha'' + b^2\cos^2\beta'' + c^2\cos^2\gamma''$$

zeigt es. In Folge dessen ist der Ort des Durchschnittspunktes von drei zu einander rechtwinkligen Tangentenebenen eine Kugelfläche; denn das Quadrat seines Abstandes vom Centrum der Fläche ist der Summe der Quadrate der drei Normalen gleich, d. h. $= a^2 + b^2 + c^2$.

96. Die Gleichung der dem Durchmesser des Punktes (x', y', z') der Fläche conjugirten Diametralebene ist

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0 \text{ (Art. 71)};$$

sie ist also der Tangentenebene in diesem Punkte parallel.

Weil jeder in der Diametralebene gelegene Durchmesser dem Durchmesser des Punktes (x', y', z') conjugirt ist, so werden die Richtungscosinus zweier beliebigen conjugirten Durchmesser durch die Relation

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{a^2} + \frac{\cos\beta\cos\beta'}{b^2} + \frac{\cos\gamma\cos\gamma'}{c^2} = 0$$

verbunden. Da diese Bedingung durch die Substitution von ka^2, kb^2, kc^2 für a^2, b^2, c^2 nicht gestört wird, so sind zwei gerade Linien, welche für eine Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

conjugirte Durchmesser sind, auch solche für jede ähnliche, ähnlich gelegene concentrische Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k.$$

Und für $k = 0$ erkennen wir, dass jede Fläche mit ihrem Asymptotenkegel gemeinschaftliche Systeme conjugirter Durchmesser hat.

Nach Analogie der in dem Falle der Kegelschnitte angewendeten Methoden können wir die Coordinaten irgend eines Punktes des Ellipsoids durch $a\cos\lambda$, $b\cos\mu$, $c\cos\nu$ bezeichnen, wo λ, μ, ν die Richtungswinkel einer geraden Linie, d. h. durch die Relation $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$ verbunden sind. Dann sind die geraden Linien, welche zwei conjugirten Durchmessern entsprechen, rechtwinklig zu einander; denn für $\cos\alpha = a\cos\lambda$, $\cos\alpha' = a\cos\lambda'$, etc. wird die oben geschriebene Relation für conjugirte Durchmesser

$$\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = 0.$$

97. Die Summe der Quadrate von drei zu einander conjugirten Halbdurchmessern ist constant.

Denn das Quadrat der Länge eines Halbdurchmessers $x'^2 + y'^2 + z'^2$ ist in Function von λ, μ, ν

$$a^2\cos^2\lambda + b^2\cos^2\mu + c^2\cos^2\nu,$$

und die Addition dieses Ausdrucks mit den beiden analogen Werthen

$$a^2\cos^2\lambda' + b^2\cos^2\mu' + c^2\cos^2\nu',$$
$$a^2\cos^2\lambda'' + b^2\cos^2\mu'' + c^2\cos^2\nu''$$

giebt $a^2 + b^2 + c^2$, weil λ, μ, ν etc. die Richtungswinkel von drei geraden Linien sind, deren jede auf den beiden andern rechtwinklig ist.

98. Das Parallelepiped, dessen Kanten drei conjugirte Halbdurchmesser sind, hat ein constantes Volumen.

Denn für x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' als die Coordinaten der Endpunkte der drei Durchmesser ist nach Art. 31 das Volumen des Parallelepipeds

$$= \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}, \text{ d. h. } abc\cdot \begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos\lambda', & \cos\mu', & \cos\nu' \\ \cos\lambda'', & \cos\mu'', & \cos\nu'' \end{vmatrix},$$

wo der Werth der letztgeschriebenen Determinante nach der Anmerkung des Art. 31 der Einheit gleich ist.

Wenn a', b' die Axen eines ebenen Centralschnittes sind und p die vom Anfangspunkte auf die zu ihm parallele Tangenten-

ebene gefällte Normale bezeichnet, so ist $a'b'p = abc$; denn für c' als den Halbdurchmesser des Berührungspunktes und für θ als den von ihm mit der Normale gebildeten Winkel ist das Volumen des Parallelepipeds der drei conjugirten Durchmesser a', b', c' gleich $a'b'c' \cos\theta$, was wegen $c' \cos\theta = p$ in den gegebenen Werth übergeht.

99. Die soeben gegebenen Sätze können mit Leichtigkeit auch aus den entsprechenden Sätzen für Kegelschnitte abgeleitet werden.

Denn wenn wir irgend drei conjugirte Durchmesser a', b', c' betrachten und den Durchmesser, in welchem die Ebene $a'b'$ die Ebene xy schneidet, mit A, sowie den ihm conjugirten im Schnitt $a'b'$ mit C bezeichnen, so ist $A^2 + C^2 = a'^2 + b'^2$, und daher $a'^2 + b'^2 + c'^2 = A^2 + C^2 + c'^2$.

Da ferner A in der Ebene xy ist, so wird für B als den zu A conjugirten Durchmesser in dem durch diese Ebene gebildeten Schnitt die zu A conjugirte Ebene nothwendig die durch B und die Axe c gehende Ebene, und C, c' sind daher conjugirte Durchmesser desselben Schnittes wie B und c. Daher hat man

$$A^2 + C^2 + c'^2 = A^2 + B^2 + c^2,$$

und da endlich $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$ ist, so ist damit der Satz bewiesen. Ganz analoge Schlüsse beweisen das auf die Parallelepipede bezügliche Theorem des vorigen Artikels.

Wir können aber überdies die bezeichneten Sätze auch dadurch beweisen, dass wir, wie in der Anmerkung des Art. 84 angedeutet ist, die Relationen entwickeln, welche für die Transformation des Ausdrucks

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2}$$

in schiefwinkligen Coordinaten zu dem auf rechtwinklige Coordinaten bezüglichen neuen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

stattfinden. Man findet dieselben wie folgt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = b'^2c'^2 \sin^2\lambda + c'^2a'^2 \sin^2\mu + a'^2b'^2 \sin^2\nu,$$

$$a^2b^2c^2 = a'^2b'^2c'^2 (1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu).$$

Die erste und letzte dieser Gleichungen geben die vorher erhaltenen Sätze, die zweite von ihnen drückt aus, dass die Summe der Quadrate der von drei conjugirten Durchmessern in Paaren gebildeten Parallelogramme constant ist; oder dass die Summe der reciproken Werthe der Normalen zu den Tangentialebenen in den Endpunkten von drei conjugirten Durchmessern constant ist.

100. Die Summe der Quadrate der Projectionen von drei conjugirten Durchmessern auf eine beliebige gerade Linie ist constant.

Wenn wir voraussetzen, dass die bezeichnete Gerade die Winkel α, β, γ mit den Axen bildet, so ist die Projection des im Punkte (x', y', z') endigenden Halbdurchmessers auf dieselbe

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma,$$

oder nach Art. 96

$$a \cos\lambda \cos\alpha + b \cos\mu \cos\beta + c \cos\nu \cos\gamma.$$

Auf dieselbe Weise erhält man die Projectionen der beiden andern Durchmesser in der Form

$$a \cos\lambda' \cos\alpha + b \cos\mu' \cos\beta + c \cos\nu' \cos\gamma,$$
$$a \cos\lambda'' \cos\alpha + b \cos\mu'' \cos\beta + c \cos\nu'' \cos\gamma,$$

und durch Quadriren und Addiren dieser Ausdrücke entsteht

$$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma,$$

zum Beweise des ausgesprochenen Satzes.

101. Die Summe der Quadrate der Projectionen von irgend drei conjugirten Durchmessern auf eine beliebige Ebene ist constant.

Sind d, d', d'' die drei betrachteten Durchmesser, θ, θ', θ'' die von ihnen mit der Normale der bezeichneten Ebene gebildeten Winkel, so ist die Summe der Quadrate ihrer Projectionen durch $d^2 \sin^2\theta + d'^2 \sin^2\theta' + d''^2 \sin^2\theta''$ ausgedrückt, und sie ist constant, weil nach dem letzten Art. $d^2 \cos\theta + d'^2 \cos\theta' + d''^2 \cos^2\theta''$ und nach Art. 97 $d^2 + d'^2 + d''^2$ constant ist.

102. Man soll den Ort des Durchschnittspunktes von drei Tangentenebenen bestimmen, welche die Endpunkte von drei conjugirten Durchmessern zu ihren Berührungspunkten haben.

Die Gleichungen der drei Tangentenebenen sind

$$\frac{x\cos\lambda}{a}+\frac{y\cos\mu}{b}+\frac{z\cos\nu}{c}=1,$$

$$\frac{x\cos\lambda'}{a}+\frac{y\cos\mu'}{b}+\frac{z\cos\nu'}{c}=1,$$

$$\frac{x\cos\lambda''}{a}+\frac{y\cos\mu''}{b}+\frac{z\cos\nu''}{c}=1.$$

Die Addition ihrer Quadrate giebt die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3.$$

B. Die Verbindungsebene der Durchmesser-Endpunkte umhüllt die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$$

und berührt sie im Centrum des Schnittes.

103. Die Längen der Axen eines durch das Centrum gehenden ebenen Querschnittes zu finden.

Man kann leicht die quadratische Gleichung bilden, deren Wurzeln die reciproken Werthe der Quadrate dieser Axen sind, wenn die Summe und das Product dieser Grössen gegeben sind. Sind nun α, β, γ die Winkel, welche die Normale der gegebenen Ebene mit den Axen bildet, und bezeichnet R den durch die Fläche des Ellipsoids in ihr bestimmten Abschnitt, so haben wir nach Art. 94

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{R^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

also

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right),$$

während nach Art. 98

$$\frac{1}{a'^2b'^2}=\frac{p^2}{a^2b^2c^2}=\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}$$

ist. Die fragliche quadratische Gleichung ist daher

$$\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)+\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}=0,$$

und sie kann, wie leicht erkannt wird, auch in der Form

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0$$

geschrieben werden. Man erhält dieselbe auch aus den im nächsten Artikel zu entwickelnden Grundsätzen.

104. Durch einen gegebenen Radius OR einer centrischen Fläche zweiten Grades kann im Allgemeinen ein Schnitt gelegt werden, für welchen OR eine Axe ist.

Wir beschreiben mit OR als Halbmesser eine Kugelfläche und denken einen Kegel, der das Centrum zum Scheitel und den Durchschnitt der gegebenen Fläche und der Kugel zur Leitcurve hat. Eine durch den Radius OR gehende Tangentenebene dieses Kegels bestimmt mit der Fläche einen Querschnitt, welcher OR zur Axe hat. Denn in demselben ist OR dem nächstfolgenden Radius gleich, da beide Halbmesser der nämlichen Kugel sind, und ist somit ein Maximum oder Minimum unter den Halbmessern des Schnittes; während die Tangente des Schnittes im Punkte R zu OR normal ist, weil sie auch der Tangentenebene der Kugel angehört. OR ist daher eine Axe der Schnittcurve.

Die Gleichung des Kegels kann gebildet werden, indem man

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$

von einander subtrahirt; man erhält

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0.$$

Wenn der Schnitt der Fläche mit der Ebene

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$

eine Axe von der Länge r besitzt, so muss sie diesen Kegel berühren, und die Bedingung, unter welcher dies stattfindet, ist nach Art. 92 wirklich die im letzten Art. gefundene Gleichung

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0.$$

Nach derselben Methode können die Axen eines beliebigen Schnittes der durch die allgemeinere Gleichung

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy=1$$

gegebenen Fläche bestimmt werden.

Der durch die Schnittcurve derselben mit der Kugel

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)=1$$

bestimmte Kegel ist

$$(a_{11}-\lambda)x^2+(a_{22}-\lambda)y^2+(a_{33}-\lambda)z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy=0,$$

und wenn λ den reciproken Werth des Quadrats einer Axe des Schnittes repräsentirt, welchen die Ebene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

bestimmt, so muss diese Ebene den Kegel berühren, dessen Gleichung soeben geschrieben wurde. Nach Art. 80 kann die Bedingung, unter welcher diese Berührung stattfindet, in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & a_{13}, & \cos \alpha \\ a_{12}, & a_{22} - \lambda, & a_{23}, & \cos \beta \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} - \lambda, & \cos \gamma \\ \cos \alpha, & \cos \beta, & \cos \gamma, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden, welche durch Entwicklung die quadratische Gleichung ergiebt

$$\lambda^2 - \lambda \{ (a_{22} + a_{33}) \cos^2 \alpha + (a_{33} + a_{11}) \cos^2 \beta + (a_{11} + a_{22}) \cos^2 \gamma$$
$$- 2 a_{23} \cos \beta \cos \gamma - 2 a_{13} \cos \gamma \cos \alpha - 2 a_{12} \cos \alpha \cos \beta \}$$
$$+ (a_{22} a_{33} - a_{23}{}^2) \cos^2 \alpha + (a_{33} a_{11} - a_{13}{}^2) \cos^2 \beta + (a_{11} a_{22} - a_{12}{}^2) \cos^2 \gamma$$
$$+ 2 (a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23}) \cos \beta \cos \gamma + 2 (a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) \cos \gamma \cos \alpha$$
$$+ 2 (a_{23} a_{13} - a_{33} a_{12}) \cos \alpha \cos \beta = 0.$$

105. Wir gehen zur Untersuchung der Frage weiter, ob es möglich ist, eine Ebene zu bestimmen, welche ein gegebenes Ellipsoid in einem Kreise schneidet. Nach dem früher gegebenen Beweise der Aehnlichkeit aller parallelen Schnitte (Art. 74) genügt es dafür, Schnitte zu betrachten, deren Ebenen durch das Centrum der Fläche gehen.

Denken wir nun einen Centralschnitt, der ein Kreis vom Halbmesser r ist, und sei mit demselben Radius eine concentrische Kugel beschrieben, so ist nach dem Vorigen

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

die Gleichung eines Kegels, der das Centrum zum Scheitel hat und durch die Durchschnittscurve der Fläche mit der Kugel hindurchgeht. Haben aber beide Flächen einen ebenen Schnitt gemein, so muss diese Gleichung nothwendig zwei Ebenen repräsentiren und es muss also einer der Coefficienten von x^2, y^2 oder z^2 in der vorigen Gleichung identisch verschwinden. Der fragliche ebene Schnitt muss daher durch eine der drei Axen hindurchgehen. Für $r = b$ verschwindet z. B. der Coefficient von y^2 und man erhält

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

eine Gleichung, welche zwei Ebenen des kreisförmigen Schnittes repräsentirt, die durch die y-Axe hindurchgehen.

Diese Ebenen werden leicht construirt, indem man in der Ebene der xz die beiden der Axe b gleichen Halbdurchmesser zieht; jeder derselben bestimmt mit der Axe der y eine jener Ebenen.

In derselben Weise können durch jede der andern beiden Axen zwei Ebenen dieser Art gelegt werden, aber in dem Falle des Ellipsoids sind diese vier Ebenen sämmtlich imaginär; denn in der Ebene xy kann kein der Axe c gleicher Halbdurchmesser bestimmt werden, weil der kleinste Halbdurchmesser ihres Schnittes $= b$ ist; und ebenso existirt in der Ebene yz kein Halbdurchmesser gleich a, weil der grösste der Halbdurchmesser ihres Schnittes nur $= b$ ist.

In dem Falle des Hyperboloids mit einem Mantel ist c^2 negativ und die durch die Axe a gehenden Schnitte sind reell.

Für das Hyperboloid mit zwei Mänteln sind b^2 und c^2 negativ, und für $r^2 = -c^2$ (vorausgesetzt, dass b^2 kleiner ist als c^2) erhalten wir die beiden reellen Schnitte

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0.$$

Diese beiden durch das Centrum gehenden reellen Ebenen schneiden die Fläche nicht, aber die zu ihnen parallelen Ebenen schneiden sie in Kreisen.

In jedem Falle erhalten wir nur zwei reelle durch das Centrum gehende Ebenen der Kreisschnitte, und den Systemen der zu ihnen parallelen Ebenen entspringen zwei verschiedene Systeme von Kreisschnitten der Fläche.

106. Zwei Flächen, in deren Gleichungen die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 nur um eine Constante differiren, haben die nämlichen Kreisschnittebenen.

Es ergiebt sich dies für die Gleichungen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$(A+H)x^2 + (B+H)y^2 + (C+H)z^2 = 1,$$

unmittelbar aus der Formel des letzten Artikels.

Man erkennt es auch aus den Polargleichungen dieser Flächen

$$\frac{1}{\varrho^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma,$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + H,$$

aus denen sofort erhellt, dass die Differenz der Quadrate der reciproken Werthe entsprechender Radien vectoren beider Flächen constant ist. Wenn daher in irgend einem Querschnitt der einen Fläche der Radius vector constant ist, so muss dies auch vom Radius vector der andern gelten.

Die nämliche Betrachtung zeigt auch, dass jede Ebene mit beiden Flächen Schnitte von zusammenfallenden Axen bestimmt, weil der grösste und kleinste Werth des Radius vector in beiden Schnitten den nämlichen Werthen von α, β, γ entspricht.

Die Ebenen der Kreisschnitte eines Kegels sind daher die nämlichen wie die einer allgemeinen Fläche zweiten Grades, für welche er asymptotisch ist.

107. Je zwei Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung, welche verschiedenen Systemen angehören, liegen auf derselben Kugelfläche.

Die beiden Ebenen der Schnitte sind den durch

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 0$$

repräsentirten Ebenen parallel. Da nun die Gleichung zweier Ebenen sich von der Gleichung zweier Parallelebenen nur in den Gliedern vom ersten Grade unterscheiden kann, so muss die Gleichung der Ebenen zweier beliebigen Kreisschnitte von der Form

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) + u_1 = 0$$

sein, wo $u_1 = 0$ die Gleichung einer beliebigen Ebene ist. Die Subtraction dieser Gleichung von der Gleichung der Fläche, welcher jeder Punkt des Schnittes ebenfalls genügen muss, giebt

$$\frac{1}{r^2}(x^2 + y^2 + z^2) - u_1 = 0,$$

die Gleichung einer Kugelfläche als durch beide Kreise gehend.

108. Wir haben gesehen, dass alle parallelen Schnitte einer Fläche zweiten Grades ähnliche Curven sind. Wenn wir eine Reihe von Ebenen legen, welche den Kreisschnitten der Fläche parallel sind, so ist die äusserste derselben die

Tangentenebene von gleicher Stellung und diese muss daher die Fläche in einem unendlich kleinen Kreise durchschneiden. Man nennt ihren Berührungspunkt einen Umbilicus, Nabel- oder Kreispunkt. Einige Eigenschaften solcher Punkte werden später erwähnt werden.

Die Coordinaten der reellen Kreispunkte können hier leicht bestimmt werden. Wir haben in den ebenen Schnitt, welcher die Axen a und c besitzt, einen der Axe b gleichen Halbdurchmesser einzutragen und die Coordinaten der Endpunkte des ihm conjugirten Durchmessers zu finden. Die für Kegelschnitte gültige Formel $b'^2 = a^2 - e^2 x^2$ giebt auf diesen Fall angewendet

$$b^2 = a^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2,$$

also $$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}; \quad \text{ebenso} \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Es existiren daher in dem Falle des Ellipsoids vier reelle Kreispunkte in der Ebene xz und vier imaginäre in jeder der andern Hauptebenen.

Bei den Rotationsellipsoiden fallen sie in den Endpunkten der Axe zusammen, bei der Kugel sind sie unbestimmt.

109. Es ist nützlich an dieser Stelle anzugeben, wie man in derselben Art die Kreisschnitte des durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

gegebenen Paraboloids bestimmen kann.

Wir denken einen durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Kreisschnitt vom Radius r und eine ihn enthaltende Kugel, die im Anfangspunkte der Coordinaten dieselbe Tangentialebene $z = 0$ hat, wie das Paraboloid, deren Gleichung daher nach Art. 62 die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 a_{34} z$$

haben muss. Der von ihr mit dem Paraboloid bestimmte Durchdringungskegel ist durch die Gleichung

$$x^2 \left(1 - \frac{c a_{34}}{a^2}\right) + y^2 \left(1 \mp \frac{c a_{34}}{b^2}\right) + z^2 = 0$$

dargestellt und diese repräsentirt zwei Ebenen, wenn eines ihrer Glieder verschwindet. Diese beiden Ebenen sind reell in dem Falle des elliptischen Paraboloids für $c a_{34} = a^2$, weil dann die

Gleichung auf $b^2 z^2 = (a^2 - b^2) y^2$ reducirt wird. In dem Falle des hyperbolischen Paraboloids existirt hingegen kein reeller Kreisschnitt, denn die nämliche Substitution bringt die Gleichung der beiden Ebenen auf die Form mit imaginären Factoren

$$b^2 z^2 + (a^2 + b^2) y^2 = 0.$$

Man kann aber überhaupt leicht zeigen, dass kein ebener Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids eine geschlossene Curve sein kann; denn für seinen Durchschnitt mit der Ebene

$$z = lx + my + n$$

erhalten wir die Projection auf die Ebene xy dargestellt durch

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2(lx + my + n)}{c}$$

und erkennen damit, dass dieselbe nothwendig eine Hyperbel ist.

Zu den Relationen, welche bei den Centralflächen zweiten Grades die Systeme conjugirter Durchmesser unter einander und mit den Axen verbinden, correspondiren bei den Paraboloiden die drei Sätze: 1) Die Summe (Differenz) der Hauptparameter von zwei conjugirten Diametralschnitten eines elliptischen (hyperbolischen) Paraboloids ist constant. 2) Die Summe (Differenz) der Parameter in conjugirten Diametralschnitten durch einen festen Punkt des Paraboloids ist constant; sie ist dieselbe für alle Punkte eines zur Axe normalen Schnittes. 3) Wenn man vom Endpunkte eines Durchmessers in ihm eine constante Länge abträgt und durch den erhaltenen Punkt eine conjugirte Ebene legt, so ist das Volumen des Parallelepipeds aus irgend zwei conjugirten Durchmessern ihres Schnittes und dieser Linie constant.[12])

110. Wir haben gesehen, dass für einen elliptischen Centralschnitt alle parallelen Schnitte ähnliche Ellipsen sind, und dass der Schnitt der parallelen Tangentenebene eine unendlich kleine ähnliche Ellipse ist. In gleicher Art müssen, wenn der Centralschnitt eine Hyperbel ist, die Schnitte aller parallelen Ebenen ähnliche Hyperbeln sein, und der Schnitt der Tangentenebenen unter ihnen muss sich auf je ein Paar gerade Linien reduciren, welche den Asymptoten der Centralschnitthyperbel parallel sind. Aus der auf ein beliebiges System conjugirter Durchmesser bezogenen Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1$$

ergiebt sich für den durch eine der xz parallele Ebene $y=\beta$ bestimmten Schnitt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1-\frac{\beta^2}{b'^2};$$

dieser Schnitt reducirt sich also für den Werth $\beta=b'$ auf ein Paar von reellen geraden Linien. (Wir erinnern, dass nach Art. 45, 82 jede Fläche zweiten Grades unendlich viele gerade Linien enthält oder eine Regelfläche ist. Anm. S. 139.)

Solche gerade Linien können nur auf dem Hyperboloid mit einem Mantel existieren, weil für

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1+\frac{z^2}{c'^2}$$

die rechte Seite für keinen reellen Werth von z verschwinden kann. Es ist auch geometrisch evident, dass eine reelle gerade Linie nicht auf einem Ellipsoid existiren kann, weil dasselbe eine geschlossene Fläche ist, und nicht auf einem Hyperboloid mit zwei Mänteln, als von welchem kein Theil in dem zwischen verschiedenen Systemen von zwei parallelen Tangentialebenen enthaltenen Raume gelegen ist, während eine gerade Linie denselben doch im Allgemeinen durchsetzen muss.

111. Wenn wir die Gleichung des Hyperboloids mit einem Mantel in die Form

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

bringen, so liegt offenbar der Schnitt der beiden Ebenen

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

ganz in der Fläche desselben und wir erhalten daraus für verschiedene Werthe von λ ein System von reellen geraden Linien in der Fläche; wir erhalten ein zweites System von solchen Geraden, indem wir den Durchschnitt der Ebenen betrachten

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Oder in allgemeinerer Form: Wenn $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ vier Ebenen repräsentiren, so ist $x_1x_3=x_2x_4$ die Glei-

chung eines Hyperboloids mit einem Mantel, welches erzeugt werden kann als der Ort der Systeme von geraden Linien, die durch die Gleichungen

$$x_1 = \lambda x_2, \quad \lambda x_3 = x_4; \quad x_1 = \lambda x_4, \quad \lambda x_3 = x_2$$

repräsentirt sind. Wir merken an, dass die Ebenen, welche als ihren Durchschnitt die betrachteten Geraden erzeugen, entsprechende Ebenen zweier Büschel von gleichem Doppelverhältniss sind, deren jedem zwei von den vier Flächen des Fundamentaltetraeders und die nach dem Einheitpunkt E (Art. 38) gehenden Ebenen als entsprechende Ebenen angehören; also $(A_3A_4 \cdot A_1A_2E)$ und $(A_1A_2 \cdot A_4A_3E)$ oder $(A_2A_3 \cdot A_4A_1E)$ und $(A_1A_4 \cdot A_3A_2E)$. Ein Hyperboloid mit einem Mantel kann daher als der Ort der geraden Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen von zwei projectivischen Ebenenbüscheln angesehen werden. Wenn die Scheitelkanten beider Büschel sich durchschneiden, so degenerirt das Hyperboloid in einen Kegel zweiten Grades, der jenen zum Scheitel hat.

In dem Falle der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

können die geraden Linien der Fläche auch durch die Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\theta \mp \sin\theta; \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\theta \pm \cos\theta$$

repräsentirt werden.

B. 1. Für diejenigen einfachen Hyperboloide, bei welchen $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ ist, sind zwei Paare von Erzeugenden normal zu den Ebenen der Kreisschnitte; entsprechend zu $\lambda = \pm 1$ in beiden Schaaren. (Vergl. Art. 124, B. 3.)

B. 2. Für entgegengesetzt gleiche Werthe des λ im ersten und zweiten System sind die entsprechenden Geraden parallel. Drei Linien g_1, g_2, g_3 des ersten und die drei zu ihnen parallelen Linien l_1, l_2, l_3 des zweiten Systems auf einem einfachen Hyperboloid bilden, weil sie drei Paare paralleler Ebenen liefern wie g_1l_2, g_2l_1; g_2l_3, g_3l_2; g_3l_1, g_1l_3, ein Parallelepiped;[13]) alle die so aus demselben Hyperboloid entstehenden Parallelepipede haben dasselbe Volumen $4abc$.

112. Zwei beliebige gerade Linien des Hyperboloids, welche zu entgegengesetzten Systemen gehören, liegen in derselben Ebene.

Betrachten wir die beiden Linien

$$x_1 - \lambda x_2 = 0,\ \lambda x_3 - x_4 = 0;\quad x_1 - \lambda' x_4 = 0,\ \lambda' x_3 - x_2 = 0,$$

so sind sie beide offenbar in der Ebene

$$x_1 - \lambda x_2 + \lambda\lambda' x_3 - \lambda' x_4 = 0$$

enthalten, weil diese Gleichung in jeder der Formen

$$(x_1 - \lambda x_2) + \lambda'(\lambda x_3 - x_4) = 0,\quad (x_1 - \lambda' x_4) + \lambda(\lambda' x_3 - x_2) = 0$$

geschrieben werden kann.

Es wird in derselben Weise erkannt, dass kein Paar von geraden Linien des Hyperboloids, welche demselben System angehören, in einer Ebene liegen könne; denn keine Gleichung einer Ebene von der Form

$$(x_1 - \lambda x_2) + k(\lambda x_3 - x_4) = 0$$

kann mit der andern Form

$$(x_1 - \lambda' x_2) + k'(\lambda' x_3 - x_4) = 0$$

für verschiedene Werthe von λ und λ' identisch werden.

Auf demselben Wege sehen wir, dass die beiden Geraden

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\theta - \sin\theta,\quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\theta + \cos\theta,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi,\quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi,$$

welche zu verschiedenen Systemen gehören, in der Ebene

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi) + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi) = \frac{z}{c}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi) - \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi)$$

enthalten sind. Diese Ebene ist parallel zu der zweiten Linie des ersten Systems

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi,\quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi,$$

aber sie enthält sie nicht; vielmehr ist die Gleichung einer durch diese Linie gehenden und zur vorigen parallelen Ebene

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi) + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi) = \frac{z}{c}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi) + \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi),$$

also im absoluten Gliede von jener verschieden.

B. Die Kugelfläche des Art. 95 schneidet aus dem Hyperboloid den Ort der Punkte aus, in denen die Erzeugenden beider Systeme rechtwinklig zu einander sind

113. Wir haben gesehen, dass jede Tangentenebene des

Hyperboloids mit demselben zwei gerade Linien gemein hat, welche sich im Berührungspunkte durchschneiden, und dass sie die Fläche in keinem andern Punkte berührt. Wenn wir durch eine dieser Geraden eine beliebige andere Ebene legen, so schneidet diese die Fläche nothwendig in einer andern geraden Linie und berührt sie in dem Punkte, in welchem diese Linie jene erste durchschneidet.

Umgekehrt enthält die Tangentenebene einer Fläche in jedem Punkte einer geraden Linie derselben nothwendig diese Gerade, aber sie ist für jeden andern Punkt dieser Geraden eine andere Ebene. Wir erkennen dies aus der Betrachtung der Fläche $x\varphi = y\psi$, welche die Linie $x = 0$, $y = 0$ enthält und wo $\varphi = 0$, $\psi = 0$ Ebenen (wir wollen setzen von den Coordinaten ξ, η, ζ und ξ', η', ζ') repräsentiren — obgleich der Beweis eben so gültig bleibt, wenn φ, ψ Functionen von beliebigem höheren Grade sind. Wir bestimmen mittelst der allgemeinen Gleichung der Tangentenebene

$$(x - x')U_1' + (y - y')U_2' + (z - z')U_3' = 0$$

diejenige der Tangentenebene des Punktes $x = y = 0$, $z = z'$, und finden $x\varphi' = y\psi'$, wenn φ' und ψ' die Resultate der Substitution dieser Coordinaten in die Polynome φ, ψ bezeichnen. Offenbar dreht sich diese Ebene mit der Aenderung von z oder dem Fortrücken des Berührungspunktes. Man erhält

$$\frac{y}{x} = \frac{\xi z' + 1}{\xi' z' + 1} = \tan\theta$$

und leitet daraus leicht den Satz ab, dass das Doppelverhältniss von vier Tangentialebenen durch eine gerade Linie der Fläche dem Doppelverhältniss ihrer vier Berührungspunkte in dieser Geraden gleich ist. (Vergl. Art. 111).

In dem Falle des Kegels gestalten sich diese Verhältnisse anders. Jede Tangentenebene schneidet die Fläche in zwei zusammenfallenden geraden Linien, und in Folge dessen ist für alle Punkte derselben geraden Linie die Tangentenebene die nämliche und berührt die Fläche längs der ganzen Erstreckung dieser Linie.

Und allgemeiner, wenn die Gleichung einer Fläche von der Form $x\varphi + y^2\psi = 0$ ist, so ergiebt sich genau wie vorher, dass die Tangentenebene in jedem Punkte der Linie $x = 0$, $y = 0$ mit $x = 0$ zusammenfällt.

114. Es ward im Art. 110 gezeigt, dass die beiden geraden

Linien, in welchen die Tangentenebene ein Hyperboloid schneidet, mit den Asymptoten des parallelen Centralschnittes von gleicher Richtung sind. Da aber diese letzteren offenbar dem asymptotischen Kegel der Fläche angehören, so ist jede gerade Linie auf einem Hyperboloid zu einer der Erzeugenden seines Asymptotenkegels parallel. Man erkennt auch daraus, dass nicht irgend drei solcher Geraden zu derselben Ebene parallel sein können, weil unter dieser Voraussetzung eine parallele Ebene durch das Centrum den asymptotischen Kegel in drei Geraden schneiden müsste, während derselbe doch nur ein Kegel zweiten Grades ist.

115. Jede gerade Linie des ersten Systems schneidet, wie wir bewiesen haben, alle geraden Linien des zweiten Systems.

Daher kann umgekehrt die Fläche als durch die Bewegung einer graden Linie erzeugt angesehen werden, welche eine gewisse Anzahl fester gerader Linien stets durchschneidet*).

Wir bemerken zuerst, dass die Bewegung einer geraden Linie durch drei Bedingungen regulirt sein muss, wenn durch dieselbe eine Fläche erzeugt werden soll. Denn da die Gleichung einer geraden Linie vier Constanten enthält, so würden vier Bedingungen die Lage derselben vollständig bestimmen. (Vergl. Art. 58, Beisp.) Durch eine Bedingung weniger ist die Lage der Linie nicht bestimmt, aber doch so beschränkt, dass die Linie stets auf einer gewissen Ortsfläche liegen muss, deren Gleichung man wie folgt bestimmen kann. Für

$$y = mz + p, \quad y = nz + q,$$

als die allgemeinen Gleichungen der geraden Linie, begründen die Bedingungen der Aufgabe drei Relationen zwischen den Constanten m, n, p, q; zwischen diesen Relationen und den beiden Glei-

*) Man nennt eine Fläche, die durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden kann, eine geradlinige oder Regelfläche (Art. 58, 3); dieselbe heisst insbesondere developpabel oder abwickelbar, wenn jede erzeugende Gerade durch die nächstfolgende geschnitten wird, und sie heisst windschief (skew, gauche), wenn das nicht der Fall ist. Das Hyperboloid mit einem Mantel und bei Zulassung auch der nicht reellen Geraden jede Fläche zweiten Grades mit $\Delta \gtrless 0$ (Art. 68) gehört zur letzteren, der Kegel und der Cylinder gehören zur ersteren Klasse.

chungen der geraden Linie als fünf Gleichungen kann man die vier Grössen m, n, p, q eliminiren, und die dadurch erhaltene Gleichung in x, y, z ist die Gleichung des gesuchten Ortes.

Oder wir schreiben die Gleichungen der Geraden in der Form

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}$$

und erhalten aus den drei Bedingungen drei Relationen zwischen den Constanten $x', y', z', \alpha, \beta, \gamma$; eliminiren wir dann zwischen diesen die Grössen α, β, γ, so ist die resultirende Gleichung in x', y', z' die Gleichung des fraglichen Ortes, weil (x', y', z') einen beliebigen Punkt der geraden Linie bezeichnet.

Wir sehen daraus, dass die Aufgabe eine völlig bestimmte ist, welche verlangt, eine Fläche zu finden, die durch eine längs dreier fester geraden Linien*) sich bewegende Gerade erzeugt wird. Denn indem wir zunächst nach Art. 40 die Bedingungen ausdrücken, unter welchen die bewegliche jede der festen Geraden schneidet, erhalten wir die drei nothwendigen Relationen zwischen m, n, p, q. Wir erkennen auch auf geometrischem Wege, dass die Bewegung der geraden Linie durch die gegebenen Bedingungen vollständig geregelt ist. Denn eine gerade Linie ist vollständig bestimmt, wenn sie durch einen gegebenen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen und zwei feste gerade Linien schneiden soll, weil der Punkt resp. die Ebene mit jeder der beiden geraden Linien eine Ebene resp. einen Punkt bestimmt und der Durchschnitt dieser Ebenen andernfalls die Verbindungslinie dieser Punkte die fragliche Gerade ist. Wenn sich nun der Punkt, durch welchen die gerade Linie gehen soll, selbst längs einer dritten festen Geraden bewegt — andernfalls die Ebene um eine dritte feste Gerade gedreht wird —, so erhalten wir der stetigen Reihe der Lagen entsprechend eine stetige Reihe von geraden Linien, deren Vereinigung die Ortsfläche bildet.

116. Wir gehen hiernach an die Lösung der gestellten Aufgabe: Die durch eine bewegte von drei festen geraden Linien stets geschnittene Gerade erzeugte Fläche zu bestimmen.

Zur möglichsten Abkürzung der Arbeit untersuchen wir zuerst, welche Wahl der Coordinatenaxen am meisten geeignet ist, die Gleichungen der festen geraden Linien in der möglichst einfach-

*) Oder auch längs fester Curven beliebiger Art.

sten Form zu geben. Wir erkennen sogleich, dass es am passendsten sein muss, die Axen respective parallel den drei gegebenen geraden Linien zu wählen — eine Wahl, die nur in dem beim Hyperboloid mit einem Mantel nach Art. 114 nicht möglichen speciellen Falle nicht getroffen werden kann, wo die drei gegebenen Geraden einer und derselben Ebene parallel sind; wir wollen diesem Falle im nächsten Artikel eine besondere Untersuchung widmen. Dann kann nur noch die möglichst symmetrische Lage des Anfangspunktes der Coordinaten fraglich sein. Wir erhalten aber ein Parallelepiped, von welchem die gegebenen Linien Kanten sind, wenn wir durch jede der drei geraden Linien Ebenen legen, welche den jedesmaligen beiden andern parallel sind, und erkennen im Centrum desselben jene möglichst symmetrische Lage des Anfangspunktes; die durch dasselbe gehenden Parallelen zu jenen Geraden sind die Coordinatenaxen.[13]) Wenn

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

die Gleichungen jener drei Paare von Ebenen sind, so werden durch

$$y = b, \ z = -c; \quad z = c, \ x = -a; \quad x = a, \ y = -b$$

die drei festen Geraden repräsentirt. Die Gleichungen einer die beiden ersten von ihnen durchschneidenden geraden Linie sind

$$z + c = \lambda(y - b), \quad z - c = \mu(x + a),$$

und dieselbe durchschneidet die dritte, wenn $c + \mu a + \lambda b = 0$ ist; die Einführung der Werthe von λ und μ aus den vorigen Gleichungen giebt

$$c(x + a)(y - b) + a(y - b)(z - c) + b(z + c)(x + a) = 0,$$

oder durch Reduction

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0.$$

Durch Anwendung der Kriterien des Art. 87 erkennen wir, dass diese Gleichung ein Hyperboloid mit einem Mantel repräsentirt, wie auch schon daraus geschlossen werden kann, dass sie nach der Voraussetzung eine Regelfläche und nach ihrer Form eine Fläche zweiten Grades mit Centrum bezeichnet.

Die Auflösung der Aufgabe kann sodann auch in folgender Form gegeben werden.

Den Gleichungen der beweglichen Geraden

$$\frac{x - x'}{\cos \alpha} = \frac{y - y'}{\cos \beta} = \frac{z - z'}{\cos \gamma}$$

entsprechen als Bedingungen des Durchschnitts mit den festen geraden Leitlinien

$$\frac{y'-b}{\cos\beta}=\frac{z'+c}{\cos\gamma},\quad \frac{z'-c}{\cos\gamma}=\frac{x'+a}{\cos\alpha},\quad \frac{x'-a}{\cos\alpha}=\frac{y'+b}{\cos\beta}.$$

Durch die Multiplication der Gleichungen eliminiren wir α, β, γ und erhalten die Gleichung des Ortes in der Form einer Abstandsrelation für seine Punkte

$$(x-a)(y-b)(z-c)=(x+a)(y+b)(z+c),$$

oder durch Reduction ganz wie vorher

$$ayz+bzx+cxy+abc=0.$$

Eine andere allgemeine Lösung des Problems ist diese: Man denke die beiden ersten geraden Linien als Durchschnitte der Ebenenpaare

$$x_1=0,\quad x_2=0;\quad x_3=0,\quad x_4=0;$$

so können die Gleichungen der dritten in der Form

$$x_1=Ax_3+Bx_4,\quad x_2=Cx_3+Dx_4$$

dargestellt werden und die bewegliche Gerade hat als gemeinschaftliche Transversale für die ersten beiden Linien Gleichungen wie

$$x_1=\lambda x_2,\quad x_3=\mu x_4.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung der dritten liefert als Bedingung, unter welcher sie von dieser geschnitten wird,

$$A\mu+B=\lambda(C\mu+D),$$

und die Elimination von λ und μ zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen der beweglichen Geraden giebt die Gleichung der Fläche

$$x_2(Ax_3+Bx_4)=x_1(Cx_3+Dx_4).$$

Eine dritte allgemeine Lösung ist endlich folgende: Sind $p_{ik}^{(1)}, p_{ik}^{(2)}, p_{ik}^{(3)}$ die je sechs Coordinaten der gegebenen Geraden respective und bezeichnen wir abkürzend mit $(p_{12}, p_{23}, p_{31})^{(1)}$ die Determinante $p_{12}^{(1)}[p_{23}^{(2)}p_{31}^{(3)}-p_{23}^{(3)}p_{31}^{(2)}]+$ etc., und analog in den andern Fällen, so erhält man als die Gleichung des durch die drei gegebenen Geraden bestimmten Hyperboloids

$$\begin{aligned}x_1^2(p_{23}p_{24}p_{34})&+x_2^2(p_{31}p_{34}p_{14})+x_3^2(p_{12}p_{14}p_{24})+x_4^2(p_{23}p_{31}p_{12})\\&+x_1x_4\{(p_{23}p_{31}p_{24})-(p_{12}p_{23}p_{34})\}+x_2x_3\{(p_{31}p_{14}p_{24})+(p_{12}p_{34}p_{14})\}\\&+x_2x_4\{(p_{31}p_{12}p_{34})-(p_{23}p_{31}p_{14})\}+x_3x_1\{(p_{12}p_{24}p_{34})+(p_{23}p_{14}p_{24})\}\\&+x_3x_4\{(p_{12}p_{23}p_{14})-(p_{31}p_{12}p_{24})\}+x_1x_2\{(p_{23}p_{34}p_{14})+(p_{31}p_{24}p_{34})\}=0.\end{aligned}$$

117. Vier gerade Linien des einen Systems schneiden alle Geraden des andern Systems in Punktegruppen von demselben Doppelverhältniss; oder die Verbindungslinien der entsprechenden Punktepaare in projectivischen Reihen (Art. 111) auf zwei windschiefen Geraden sind Erzeugende eines einfachen Hyperboloids.

Denn durch je eine der vier Geraden und irgend eine sie schneidende gehen vier Ebenen und nach Art. 51 wird daher jede andere Gerade vom System dieser Transversalen in constantem Doppelverhältniss geschnitten.

Sind die Träger der projectivischen Reihen die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, so ist für eine Gerade, welche beide schneidet, nothwendig

$$x_1 = \lambda' x_2, \quad x_3 = \mu' x_4$$

und damit eine andere Gerade

$$x_1 = \lambda x_2, \quad x_3 = \mu x_4$$

sie projectivisch theile, muss nach Art. 82 der „Kegelschnitte"

$$\lambda : \lambda' = \mu : \mu'$$

sein. Die Elimination von λ zwischen den Gleichungen

$$x_1 = \lambda x_2, \quad \lambda' x_3 = \mu' \lambda x_4$$

giebt aber

$$\lambda' x_2 x_3 = \mu' x_1 x_4.$$

Man sagt daher von vier Geraden derselben Regelschaar, dass sie ein bestimmtes Doppelverhältniss haben, nämlich das ihrer vier Schnittpunkte mit irgend einer ihrer Transversalen oder einer Geraden der andern Regelschaar; und wenn man in einer solchen zwei projectivische Reihen oder insbesondere eine Involution von Punkten festsetzt, so spricht man von den durch diese gehenden Geraden der Regelschaar als von projectivischen resp. involutorischen Systemen. Darum ist die Erzeugung a) des linearen Complexes in Art. 58 unter 1) identisch mit der Angabe von Chasles (Lit. Note 10), dass seine Geraden die Transversalen der Paare in einer involutorisch geordneten Regelschaar seien — wie es die Betrachtung eines beliebigen Querschnittes des zugehörigen einfachen Hyperboloides zeigt.

Wenn die Träger der Reihen statt windschief zu sein sich schneiden, so geht das System der Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punktepaare und damit das Hyperboloid in das

Tangentensystem und die Ebene eines Kegelschnittes über. (Vergl. Art. 111 die Degeneration in dem Kegel zweiten Grades.)

118. Aus der im Art. 111 auseinandergesetzten allgemeinen Theorie erhellt, dass das hyperbolische Paraboloid auch gerade Linien enthält, die ganz in der Fläche liegen. Denn die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad \text{(Art. 89)}$$

ist in der allgemeinen Form $x_1 x_3 = x_2 x_4$ enthalten und die Fläche enthält daher die beiden Systeme von geraden Linien

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \lambda, \quad \lambda\left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\right) = \frac{z}{c}.$$

Diese beiden Gleichungen zeigen, dass jede der geraden Linien in der Fläche parallel zu der einen oder der andern der beiden festen Ebenen

$$\frac{x}{y} \pm \frac{y}{b} = 0$$

sein muss, und dies bezeichnet eine wesentliche Verschiedenheit zwischen den geraden Linien des Paraboloids und denen des Hyperboloids. (Vergl. Art. 114.) Im Uebrigen wird wie im Art. 112 bewiesen, dass jede gerade Linie des einen Systems jede des andern durchschneidet, während zwei gerade Linien des nämlichen Systems sich nicht durchschneiden.

Wir wenden uns hiernach zur Auflösung des umgekehrten Problems, d. h. zur Bestimmung derjenigen Fläche, welche durch eine längs dreier festen zur nämlichen Ebene parallelen Geraden fortbewegte gerade Linie erzeugt wird. Wir denken die Ebene xy als parallel den drei festen Geraden und die Axen x und y insbesondere als parallel den beiden ersten unter ihnen, die Axe z aber als eine ihrer gemeinsamen Transversalen, so dass ihre Gleichungen sind

$$x = 0,\ z = a; \quad y = 0,\ z = b; \quad x = my,\ z = c.$$

Dann sind die Gleichungen einer die beiden ersten schneidenden geraden Linie

$$x = \lambda(z - a), \quad y = \mu(z - b),$$

und dieselbe durchschneidet zugleich die dritte, wenn

$$\lambda(c - a) = m\mu(c - b)$$

ist. Daraus entspringt als die Gleichung des Ortes

$$(a - c)\, x\, (z - b) = (b - c)\, y\, (z - a),$$

welche ein hyperbolisches Paraboloid repräsentirt, weil das von den Gliedern zweiten Grades gebildete Polynom in zwei reelle Factoren zerlegbar erscheint.

In derselben Art können wir die Fläche untersuchen, die durch eine gerade Linie erzeugt wird, welche bei ihrer Bewegung längs zweier festen Geraden einer festen Ebene stets parallel bleibt. Sind jene Linien durch

$$x = 0,\ z = a;\quad y = 0,\ z = -a$$

und ist die feste Ebene durch

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

dargestellt, so sind die Gleichungen einer gemeinschaftlichen Transversale jener beiden

$$x = \lambda (z - a), \quad y = \mu (z + a),$$

und die Bedingung ihres Parallelismus mit der festen Ebene ist

$$\cos \gamma + \lambda \cos \alpha + \mu \cos \beta = 0,$$

so dass die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$\cos \gamma (z^2 - a^2) + x \cos \alpha (z + a) + y \cos \beta (z - a) = 0$$

erhalten wird, welche ein hyperbolisches Paraboloid darstellt, weil das Polynom der Glieder vom zweiten Grade in zwei reelle Factoren zerfällt.

Ein hyperbolisches Paraboloid ist die Grenze eines Hyperboloids mit einem Mantel, für welches die erzeugende Gerade in einer ihrer Lagen ganz in unendlicher Entfernung liegt, wie sich dies auch aus dem Parallelismus derselben zu einer festen Ebene ergiebt, als deren unendlich entfernte Gerade jene Lage betrachtet werden kann.

Wir sahen im Art. 110, dass eine Ebene eine Fläche zweiten Grades berührt, wenn sie sie in zwei reellen oder imaginären geraden Linien schneidet, und im Art. 89, dass ein Paraboloid durch die unendlich entfernte Ebene in zwei reellen oder imaginären geraden Linien geschnitten wird; wir schliessen daraus, dass jedes Paraboloid die unendlich entfernte Ebene berührt.

119. In dem Falle des hyperbolischen Paraboloids schneiden alle gerade Linien des einen Systems die des

andern nach constantem Verhältniss oder in ähnlichen Reihen.

Denn da die Erzeugenden alle derselben Ebene parallel sind, so können wir durch irgend drei von ihnen Parallelen zu dieser Ebene legen, und der Satz, den wir aussprechen, ergiebt sich aus der elementaren Wahrheit, dass alle geraden Linien, welche drei parallele Ebenen schneiden, von ihnen in constantem Verhältniss getheilt werden.

Man schliesst ihn auch aus der Existenz einer ganz in unendlicher Entfernung liegenden Erzeugenden in jedem der beiden Systeme; denn aus ihr ergiebt sich, dass in den projectivischen Theilungen, welche die Linien des einen Systems auf denen des andern bestimmen, die unendlich entfernten Punkte einander entsprechen; nach der Natur des Doppelverhältnisses reducirt sich dasselbe dadurch auf ein einfaches Verhältniss.

Wenn umgekehrt zwei begrenzte einander nicht schneidende gerade Linien in gleiche Anzahlen gleicher Theile getheilt werden, so sind die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Theilungen die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids. Man kann hiernach, wie auch in dem Falle des Hyperboloids mit einem Mantel, die Form der Fläche leicht durch gespannte Fäden dem Auge anschaulich machen.

Um dies hinsichtlich des hyperbolischen Paraboloids direct zu beweisen, denken wir die gerade Linie, welche zwei entsprechende Endpunkte der Geraden verbindet, als Axe der z und die Axen der y und der x als eben diesen Geraden parallel, zugleich so, dass die Ebene xy die Entfernung zwischen ihnen halbirt. Sind dann die Längen der gegebenen Linien a und b, so sind die Coordinaten zweier entsprechender Punkte

$$z = c, \quad x = \mu a, \quad y = 0; \quad z = -c, \quad x = 0, \quad y = \mu b,$$

und die Gleichungen der diese Punkte verbindenden Geraden sind

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu, \quad 2cx - \mu az = \mu ac,$$

so dass durch Elimination von μ zwischen ihnen die Gleichung der Ortsfläche in der Form hervorgeht

$$2cx = a(z + c)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

die in der That ein hyperbolisches Paraboloid repräsentirt.

120. Man soll die Bedingungen finden, unter denen die allgemeine Gleichung eine Umdrehungsfläche darstellt oder unter denen die beiden Kreisschnittsysteme der Fläche in eines zusammenfallen.

In diesem Falle kann nach Art. 86, 87 die Gleichung der Fläche, sofern sie zu den Centralflächen gehört, auf die Form

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

und wenn dies nicht der Fall ist (Art. 89), auf die Form

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{2z}{c}$$

gebracht werden; wenn also in irgend einem Wege das Polynom der höchstpotenzirten Glieder auf die Summe der Quadrate von drei rectangulären Coordinaten reducirt wird, so sind die Coefficienten von zweien derselben im angenommenen Falle einander gleich. Es erhellt daraus, dass die geforderte Bedingung erhalten wird, indem man diejenige bildet, unter welcher die cubische Gleichung der Discriminante gleiche Wurzeln hat.

Da aber die Wurzeln der cubischen Gleichung der Discriminante immer reell sind, so kann ihre Discriminante stets als eine Summe von Quadraten ausgedrückt werden („Vorlesungen" VI, Art. 46 f.) und wird, so lange die Coefficienten der gegebenen Gleichung wesentlich reell sind, nur verschwinden, wenn zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, die man durch das folgende Verfahren kürzer bestimmt.

Es handelt sich um die Frage nach der Möglichkeit einer Transformation, durch welche die Identität

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy$$
$$=A(X^2+Y^2)+CZ^2$$

erfüllt wird. Wegen

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2 \quad \text{(Art. 19)}$$

würde dann, für $\lambda=A$, die Grösse

$$(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy)-\lambda(x^2+y^2+z^2)$$

ein vollkommenes Quadrat, und man hat die Bedingungen aufzustellen, unter denen dies stattfindet.

Nun erkennt man leicht, dass für den Fall, wo

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{23}yz+2A_{13}zx+2A_{12}xy$$

ein vollkommenes Quadrat ist, die sechs Bedingungen

$$A_{ii}A_{kk} = A_{ik}^2, \quad A_{ii}A_{jk} = A_{ij}A_{ik}$$

erfüllt sind, von denen die letzten die ersten enthalten, sodass die Reciprocalgleichung identisch verschwindet.

Die letzten drei Gleichungen werden im gegenwärtigen Falle

$$(a_{11}-\lambda)a_{23}=a_{13}a_{12}, \quad (a_{22}-\lambda)a_{13}=a_{12}a_{23}, \quad (a_{33}-\lambda)a_{12}=a_{23}a_{13},$$

und indem man aus jeder von diesen Gleichungen λ bestimmt, erkennt man, dass die Reduction nur dann möglich ist, wenn die Coefficienten der gegebenen Gleichung durch die Relationen

$$a_{11} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{23}a_{13}}{a_{12}}$$

verbunden sind.

Wenn sie erfüllt sind und wenn wir einen dieser gemeinschaftlichen Werthe für λ in die Form

$$(a_{11}-\lambda)x^2+(a_{22}-\lambda)y^2+(a_{33}-\lambda)z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy$$

substituiren, so wird sie in ein vollkommenes Quadrat, nämlich in

$$a_{23}a_{13}a_{12}\left(\frac{x}{a_{23}}+\frac{y}{a_{13}}+\frac{z}{a_{12}}\right)^2 = (C-A)Z^2$$

verwandelt; und da die Ebene $Z=0$ eine Normalebene zur Umdrehungsaxe der Fläche repräsentirt, so ist auch

$$\frac{x}{a_{23}}+\frac{y}{a_{13}}+\frac{z}{a_{12}} = 0$$

die Gleichung einer zu dieser Axe normalen Ebene.

In dem speciellen Falle, in welchem der soeben bestimmte gemeinschaftliche Werth von λ verschwindet, bildet die Vereinigung der höchsten Glieder in der gegebenen Gleichung ein vollständiges Quadrat und die Gleichung repräsentirt also entweder einen parabolischen Cylinder oder die Verbindung von zwei parallelen Ebenen. (Art. 89, IV und V.) Diese Flächen sind Grenzfälle der Umdrehungsflächen; jede Normale zu beiden Ebenen ist die Umdrehungsaxe im letztern Falle, und der parabolische Cylinder ist die Grenze einer durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugten Fläche für die in das Unendliche wachsende Entfernung dieser Axe.

121. Wenn unter den drei Grössen a_{23}, a_{13}, a_{12} eine den Werth Null hat, so muss noch eine zweite von ihnen verschwinden, wenn die Fläche eine Umdrehungsfläche sein soll. Für $a_{23} = a_{13} = 0$ werden aber die vorigen Bedingungen

$$a_{11} - a_{12}\frac{a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - a_{12}\frac{a_{23}}{a_{13}} = a_{33},$$

und man erhält durch Elimination von $\frac{a_{23}}{a_{13}}$ zwischen ihnen

$$(a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33}) = a_{12}^2.$$

Man erhält diese Bedingung auch direct, indem man die Form

$$(a_{11} - \lambda)x^2 + (a_{22} - \lambda)y^2 + (a_{33} - \lambda)z^2 + 2a_{12}xy$$

als ein vollkommenes Quadrat charakterisirt; denn dies giebt

$$\lambda = a_{33}, \quad (a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33}) = a_{12}^2.$$

122. Die vorhergehende Theorie kann auch aus der Bemerkung abgeleitet werden, dass für eine Umdrehungsfläche das Problem der Auffindung der Hauptebenen ein unbestimmtes wird.

Denn da jeder zur Umdrehungsaxe normale Schnitt ein Kreis ist, so wird jedes System paralleler Sehnen desselben durch diejenige die Umdrehungsaxe enthaltende Ebene halbirt, welche den zu diesen Sehnen normalen Durchmesser enthält und daher zu ihnen selbst normal ist. Daher ist jede durch die Umdrehungsaxe gehende Ebene eine Hauptebene.

Nun sind die zu diesen Diametralebenen normalen Sehnen nach Art. 73 durch die Gleichungen

$$(a_{11} - \lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0,$$
$$a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y + a_{23}z = 0,$$
$$a_{13}x + a_{23}y + (a_{33} - \lambda)z = 0$$

gegeben, welche für λ als eine der Wurzeln der cubischen Gleichung der Discriminante drei in einer der fraglichen geraden Linien sich schneidende Ebenen repräsentiren. Das Problem wird nur dann unbestimmt, wenn sie alle die nämliche Ebene darstellen, d. h. wenn die Bedingungen

$$\frac{a_{11} - \lambda}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22} - \lambda} = \frac{a_{13}}{a_{23}}, \quad \frac{a_{11} - \lambda}{a_{13}} = \frac{a_{12}}{a_{23}} = \frac{a_{13}}{a_{33} - \lambda}$$

erfüllt sind, welche zu den vorigen Relationen zurückführen.

123. Die Kugel erscheint für viele der vorhergehenden Entwickelungen als einfaches Beispiel. Die Polarebene ist rechtwinklig auf dem Durchmesser des Pols; alle Paare conjugirter Geraden sind orthogonal; etc. Wir fügen hier einiges sie besonders Betreffende hinzu. Für rechtwinklige Cartesische Coordinaten entspricht der Kugel vom Radius r und dem Mittelpunkt von den Coordinaten a, b, c die Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

oder

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0,$$

worin für

$$a^2+b^2+c^2-r^2\equiv p,\quad r^2=a^2+b^2+c^2-p$$

erhalten wird. (Gleichung mit vier wesentlichen Constanten a, b, c, p.) Für einen beliebigen Punkt x_1, y_1, z_1 ist das Resultat der Substitution seiner Coordinaten an Stelle der Veränderlichen in die Gleichung der Kugel

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2-r^2$$

oder

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-2ax_1-2by_1-2cz_1+p$$

dem Quadrat der Länge der von ihm an die Kugel gehenden Tangenten gleich, oder gleich dem Producte der Abschnitte, die die Kugel auf dem nach ihm gehenden Durchmesser bestimmt, auch dem der beiden Normalen, die von ihm an die Kugel gehen — und dies lässt sich auf die Flächen zweiten Grades ausdehnen. Man nennt dies Substitutionsresultat die Potenz P des Punktes in Bezug auf die Kugel, wonach p die Potenz des Coordinatenanfangspunktes ist. Die Potenz ist reell für jeden reellen Punkt, positiv für äussere, negativ für innere (Product der Normalen, negatives Quadrat der halben kürzesten Sehne durch den Punkt) Punkte; für die Punkte der Fläche selbst ist sie Null.

Eine Kugel ist durch vier Punkte 1, 2, 3, 4 bestimmt; man erhält ihre Gleichung oder die Relation zwischen diesen vier festen Punkten und einem beliebigen fünften Punkte ihrer Oberfläche durch Elimination der Coefficienten $1, 2a, 2b, 2c, p$ zwischen der Gleichung

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+p=0$$

und den vier den gegebenen Punkten entsprechenden in der Form

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z, & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2, & x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2, & x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese ist durch Entwickelung nach den Elementen der ersten Reihe, den Distanzquadraten des Anfangspunktes von den fünf Punkten, geometrisch zu interpretiren, da die zugehörigen ersten Minoren die Volumina der aus den je übrigen vier als Ecken gebildeten Tetraeder sind.

Man nennt

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+p=0$$

mit

$$r^2=a^2+b^2+c^2-p$$

die Normalgleichung der Kugel.

In Bezug auf zwei Kugeln $a_1 b_1 c_1 p_1$ und $a_2 b_2 c_2 p_2$ giebt es einen Ort der Punkte von gleichen endlichen Potenzen für beide — für die unendlich ferne Ebene sind beide unendlich gross —

$$P_1 - P_2 = 0$$

oder

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+2(c_2-c_1)z+p_1-p_2=0,$$

eine stets reelle zur Centrale der Kugeln normale Ebene, die nur für concentrische Kugeln auch ins Unendliche rückt, die Potenz- oder Radical-Ebene der Kugeln. (Vergl. „Kegelschn." Art. 103 f., überhaupt Kap. VI und VII zu weiterer Ausführung.)

Für drei Kugeln erhält man drei Potenzebenen, die sich in einer Geraden schneiden, der Potenzaxe; vier Kugeln liefern als Schnitt ihrer vier Potenzaxen und ihrer sechs Potenzebenen einen Punkt, den man ihr Potenzcentrum nennt.

Die Punkte von gleicher Potenz sind Mittelpunkte von Kugeln mit der Potenz gleichen Radienquadraten, die die gegebenen unter rechten Winkeln schneiden; denn man erhält für den Cosinus des Winkels ω, unter welchem zwei Kugeln von den Radien r_1, r_2 und der Centraldistanz d sich durchschneiden,

$$\cos\omega = -\frac{c^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1 r_2};$$

also $\cos\omega$ proportional zu

$$-\{p_1+p_2-2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\}$$

und somit nur Null, wie es $\omega = 90^0$ fordert, für

$$c^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 .$$

Diese lineare Relation zwischen den Constanten der Normalgleichungen der Kugeln bedingt ihre Orthogonalität; vier solche bestimmen also eine Kugel stets eindeutig. Man nennt auch $c^2 - r_1{}^2 - r_2{}^2$ die Potenz p_{12} zweier Kugeln in Bezug auf einander und hat dann stets

$$p_{12} = p_1 + p_2 - 2(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) = -2 r_1 r_2 \cos\omega .$$

Wenn man noch bemerkt, dass eine Kugel mit reellem Mittelpunkte und negativem Radiusquadrat als rein imaginär bezeichnet wird und natürlich durch die Kugel vom nämlichen Mittelpunkt und dem gleichen positiven Radiusquadrat vertreten werden kann, so ist man in der Lage, alle im Vorigen enthaltenen speciellen Fälle zu discutiren.[14])

(Man vergleiche auch das von der Inversion in „Kegelschn." Art. 197 f. Gesagte.)

Man bildet für die Untersuchung der Kugelsysteme und zum Zwecke von Anwendungen in der Anal. Geom. der krummen Oberflächen, die im 2. Band dieses Werkes entwickelt werden, sogenannte pentasphärische Coordinaten, mittelst deren man jede Kugel durch fünf paarweise orthogonale feste Kugeln linear ausdrückt. (Vergl. Bd. 2: Von den Flächen vierter Ordnung, speciell von den Cycliden, Art. 342 f.)

124. Wir schliessen dieses Kapitel mit einer Reihe von Beispielen über die Anwendung der analytischen Geometrie zur Untersuchung geometrischer Oerter.

B. 1. Welches ist der Ort eines Punktes, dessen kürzeste Abstände von zwei gegebenen einander nicht durchschneidenden Geraden gleich gross sind?

Die Auflösung dieses Problems ist in den Formeln des Art. 15 enthalten, wenn die Gleichungen der gegebenen Geraden in ihrer allgemeinen Form vorausgesetzt werden. Wir können aber das Resultat in einer sehr einfachen Form darstellen, indem wir den kürzesten Abstand beider Geraden zur Axe der z wählen und die beiden andern Axen durch den Mittelpunkt desselben so legen, dass sie die von den Projectionen der Geraden auf ihre Ebene gebildeten Winkel halbiren. Dann sind ihre Gleichungen von der Form

$$z = c, \quad y = mx; \quad z = -c, \quad y = -mx;$$

die Bedingungen des Problems geben daher

$$(z-c)^2 + \frac{(y-mx)^2}{1+m^2} = (z+c)^2 + \frac{(y+mx)^2}{1+m^2}$$

oder $cz(1+m^2) + mxy = 0$; also in Ebenencoordinaten

$$m\zeta + c(1+m^2)\xi\eta = 0.$$

Der Ort ist also ein hyperbolisches Paraboloid, welches die Axen der x und y enthält, den Anfangspunkt der Coordinaten zum Scheitel und die Axe der z zur Axe hat; seine Hauptschnitte liegen in den Ebenen $x = \pm y$ und sind damit gleiche und entgegengesetzt gerichtete Parabeln von demselben Scheitel, so dass der Brennpunkt der einen in der Directrix der andern liegt und diese Directrixen ein rechtwinkliges Paar von Geraden mit der geforderten Distanzrelation für die Punkte des Ortes sind. Die gegebenen Geraden sind in Bezug auf das gefundene Paraboloid einander conjugirt (vergl. Art. 78, B.) und tragen zugleich rechtwinklige Involutionen harmonischer Polarebenen (Art. 78, Art. 35, 2); ebenso die Directrixen der Hauptschnittparabeln.

B. 2. Wenn die kürzesten Entfernungen des Punktes von den beiden windschiefen Geraden in einem gegebenen Verhältnisse λ stehen sollen, so erhält man die Gleichung des Ortes in der vier Gerade markirenden Form

$$\{(1+\lambda)z + (1-\lambda)c\}\,\{(1-\lambda)z + (1+\lambda)c\}$$
$$+ \frac{1}{1+m^2}\{(1+\lambda)y + (1-\lambda)mx\}\,\{(1-\lambda)y + (1+\lambda)mx\} = 0.$$

Es ist ein einfaches Hyperboloid, dessen eine Hauptaxe in die Linie der kürzesten Entfernung der Geraden fällt. Die gegebenen Geraden sind in Bezug auf dasselbe conjugirt und zugleich die Träger rechtwinkliger Polarinvolutionen, wie auch direct geometrisch als Folge der Definition erwiesen werden kann.

B. 3. Zwei zu einander normale Ebenen gehen jede durch eine feste gerade Linie; man soll die von ihrer Durchschnittslinie erzeugte Fläche bestimmen.

Wir wählen die Axen wie im Beispiel 1; dann sind

$$\lambda(z-c) + y - mx = 0, \quad \lambda'(z+c) + y + mx = 0$$

die Gleichungen der Ebenen und die Bedingung ihrer Rechtwinkligkeit ist

$$\lambda\lambda' + 1 - m^2 = 0;$$

die Einführung der aus den vorigen Gleichungen entspringenden

Werthe von λ, λ' in dieselbe giebt die Gleichung eines Hyperboloids mit einem Mantel

$$y^2 - m^2x^2 + (1 - m^2)(z^2 - c^2) = 0.$$

Wenn die festen Geraden sich durchschneiden, also für $c = 0$, so reducirt sich der Ort auf eine Kegelfläche zweiten Grades.

Die Substitution $x = \pm my$ giebt als Gleichungen der Schnitte mit Ebenen, die zu den Scheitelkanten der erzeugenden Büschel normal durch die Axe z gehen,

$$(1 + m^2)y^2 + z^2 = c^2,$$

d. h. die Kreisschnitte des gebildeten Hyperboloids liegen normal zu den gegebenen Erzeugenden und haben die Strecken zwischen denselben zu Durchmessern. Man bemerkt, dass in der Gleichung der Fläche die Coefficientenrelation $a_{11} + a_{22} - a_{33} = 0$ stattfindet und erinnert aus dem Beisp. des Art. 109, dass unter dieser Voraussetzung immer zwei Paare derartiger Erzeugenden, nämlich zwei der einen Schaar und ihre Parallelen aus der andern, auf dem einfachen Hyperboloid existiren. Das Hyperboloid des vorigen Beispiels zeigt die nämliche Relation unter den Längen der Axen; die Erzeugungen in 2) und in 3) liefern also eine bestimmte Art von einfachen Hyperboloiden: Orthogonale Hyperboloide nach Schröter.[15]) (Vergl. Art. 217, 3; Art. 225 und das Beispiel desselben für verwandte Fälle.)

B. 4. Man soll den Ort der Mittelpunkte aller einer festen Ebene parallelen Geraden finden, welche durch zwei feste sich nicht durchschneidende Gerade begrenzt sind.

Wir nehmen die Ebene $x = 0$ als der festen Ebene parallel und die Ebene $z = 0$ wie im vorigen Beispiel parallel und äquidistant den beiden gegebenen Geraden, so dass die Gleichungen derselben

$$z = c,\; y = mx + n; \quad z = -c,\; y = m'x + n'$$

sind. Der fragliche Ort ist dann offenbar die gerade Linie, in welcher die Ebenen sich schneiden von den Gleichungen

$$z = 0, \quad 2y = (m + m')x + (n + n').$$

B. 5. Bestimme die Umdrehungsfläche, welche durch eine um eine feste sie nicht durchschneidende Axe sich drehende gerade Linie erzeugt wird.

Sei die feste Linie die Axe der z und eine bestimmte Lage der Erzeugenden durch $x = mz + n$, $y = m'z + n'$ ausgedrückt. Da nun jeder Punkt der sich drehenden Geraden einen Kreis beschreibt, dessen Ebene derjenigen der xy parallel ist, so ist

für alle Punkte eines solchen ebenen Schnittes der Werth von $x^2 + y^2$ constant, nämlich in Function von z gleich

$$(mz + n)^2 + (m'z + n')^2;$$

die Gleichung der fraglichen Fläche ist daher

$$x^2 + y^2 = (mz + n)^2 + (m'z + n')^2,$$

und sie ist ein Umdrehungshyperboloid mit einem Mantel.

B. 6. Zwei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade bewegen sich in festen Ebenen so, dass sie stets rechtwinklig zu einander bleiben; welches ist die Gleichung der Kegelfläche, die von der gemeinschaftlichen Normalen dieser beiden Geraden im Anfangspunkt erzeugt wird?

Wir bezeichnen durch a, b, c; a', b', c' die Richtungswinkel der Normalen der festen Ebenen und durch α, β, γ die der beweglichen Geraden; dann sind die Richtungscosinus der Durchschnittslinien der festen Ebenen mit einer zur beweglichen Geraden normalen Ebene (Art. 15) zu

$$\cos\beta\cos c - \cos\gamma\cos b,\ \cos\gamma\cos a - \cos\alpha\cos c,\ \cos\alpha\cos b - \cos\beta\cos a;$$

$$\cos\beta\cos c' - \cos\gamma\cos b',\cos\gamma\cos a' - \cos\alpha\cos c',\cos\alpha\cos b' - \cos\beta\cos a'$$

proportional, und die Bedingung, unter welcher sie zu einander normal sind, ist daher

$$\begin{aligned}&(\cos\beta\cos c - \cos\gamma\cos b)(\cos\beta\cos c' - \cos\gamma\cos b')\\ +&(\cos\gamma\cos a - \cos\alpha\cos c)(\cos\gamma\cos a' - \cos\alpha\cos c')\\ +&(\cos\alpha\cos b - \cos\beta\cos a)(\cos\alpha\cos b' - \cos\beta\cos a') = 0;\end{aligned}$$

die bewegliche Gerade beschreibt daher eine Kegelfläche zweiten Grades.

Die beiden zu einander normalen Geraden in den festen Ebenen bestimmen mit einander eine Ebene, die ihrerseits einen Kegel zweiten Grades umhüllt, den Normalenkegel des ersten.

B. 7. Eine Gerade bewegt sich über zwei andern nicht in derselben Ebene gelegenen geraden Linien so, dass das zwischen denselben enthaltene Segment von einem bestimmten Punkte aus stets unter rechtem Winkel erscheint. Ihr Ort ist ein Hyperboloid mit einem Mantel und speciell für die Rechtwinkligkeit der beiden gegebenen Geraden ein hyperbolisches Paraboloid.

B. 8. Welches ist der Ort eines Punktes, von dem an die Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

drei zu einander rechtwinklige Tangenten gelegt werden können?

Wenn wir uns die Gleichung der Fläche zu drei solchen Geraden als Axen transformirt denken, so erhalten wir nothwendig die Gleichung des dem neuen Anfangspunkte entsprechenden Tangentenkegels in der Form

$$A_{23}yz + A_{13}zx + A_{12}xy = 0,$$

weil die Axen selbst als Kanten des Kegels erscheinen. Nach dem Beispiel des Art. 80 ist aber die allgemeine Gleichung des Tangentenkegels vom Punkte (x', y', z')

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1\right)^2,$$

und wir wissen aus Art. 84, dass die Summe der Coefficienten von x^2, y^2, z^2 beim Uebergange zu einem andern System rectangulärer Axen unverändert bleibt. Wir haben daher, um die Gleichung des Ortes zu erhalten, nur die Bedingung auszudrücken, unter welcher diese Coefficientensumme verschwindet; sie ist

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

B. 9. Der Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate ihrer Distanzen von n festen Ebenen constant ist, ist ein System concentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsoide (Art. 152), deren Mittelpunkt der Minimalwerth der Constanten entspricht; die Quadratsumme der Reciproken der Halbaxen eines Ellipsoids ist das n-fache der Reciproken vom Ueberschuss seiner Constanten über den Minimalwerth. Für dieselbe Constante wird das Ellipsoid zu n von dem zu $(n - 1)$ Ebenen längs des in der ausgeschlossenen Ebene liegenden Schnittes berührt; etc.

Man untersuche die Enveloppe der Ebenen, für die die Summe der Quadrate der Distanzen von n festen Punkten constant ist.

B. 10. Für das durch Drehung einer gleichseitigen Hyperbel entstehende Hyperboloid mit einem Mantel sind die zweiten Kreisschnitte des aus einem Punkte der Fläche über dem Kehlkreise beschriebenen Kegels normal zur Ebene des letzteren.

Die Gleichung des Hyperboloids ist

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2,$$

und für den Scheitel (x', y', z') ist eine Erzeugende des Kegels durch die Gleichungen

$$x - x' = \frac{x' - x_1}{z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y_1}{z'}(z - z')$$

dargestellt und ihr Durchschnittspunkt mit dem Kehlkreise durch

$$x_1 = \frac{x'z - xz'}{z - z'}, \quad y_1 = \frac{y'z - yz'}{z - z'}$$

bestimmt; die Substitution dieser Werthe in die Gleichung des Kehlkreises giebt für den Kegel

$$(x'z - xz')^2 + (y'z - yz')^2 = a^2(z - z')^2.$$

Für $x' = 0$ und $y' = 0$ oder den Scheitel des Kegels im Hauptschnitt der xz-Ebene erhält man die Gleichung eines aus einem Punkte der Axe der z beschriebenen Kreises. Die Normalebenen zur Axe der z und die zur Axe der x sind daher die Ebenen der Kreisschnitte.

B. 11. Die Gleichung des Kegels zu finden, welcher aus dem Scheitel (x', y', z') über dem in der Ebene xy gelegenen Kegelschnitte beschrieben wird,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichungen der geraden Verbindungslinie eines Punktes (α, β) der Basis mit dem Scheitel sind

$$\alpha(z' - z) = z'x - zx', \quad \beta(z' - z) = z'y - zy',$$

und die Substitution dieser Werthe in die Gleichung der Basis liefert als Gleichung des fraglichen Kegels

$$\frac{(z'x - zx')^2}{a^2} + \frac{(z'y - zy')^2}{b^2} = (z' - z)^2.$$

Soll derselbe speciell ein Umdrehungskegel sein, so zeigt die Bedingung des Art. 121 (da hier $a_{12} = 0$ ist), dass dann der Punkt (x', y', z') auf einer in der Ebene xz verzeichneten Hyperbel liegen muss, welche die Scheitel der gegebenen Ellipse zu Brennpunkten und ihre Brennpunkte zu Scheiteln hat.

Wir geben im Folgenden eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Gleichung des Kegels, welcher den Punkt (x', y', z', w') zum Scheitel und die Durchschnittslinie

zweier durch $U = 0$, $V = 0$ repräsentirten Flächen zur Leitcurve hat.

Wenn wir durch

$$U + \lambda\delta U + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2}\delta^2 U + \text{etc.}, \qquad V + \lambda\delta V + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2}\delta^2 V + \text{etc.}$$

die Resultate der Substitution von $x + \lambda x'$, $y + \lambda y'$, etc. für x, y etc. in die Gleichungen der Flächen bezeichnen, so ist das Ergebniss der Elimination von λ zwischen diesen Formen die Gleichung des fraglichen Kegels. Denn die Punkte, in denen die gerade Verbindungslinie von (x', y', z', w') mit (x, y, z, w) die Fläche U schneidet, werden aus der Vergleichung des ersten dieser Substitutionsresultate mit Null erhalten, und ebenso die Durchschnittspunkte derselben Linie mit der Fläche V aus dem zweiten; da aber die Resultante beider Gleichungen nur für eine gemeinschaftliche Wurzel derselben verschwindet, so liegt unter der Voraussetzung ihres Verschwindens der Punkt (x, y, z, w) in einer durch (x', y', z', w') gehenden und die Durchschnittscurve der Flächen schneidenden Geraden.

B. 12. Die Kegel, welche über den durch die kleinste Axe eines Ellipsoides gehenden Hauptschnitten aus den Endpunkten der grossen und der mittlern Axe beschrieben werden, sind

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \qquad \frac{(y-b)^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2};$$

sie besitzen eine gemeinschaftliche Tangentenebene und einen gemeinschaftlichen parabolischen Schnitt; diese beiden Ebenen bestimmen mit dem Ellipsoid Querschnitte, deren Inhalte im Verhältniss 1 : 2 stehen.

B. 13. Die Gleichung des Kegels, der das Centrum eines Ellipsoids zum Scheitel hat und dessen Basis der durch die Polarebene eines Punktes (x', y', z') mit ihm bestimmte Schnitt ist, wird dargestellt durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right)^2.$$

B. 14. Wenn eine Ebene um einen festen Punkt in ihr so bewegt wird, dass sie in jeder ihrer Lagen mit n festen Ebenen Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ bildet, für welche

$$c_1 \cos\alpha_1 + c_2 \cos\alpha_2 + \cdots + c_n \cos\alpha_n = k$$

ist, wo $c_1, c_2, \ldots, c_n, k$ Constanten bezeichnen, so umhüllt sie einen Drehungskegel zweiten Grades von unveränderlicher Axe. Die Summe

$$\Sigma_1^n c_i \cos \alpha_i$$

hat ihren Minimalwerth, wenn derselbe sich auf eine Gerade, diese Axe selbst, und ihren Maximalwerth, wenn er sich auf eine zu dieser normale Ebene reducirt.

Wenn die festen Ebenen durch

$$A_i x + B_i y + C_i z = D_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und die bewegliche Ebene E durch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

dargestellt sind, so geht

$$\Sigma_1^n c_i \cos \alpha_i = k$$

für $r = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_i = (A_i^2 + B_i^2 + C_i^2)^{\frac{1}{2}}$ in

$$\Sigma c_i \frac{\alpha A_i + \beta B_i + \gamma C_i}{r r_i} = k,$$

also für $a = \Sigma_1^n c_i \frac{A_i}{r_i}, \quad b = \Sigma_1^n c_i \frac{B_i}{r_i}, \quad c = \Sigma_1^n c_i \frac{C_i}{r_i}$ in

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{r} = k$$

über. Dies ist identisch mit

$$\frac{\alpha \frac{a}{c} + \beta \frac{b}{c} + \gamma}{r\sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1}} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

oder

$$\sin(E, g) = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

wenn g die durch $x = \frac{a}{c} z, \ y = \frac{b}{c} z$ dargestellte Gerade ist und (E, g) den von ihr mit der beweglichen Ebene eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Diese Gerade ist die Axe des von der letzteren umhüllten Rotationskegels, und die erhaltene Relation zeigt, dass k nicht grösser als sein kann

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

und dass dann der Kegel in eine zu g normale Ebene übergeht. Für $k = 0$ wird der Kegel zum Cylinder von der Axe g*).

*) Sind die c_i die Flächenzahlen von Figuren in gegebenen Ebenen, so ist k die Summe ihrer Projectionen auf die bewegliche Ebene; die

Wenn die bewegliche Ebene statt durch den zum Anfangspunkt genommenen festen Punkt zu gehen, eine constante Entfernung e von ihm behält, so sind respective

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = e r, \quad a\alpha + b\beta + c\gamma - k r = 0$$

ihre Gleichung und die Bedingung; man findet die Enveloppe in der Form

$$(ax + by + cz - ke)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - e^2)(a^2 + b^2 + c^2 - k^2).$$

B. 15. Man soll den Ort derjenigen Punkte der Fläche zweiter Ordnung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmen, deren Normalen die dem Punkte (x', y', z') entsprechende Normale schneiden.

Die fraglichen Punkte bilden den Durchschnitt der Fläche mit dem Kegel

$$a^2(y'z - yz')(x - x') + b^2(z'x - zx')(y - y')$$
$$+ c^2(x'y - xy')(z - z') = 0.$$

B. 16. Man soll den Ort der Pole der Tangentenebenen einer Fläche zweiter Ordnung in Bezug auf eine andere Fläche zweiter Ordnung bestimmen.

Wir haben zur Auflösung dieses Problems die Bedingung auszudrücken, unter welcher die Polare von (x', y', z', w') in Bezug auf die zweite Fläche die erste berührt, d. h. wir haben in die im Art. 80 gegebene Bedingung für die Berührung einer Ebene mit einer Fläche zweiter Ordnung an Stelle der ξ, η, ζ, ω die Derivirten U_1, U_2, U_3, U_4 zu substituiren. Der fragliche Ort ist daher eine Fläche zweiter Ordnung.

B. 17. Man soll den Kegel darstellen, welcher durch die im Scheitel eines gegebenen Kegels auf den Tangentenebenen desselben errichteten Normalen gebildet wird.

Sei $Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0$ der gegebene Kegel, so ist eine seiner Tangentenebenen $Lx'x + My'y + Nz'z = 0$ und ihre durch den Anfangspunkt gehende Normale somit

$$\frac{x}{Lx'} = \frac{y}{My'} = \frac{z}{Nz'}.$$

Tangentenebenen der erhaltenen Rotationskegel geben constante Summen, die Normalebenen zu g die Maximalsumme derselben.

Bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Werth dieser Grössen durch ϱ, so ist

$$x' = \frac{x}{L\varrho}, \quad y' = \frac{y}{M\varrho}, \quad z' = \frac{z}{N\varrho},$$

und die Substitution in $Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 = 0$ giebt nach Division mit ϱ^2

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 0$$

als die fragliche Gleichung. Ihre Form zeigt, dass die Relation zwischen beiden Kegelflächen eine reciproke ist und dass also die Kanten des ersten normal sind zu den Tangentenebenen des zweiten. Man erkennt leicht, wie dies Problem einen speciellen Fall des vorhergehenden bildet.

Wenn die Gleichung des Kegels in der Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + 2a_{12}xy = 0$$

gegeben ist, so wird die des Reciprokalkegels in der Form

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)x^2 + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)y^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)z^2$$
$$+ 2(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})yz + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})zx + 2(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})xy = 0$$

gefunden, übereinstimmend mit der der Reciprokalcurve der analytischen Planimetrie.

B. 18. Eine gerade Linie bewegt sich so, dass drei feste Punkte in ihr in drei festen Ebenen bleiben; welches ist der von einem beliebigen Punkte dieser Linie durchlaufene Ort?

Wir denken die drei festen Ebenen als Coordinatenebenen und als von der geraden Linie in den Punkten A, B, C geschnitten und nennen die Coordinaten des betrachteten Punktes α, β, γ. Die Coordinaten von A sind alsdann

$$0, \quad \frac{AB}{PB}\beta, \quad \frac{AC}{PC}\gamma,$$

wo die Verhältnisse $AB : PB$ und $AC : PC$ bekannt sind. Indem wir dann nach Art. 10 die Unveränderlichkeit der Distanz PA ausdrücken, erkennen wir als die Ortsfläche ein Ellipsoid.

Wenn der Punkt P eine der Strecken AB, BC, CA halbirt, so ist der Ort speciell ein Rotationsellipsoid.

Es ist ein specieller Fall dieses Problems, wenn der eine Endpunkt der Geraden in einer festen Ebene, der andere in einer festen Geraden sich bewegen muss; die letztere ist der Durchschnitt zweier Ebenen, und die zwischen beiden auf der bewegten Geraden gelegene Strecke ist Null. Der entsprechende Ort ist

ein Rotationsellipsoid, wenn die feste Gerade zur festen Ebene normal ist, und insbesondere eine Kugel, wenn der Punkt P die Gerade halbirt.

B. 19. Von zwei festen Punkten A und O ist der letzte auf einer Kugelfläche gelegen; die Verbindungslinie DA eines beliebigen andern Punktes D der Kugelfläche mit A schneidet die Kugel ferner in dem Punkte D'; man soll den Ort des Punktes P auf DO bestimmen, für welchen $OP = AD'$ ist.

Wir haben $\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OD}^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos AOD$, und in dieser Gleichung ist AD dem Radius vector des Ortes umgekehrt proportional und OD ist durch die Gleichung der Kugel in Function der Winkel bestimmt, welche sie mit festen Axen bildet. Daraus erkennt man den Ort als eine Fläche zweiter Ordnung vom Centrum O.

B. 20. Der Ort eines Punktes P, dessen Verbindungslinie mit einem gegebenen Punkte O in einer festen Ebene oder Kugel einen Punkt Q so bestimmt, dass die Relation $OP \cdot OQ = k^2$ stattfindet (k eine Constante), ist eine Kugelfläche; im Fall der Ebene geht sie durch O. Dies ist die Grundlage für die Methode der Inversion in der Geometrie von drei Dimensionen; im Specialfall Abbildung der Kugel auf die Ebene: Stereographische Projection des Hipparch.

B. 21. Eine Ebene geht stets durch eine feste gerade Linie und ihre jedesmaligen Durchschnittslinien mit zwei festen Ebenen sind mit einem festen Punkte durch Ebenen verbunden; welches ist die durch die Durchschnittslinie der beiden letzteren Ebenen erzeugte Fläche?

B. 22. Die vier Flächen eines Tetraeders gehen jede durch einen festen Punkt; man soll den Ort einer Ecke desselben bestimmen, wenn jede der drei nicht durch sie hindurchgehenden Kanten sich in einer festen Ebene bewegt.

Der Ort ist im Allgemeinen eine Fläche dritter Ordnung, die den Durchschnittspunkt der drei Ebenen zu einem Doppelpunkt hat. Sie reducirt sich auf einen Kegel zweiten Grades, wenn die vier festen Punkte in einer und derselben Ebene liegen.

Wir setzen

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

als die Gleichungen der festen Ebenen voraus, in denen die Seiten der einen Tetraederfläche sich bewegen, und

$(x_0, y_0, z_0), \quad (x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3)$

als die Coordinaten der Punkte, durch welche diese Fläche und die drei andern Flächen hindurchgehen, bezeichnen auch die Resultate der Substitution der letzten drei in die Polynome u, v, w durch u_1, v_2, w_3 resp. Dann ist für

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

als Gleichung der durch (x_0, y_0, z_0) gehenden Ebene die Gleichung der durch den Punkt (x_1, y_1, z_1) gehenden von der Form

$$Ax + By + Cz + D + \lambda u = 0,$$

mit der Bedingung

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda u_1 = 0,$$

also

$$A(ux_1 - u_1 x) + B(uy_1 - u_1 y) + C(uz_1 - u_1 z) + D(u - u_1) = 0;$$

ebenso die beiden andern. Die Elimination von A, B, C, D zwischen den vier so erhaltenen Gleichungen giebt

$$\begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ ux_1 - u_1 x, & uy_1 - u_1 y, & uz_1 - u_1 z, & u - u_1 \\ vx_2 - v_2 x, & vy_2 - v_2 y, & vz_2 - v_2 z, & v - v_2 \\ wx_3 - w_3 x, & wy_3 - w_3 y, & wz_3 - w_3 z, & w - w_3 \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung dritten Grades als die Gleichung des Ortes. Wenn man sie in die Form

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z, & 1 \\ 0, & x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ u_1, & ux_1, & uy_1, & uz_1, & u \\ v_2, & vx_2, & vy_2, & vz_2, & v \\ w_3, & wx_3, & wy_3, & wz_3, & w \end{vmatrix} = 0$$

transformirt und für

$$\begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

in die den Punkt $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ als Doppelpunkt bezeichnende [16])

$$uvw\Delta = u_1 vw(x_0 y z_2 1) + v_2 wu(x_0 y_1 z 1) + w_3 uv(x_0 y_1 z_2 1)$$

entwickelt, wo $(x_0 y z_2 1)$, etc. Determinanten bezeichnen, so erkennt man, dass für jede der festen Ebenen der Durchschnitt mit der Ortsfläche aus geraden Linien besteht, dass er für die Ebene der drei festen Punkte (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ein Kegelschnitt ist, welcher durch die beiden letzten und die Durchschnitte der drei Spuren der festen Ebenen in dieser bestimmt ist; endlich, dass der Ort für die Lage der vier festen Punkte in einer Ebene

$$ax + by + cz + d = 0,$$

in einen Kegel zweiten Grades und diese Ebene zerfällt, weil dann

$$\Delta = 0, \text{ und } \frac{d\Delta}{dx_i} : a = \frac{d\Delta}{dy_i} : b = \frac{d\Delta}{dz_i} : c = \frac{d\Delta}{d\alpha_i} : d = h_i, \ (i = 1, 2, 3, 4$$

und α_1, α_2, α_3, α_4 als Stellvertreter der Einheiten in der letzten Verticalreihe der Δ) also die Gleichung des Ortes

$$\left(h_1 \frac{u_1}{u} + h_2 \frac{v_2}{v} + h_3 \frac{w_3}{w}\right)(ax + by + cz + d) = 0$$

wird. Der Kegel ist der dreiseitigen Ecke der Ebenen

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

umschrieben; ist die dritte derselben der Schnittlinie der beiden ersten parallel, so wird er zum Cylinder.

B. 23. Man soll den Ort der einen Ecke eines Tetraeders bestimmen, wenn die drei in ihr zusammenstossenden Kanten und die gegenüberliegende Fläche je durch einen festen Punkt gehen, und die drei andern Ecken sich in festen Ebenen bewegen.

B. 24. Eine Ebene geht durch einen festen Punkt und ihre Durchschnittspunkte mit drei festen geraden Linien bestimmen mit je einer von drei andern festen geraden Linien drei Ebenen; man soll den Ort des Durchschnittspunktes dieser letzteren untersuchen.

B. 25. Die Seiten eines windschiefen Polygons gehen durch feste Punkte und seine Ecken bewegen sich alle bis auf eine in festen Ebenen; man soll die Ortscurve der letzten Ecke bestimmen.

B. 26. Die Seiten eines windschiefen Polygons gehen, eine einzige ausgenommen, durch feste Punkte, die Endpunkte dieser letzten Seite bewegen sich in festen geraden Linien, alle andern Ecken des Polygons

aber in festen Ebenen; man soll die durch die freie Seite erzeugte Fläche untersuchen.

B. 27. Die Ecken eines Dreiecks bewegen sich auf einer Fläche zweiten Grades, während zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen; die Enveloppe seiner freien Seite ist eine Fläche zweiten Grades, welche die gegebene doppelt berührt, wo die Verbindungslinie der beiden festen Punkte sie schneidet. Wenn die erste der beiden Flächen eine Kugel ist, so sind die Berührungspunkte die Kreispunkte der zweiten. (Vergl. „Kegelschn." V, Art. 307, 2.)

B. 28. Die Bedingung, unter welcher in einer Regelschaar des Hyperboloids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ drei zu einander rechtwinklige Mantellinien vorkommen, ist $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0$. Solche Hyperboloide heissen gleichseitige.[15]) Drei solche Mantellinien und ihre Parallelen aus der andern Regelschaar bilden eine Kantenkette eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Ecken zugleich die Schnittpunkte von Tripeln rechtwinkliger Tangentialebenen sind. Nach Art. 95 ist das Radiusquadrat der Kugel, in welcher sie liegen, gleich

$$a^2+b^2-c^2.$$

VIII. Kapitel.

Von der Projectivität oder den Collineationen und Reciprocitäten.

125. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften hat eine nicht minder hohe Bedeutung in der Geometrie von drei Dimensionen wie in der Geometrie der Ebene. Wir entwickeln auch hier zuerst die Theorie der linearen Verwandtschaften, erläutern ihre Beziehungen zu den schon bisher über die Flächen zweiten Grades erlangten Ergebnissen und bereiten damit tiefere Einsichten vor. (Vergl. „Kegelschn.", den Schluss des fünften Kap. Art. 89—100 für die Collineationen und den Anfang des fünfundzwanzigsten Kap. Art 396 für die Reciprocitäten.)

Zwei dreidimensionale räumliche Systeme heissen linear verwandt oder projectivisch, wenn jedem Elemente des einen Systems ausnahmslos ein Element des andern entspricht und wenn zugleich incidenten Elementen des einen wieder incidente Elemente des andern entsprechen; wir wissen, dass dann die entsprechenden Elementargebilde erster Stufe der beiden Systeme projectivisch sind und können analog wie im Beisp. 5 des Art. 53 von ihrer Projectivität zu der der vollständigen räumlichen Systeme fortschreiten.

Wenn jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des andern und jeder Ebene eine Ebene entspricht, so wird die Projectivität der räumlichen Systeme als Collineation bezeichnet; wenn jedem Punkte des einen eine Ebene im andern Systeme entspricht, so nennt man die Verwandtschaft Reciprocität. In beiden Fällen entspricht einer geraden Linie wieder eine gerade Linie, aber im ersteren Falle sind zwei entsprechende Gerade für beide Systeme gleichzeitig als die Reihen ihrer Punkte oder

als die Büschel der durch sie gehenden Ebenen aufzufassen; im zweiten entspricht immer einer Geraden als Punktreihe eine Gerade als Ebenenbüschel und umgekehrt. (Vergl. das Dualitätsprincip Art. 50, 52, 57 oben.)

Insbesondere ist ergänzend zu dem in den „Kegelschn." a. d. angef. Stellen Entwickelten auf die räumlichen Elementargebilde von zwei Dimensionen einzugehen (Art. 131, 141 unten); denn neben den Ebenen mit ihren zweifach unendlich vielen reellen Punkten resp. Geraden sind die Punkte des Raumes mit den durch sie gehenden zweifach unendlich vielen Ebenen und Geraden zu betrachten, die Bündel von Ebenen und Strahlen. (Art. 35.)

Und wir haben für ein- und zweidimensionale Systeme sogar schon ein Beispiel weiterführender Art in der eindeutigen Beziehung der linearen Complexe von Systemen erster und zweiter Stufe oder mit einem Parameter und mit zwei Parametern auf die Punkte einer Ebene kennen gelernt im B. des Art. 58 unter 8; denn man erkennt damit die Herstellbarkeit projectivischer Beziehungen solcher Systeme linearer Complexe zu einander durch Vermittelung einer Ebene oder von zwei projectivischen Ebenen. (Vergl. Art. 140.)

126. Wenn die Punkte resp. Ebenen des einen Systems durch ihre projectivischen Coordinaten x_i resp. ξ_i auf eine fundamentale Gruppe $A_1, \ldots A_4, E, \mathsf{E}$ (Art. 52) bezogen sind (ungestrichenes System), während die Elemente des andern durch ebensolche Coordinaten x_i' resp. ξ_i' auf eine von der vorigen verschiedene, oder mit ihr zusammenfallende fundamentale Gruppe $A_1^{*\prime}, \ldots, \mathsf{E}^{*\prime}$ bezogen werden (gestrichenes System), so ist

$$\frac{x_i'}{x_1'} = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4}.$$

oder die lineare Substitution

(1) $$\mu x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4$$

der Ausdruck einer solchen Abhängigkeit oder Verwandtschaft. Denn darnach entspricht zunächst jedem Punkte x_i des ungestrichenen Raumes ein Punkt x_i' des gestrichenen; und wenn wir die Determinante D aus den Coefficienten a_{ik} oder der linearen Substitution als nicht gleich Null voraussetzen, und ihre ersten Minoren oder das System ihrer adjungirten Elemente A_{ik} nennen —

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & A_{14} \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & A_{24} \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & A_{34} \\ A_{41}, & A_{42}, & A_{43}, & A_{44} \end{matrix}$$

— so ergiebt sich durch Auflösung der linearen Gleichungen (1) nach den x_i' die Gruppe

$$(1^*) \qquad \frac{D}{\mu} x_i = A_{1i} x_1' + A_{2i} x_2' + A_{3i} x_3' + A_{4i} x_4'$$

und damit die Sicherheit, dass auch jedem Punkte x_i' des gestrichenen Raumes immer ein Punkt des ungestrichenen entspricht.

Nach den Gleichungen (1) entspricht der Ebene ξ_k' oder

$$\xi_1' x_1' + \xi_2' x_2' + \xi_3' x_3' + \xi_4' x_4' = 0$$

des ungestrichenen Raumes das durch

$$\xi_1'(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) + \xi_2'(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)$$
$$+ \xi_3'(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4) + \xi_4'(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4) = 0$$

oder mit Anordnung nach den x_i durch

$$(a_{11}\xi_1' + a_{21}\xi_2' + a_{31}\xi_3' + a_{41}\xi_4')x_1 + (a_{12}\xi_1' + a_{22}\xi_2' + a_{32}\xi_3' + a_{42}\xi_4')x_2$$
$$+ (a_{13}\xi_1' + a_{23}\xi_2' + a_{33}\xi_3' + a_{43}\xi_4')x_3 + (a_{14}\xi_1' + a_{24}\xi_2' + a_{34}\xi_3' + a_{44}\xi_4')x_4 = 0$$

dargestellte Gebilde, d. h. wieder eine Ebene. Und man sieht hierbei, dass die Abhängigkeit linear sein *muss* wie (1), damit ohne Ausnahme dem Punktsystem einer Ebene des einen Raumes das Punktsystem einer Ebene des andern Raumes entsprechen kann. Man hat aus der erhaltenen *bilinearen Gleichung*, die in beiden Formen die Collineation auch ausdrückt und bestimmt, zugleich für die *zugehörige Transformation der Ebenencoordinaten* ξ_k die Relationen mit den nach Verticalreihen geordneten Coefficienten

$$(2) \qquad \varrho \xi_k = a_{1k}\xi_1' + a_{2k}\xi_2' + a_{3k}\xi_3' + a_{4k}\xi_4'$$

und durch ihre Auflösung für die ξ_k'

$$(2^*) \qquad \frac{D}{\varrho} \xi_k' = A_{k1}\xi_1 + A_{k2}\xi_2 + A_{k3}\xi_3 + A_{k4}\xi_4,$$

die bei nicht verschwindender Determinante der Substitution auch das Entsprechen der Ebenen beider Räume ausnahmslos eindeutig macht. Man darf also sagen, dass der Uebergang zu einem collinearen System einer allgemeinen linearen Substitution für die x_i' und der *transponirten* Substitution für die ξ_k entspricht.

Im andern Falle kann die Collineation als mit singulären Elementen bezeichnet werden; und zwar a) mit singulärem Punkt S und singulärer Ebene Σ', wo dem ersten alle Punkte des gestrichenen Raumes und der zweiten alle Ebenen des ungestrichenen entsprechen, während jedem andern Punkte des ungestrichenen Raumes und allen mit ihm in derselben Geraden aus S liegenden Punkten ein Punkt von Σ' und allen andern Ebenen des gestrichenen Raumes und den mit ihr durch dieselbe Gerade in Σ' gehenden Ebenen eine Ebene durch S entspricht.

b) Collineation mit zwei singulären Geraden s, s' — wo jedem Punkte im ungestrichenen Raume und allen Punkten der von ihm nach s gehenden Ebene ein Punkt von s' entspricht und der entsprechende eines Punktes von s unbestimmt ist; während allen Ebenen des gestrichenen Raumes durch einen Punkt von s' eine Ebene durch s im ungestrichenen Raume entspricht und für die Ebenen durch s' die entsprechenden unbestimmt sind.[17])

Die geometrische Bedeutung der Coefficienten a_{ik} der Substitution ergiebt sich aus der Theorie der Coordinaten leicht, sodass wir die Collineation zu einer gegebenen linearen Substitution ebenso einfach geometrisch darstellen können, wenn die Coordinatensysteme in beiden Räumen bekannt sind, wie wir auch zu einer geometrisch gegebenen Collineation nach Festsetzung der Coordinatenbestimmung die analytische Ausdrucksform oder die sie repräsentirende lineare Substitution ermitteln können.

Bezeichnen wir nämlich im Raume der x_i, ξ_i die Fundamentalelemente durch $A_1, \ldots, A_4$, E und E, im Raume der x_i', ξ_i' dagegen durch $A_1{}^{*\prime}, \ldots, A_4{}^{*\prime}$, $E^{*\prime}$ und $\mathsf{E}^{*\prime}$, sodass jenen Elementen in diesem Raume die A_i', E', E' und diesen in jenem die Elemente A_i^*, E^* und E^* entsprechen, so liefern die allgemeinen Substitutionen für den Punkt A_k' und die Ebene A_i^* die Beziehungen

$$\frac{\mu e_k}{h_k} x_i' = a_{ik}, \quad \frac{\varrho \varepsilon_i'}{h_i'} \xi_k = a_{ik},$$

wenn wir mit h_k, h_i' die von den Ecken A_k, $A_i^{*\prime}$ ausgehenden Höhen der beiden Fundamentaltetraeder bezeichnen; und somit zu unmittelbarer Verbindung mit der geometrischen Construction

$$x_i' : x_j' = a_{ik} : a_{jk}, \quad \xi_k : \xi_l = a_{ik} : a_{il}.$$

Die Coefficienten der linearen Substitution, welche die Collineation zweier Räume ausdrückt, sind also, insofern sie zur selben Zeile gehören, d. h. einerlei ersten Index haben, den durch die zweiten Indices bezeichneten Coordinaten derjenigen Ebene des ersten Systems gleich oder proportional, welche der durch den gemeinsamen Index bezeichneten Fundamentalebene des zweiten Systems entspricht; sie sind dagegen, sofern sie zur gleichen Reihe gehören, d. h. einerlei zweiten Index haben, den durch die ersten Indices bezeichneten Coordinaten desjenigen Punktes gleich oder proportional, welcher dem durch den gemeinsamen Index bezeichneten Fundamentalpunkte des ersten Systems entspricht.

Man hat überdies für den Punkt E' und für die Ebene E^* resp. die Relationen

$$\mu x_i' = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4}, \qquad \varrho \xi_k = a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} + a_{4k},$$

d. h. seine und ihre Coordinaten sind die Summen der Coefficienten nach den gleichnamigen Zeilen resp. Reihen.

Man sieht, dass und wie fünf Punkte oder Ebenen des einen und die entsprechenden des andern Raumes die Collineation beider Räume bestimmen, wenn sie von allgemeiner Lage sind, wenn also keine vier der Punkte in einer Ebene liegen und keine vier der Ebenen durch einen Punkt gehen.

Man erkennt auch, dass die allgemeinen Gleichungen der Collineation vereinfacht werden können, indem man Fundamentalelementen des ungestrichenen Raumes solche des gestrichenen Raumes entsprechen lässt, was in verschiedenen Arten möglich ist.

Will man beide Systeme auf dieselbe Gruppe von Fundamentalelementen beziehen, so wird man sich zunächst (vergl. Art. 129) der allgemeinen Gleichungen (1), (2) etc. bedienen müssen.

B. 1. Für Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten mit A_1 als Anfangspunkt, also $x_1 = 1$ und etwa $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$ und den Verhältnissen von ξ_2, ξ_3, ξ_4 zu ξ_1 als ξ, η, ζ sind die allgemeinen Gleichungen der Collineation

$$1)\quad x' = \frac{a_{21} + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z}{a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z}, \quad y' = \frac{a_{31} + a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z}{a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z},$$

$$z' = \frac{a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z}{a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z};$$

die Coordinaten der Punkte im gestrichenen Raume erscheinen als gleichbenannte Brüche aus linearen Functionen der Coordinaten der entsprechenden Punkte im ungestrichenen Raume. Der Ebene von der Gleichung

$$a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z + a_{11} = 0$$

entspricht die unendlich ferne Ebene des gestrichenen Raumes; man nennt sie die Gegenebene im ungestrichenen Raume und wir bezeichnen sie durch R.

Aus den (1*), also

$$x = \frac{A_{12} + A_{22}x' + A_{32}y' + A_{42}z'}{A_{11} + A_{21}x' + A_{31}y' + A_{41}z'}, \text{ etc.}$$

erkennt man ebenso die Gegenebene des gestrichenen Raumes Q′, die der unendlich fernen im ungestrichenen Raume entspricht, in

$$A_{21}x' + A_{31}y' + A_{41}z' + A_{11} = 0.$$

Ebenso folgen die Gleichungen

$$2)\quad \xi = \frac{a_{12} + a_{22}\xi' + a_{32}\eta' + a_{42}\zeta'}{a_{11} + a_{21}\xi' + a_{31}\eta' + a_{41}\zeta'},\quad \eta = \frac{a_{13} + a_{33}\xi' + \cdot\cdot}{a_{11} + a_{21}\xi' + \cdot\cdot},$$

$$\zeta = \frac{a_{14} + a_{24}\xi' + \cdot\cdot}{a_{11} + a_{21}\xi' + \cdot\cdot},$$

wo die drei Punkte, deren Gleichungen durch Nullsetzen der Zähler rechts erhalten werden, zur Ebene Q′ gehören; etc.

B. 2. Wenn die gleichnamigen Fundamentalpunkte A_i des gestrichenen und des ungestrichenen Raumes einander entsprechen, so haben nach der geometrischen Bedeutung der a_{ik} alle Substitutionscoefficienten mit ungleichen Indices den Werth Null und die Collineation wird durch

$$\mu x_i' = a_{ii}x_i,\quad \varrho\xi_k = a_{kk}\xi_k'$$

mit ihren unmittelbaren Auflösungen ausgedrückt; entsprechen einander auch die Einheitpunkte und folglich die Einheitebenen, so werden die a_{ii} gleich Eins und es findet Coordinatengleichheit statt für die entsprechenden Elemente der Collineation durch dreimalige Wiederholung der Construction projectivischer Elementargebilde erster Stufe, was als identisch mit ihrer Construction aus den Coordinatenzahlen erkannt wird.

Sind die Coordinaten Cartesisch-Plücker'sche von Anfangspunkten A_1, A_1' resp. wie im Texte, so entspricht die unendlich ferne Ebene als A_1, A_1' sich selbst und man hat die Gleichungen der Affinität mit entsprechenden gleichnamigen Coordinatenaxen

$$a_{11}x' = a_{22}x,\ a_{11}y' = a_{33}y,\ a_{11}z' = a_{44}z;\ \ a_{11}\xi = a_{22}\xi',\ \text{etc.}$$

d. h. Proportionalität nach bestimmten Verhältnissen zwischen den gleichnamigen Coordinaten entsprechender Elemente, die Verwandtschaft der Affinität, wie sie Euler zuerst bestimmte.[18]) Speciell mit zusammenfallenden Coordinatenaxen bei Wahl eines neuen Einheitspunktes von den Coordinaten a_{22}, a_{33}, a_{44} Gleichheit der entsprechenden Coordinaten.

B. 3. Der Geraden zwischen den Punkten y_i, z_i oder von den Coordinaten p_{ik} (Art. 55) entspricht in der Collineation

$$\mu x_i' = a_i x_1 + \cdots$$

die Gerade aus

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4, & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4, \\ & a_{31}y_1 + \cdots,\ a_{41}y_1 + \cdots \\ a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + a_{14}z_4, & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3 + a_{24}z_4, \\ & a_{31}z_1 + \cdots,\ a_{41}z_1 + \cdots \end{matrix}\right\|$$

oder von den Coordinaten p_{ik}' (mit Weglassung des μ^2 links)

$$p_{12}' = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})p_{12} + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})p_{13} + (a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11})p_{31}$$
$$+ (a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14})p_{14} + (a_{12}a_{24} - a_{22}a_{14})p_{24} + (a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14})p_{34};$$
$$p_{23}' = (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})p_{12} + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})p_{23} + (a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21})p_{31}$$
$$+ (a_{21}a_{34} - a_{31}a_{24})p_{14} + (a_{22}a_{34} - a_{32}a_{24})p_{24} + (a_{23}a_{34} - a_{33}a_{24})p_{34},$$

allgemein mit der Abkürzung

$$a_{ri}a_{sk} - a_{si}a_{rk} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_{ri}, & a_{si} \\ a_{rk}, & a_{sk} \end{vmatrix} \equiv a_{rs,ik} \qquad {}^{19})$$

$$p_{ik}' = a_{12,ik}p_{12} + a_{23,ik}p_{23} + \cdots = \Sigma a_{rs,ik}p_{rs}.$$

Die geometrische Bedeutung ihrer Coefficienten folgt aus dem Vorigen und aus Art. 56 B.

B. 4. Beim Gebrauch der Ausdrucksform des Art. 50 mit Parametern λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 etc. wird die Projectivität zwischen den linearen Gebilden dritter Stufe

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 = 0,\ \ \lambda_1' U_1^{*\prime} + \cdots = 0$$

durch Relationen

$$\varrho\lambda_i' = a_{1i}\lambda_1 + a_{2i}\lambda_2 + a_{3i}\lambda_3 + a_{4i}\lambda_4$$

ausgedrückt, welche sich für das Entsprechen der $U_i = 0$ mit den $U_i^{*\prime} = 0$ in analoger Weise vereinfachen lassen, wie in B. 2.

127. Durch ganz analoge Betrachtungen erkennt man, dass das projectivische Entsprechen zwischen den Punkten x_i eines räumlichen Systems und den Ebenen ξ_i' eines andern räumlichen Systems die Relationen

$$(1) \qquad m\xi_i' = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + \alpha_{i4}x_4,$$

$$(2) \qquad r\xi_k = \alpha_{1k}x_1' + \alpha_{2k}x_2' + \alpha_{3k}x_3' + \alpha_{4k}x_4'$$

fordert, deren letzte aus den ersten durch Verbindung mit der Incidenzbedingung für die Elemente ξ' und x', nämlich durch Einsetzen der Werthe von ξ_i' aus den (1) in diese, also in

$$\xi_1'x_1' + \xi_2'x_2' + \cdots = 0,$$

in der bilinearen Form

$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdot\cdot)x_1' + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdot\cdot)x_2' + (\alpha_{31}x_1 + \cdots)x_3' + (\alpha_{41}x_1 + \cdots)x_4' = 0,$$

durch Ordnung derselben nach den x_i und Vergleich also von

$$(\alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2' + \cdot\cdot)x_1 + (\alpha_{12}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \cdot\cdot)x_2 + (\alpha_{13}x_1' + \alpha_{23}x_2' \cdot\cdot)x_3 + (\alpha_{14}x_1' + \cdots)x_4 = 0$$

mit der Incidenzbedingung der entsprechenden Elemente x, ξ erhalten wird.

Die Reciprocität von zwei räumlichen Systemen wird ebenfalls durch eine allgemeine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante Δ und deren transponirte Substitution analytisch ausgedrückt; mit nicht verschwindender Determinante, damit die Gleichungen (1) die x_i zu einer Gruppe der ξ' und die (2) die x_k' zu einer Gruppe der ξ stets bestimmen wegen

$$(1^*) \qquad \frac{\Delta}{m}x_i = \mathsf{A}_{1i}\xi_1' + \mathsf{A}_{2i}\xi_2' + \mathsf{A}_{3i}\xi_3' + \mathsf{A}_{4i}\xi_4',$$

$$(2^*) \qquad \frac{\Delta}{r}x_k' = \mathsf{A}_{k1}\xi_1 + \mathsf{A}_{k2}\xi_2 + \mathsf{A}_{k3}\xi_3 + \mathsf{A}_{k4}\xi_4,$$

für Δ als die Determinante der Substitutionscoefficienten α_{ik} und A_{ik} als ihre zugehörigen ersten Minoren oder die entsprechenden Elemente ihres adjungirten Systems. Auch die Reciprocität kann andernfalls singulär sein. (Vergl. Art. 131, B. 5 f.) Man schliesst, dass zwei Raumsysteme zu einander collinear sind, wenn sie zu demselben dritten Systeme reciprok sind.

Zur geometrischen Deutung der Substitutions-Coefficienten erhält man ganz analog wie bei der Collineation für die Ebenen A_k', A_i^*

$$\xi_i' : \xi_j' = \alpha_{ik} : \alpha_{ij} \quad \text{und} \quad \xi_k : \xi_l = \alpha_{ik} : \alpha_{il},$$

die man wie im vorigen Art. leicht in Regeln formulirt; und speciell für die Ebenen E' und E^*

$$m\xi_i' = \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} + \alpha_{i4}, \quad r\xi_k = \alpha_{1k} + \alpha_{2k} + \alpha_{3k} + \alpha_{4k}.$$

Fünf Punkte von unabhängiger Lage (Art. 126) in dem einen und die fünf entsprechenden Ebenen im andern räumlichen System bestimmen also ihre Reciprocität.

Man vereinfacht ihre Gleichungen, indem man Fundamentalpunkte des einen Raumes zu Fundamentalebenen des andern entsprechend wählt. Will man beide auf dieselbe Gruppe von Fundamentalelementen beziehen, so wird man sich zunächst der allgemeinen Gleichungen bedienen müssen. (Vergl. jedoch Art. 130.)

B. 1. Für Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten mit A_1 als Anfangspunkt sind die allgemeinen Gleichungen (1) der Reciprocität

$$\xi' = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22}x + \alpha_{23}y + \alpha_{24}z}{\alpha_{11} + \alpha_{12}x + \alpha_{13}y + \alpha_{14}z}, \quad \eta' = \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32}x + \alpha_{33}y + \alpha_{34}z}{\alpha_{11} + \alpha_{12}x + \alpha_{13}y + \alpha_{14}z},$$

$$\zeta' = \frac{\alpha_{41} + \alpha_{42}x + \alpha_{43}y + \alpha_{44}z}{\alpha_{11} + \alpha_{12}x + \alpha_{13}y + \alpha_{14}z}; \text{ etc.}$$

Man deute geometrisch das gleichzeitige Verschwinden der drei Zähler in diesen Gleichungen und in den den (2) entsprechenden als Bestimmung der der unendlich fernen Ebene entsprechenden Punkte, die man als die beiden Mittelpunkte derselben bezeichnen kann.

B. 2. Wenn den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 die Ebenen $\mathsf{A}_1^{*\prime}$, $\mathsf{A}_2^{*\prime}$, $\mathsf{A}_3^{*\prime}$, $\mathsf{A}_4^{*\prime}$ respective entsprechen, so werden die Gleichungen der Reciprocität (vergl. Art. 126, 2)

$$m\xi_i' = \alpha_{ii}x_i, \quad r\xi_k = \alpha_{kk}x_k'$$

mit ihren Auflösungen; wenn auch dem Einheitpunkt dort die Einheitebene hier entspricht, so sind entsprechende Elemente einfach durch die Gleichheit ihrer Coordinatenverhältnisse verbunden — daher projectivische Coordinaten.

Man deute geometrisch den Uebergang zu Cartesisch-Plücker-schen Coordinaten bei den reducirten (1).

B. 3. Entsprechen den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 die Ebenen $\mathsf{A}_3^{*\prime}$, $\mathsf{A}_4^{*\prime}$, $\mathsf{A}_1^{*\prime}$, $\mathsf{A}_2^{*\prime}$ resp., so werden die Gleichungen (1) und (2) des Textes resp. zu

$$m\xi_1' = \alpha_{13}x_3, \quad m\xi_2' = \alpha_{24}x_4, \quad m\xi_3' = \alpha_{31}x_1, \quad m\xi_4' = \alpha_{42}x_2;$$
$$r\xi_1 = \alpha_{31}x_3', \quad r\xi_2 = \alpha_{42}x_4', \quad r\xi_3 = \alpha_{13}x_1', \quad r\xi_4 = \alpha_{24}x_2'.$$

B. 4. Man bilde die Coordinatentafel der Geraden, welche der Verbindungsgeraden zweier Punkte von den Coordinaten y_i, z_i im ungestrichenen Raume als Schnittlinie ihrer entsprechenden Ebenen im gestrichenen entspricht.

128. Wenn die Collineation zur Congruenz wird und die entsprechenden Elemente sich decken, so liefern die Gleichungen der Collineation die Theorie der Transformation der Coordinaten in allgemeinsten Formen wie in der Ebene („Kegelschn." Art. 91). Wir wollen sie für die Punktcoordinaten x_i entwickeln.[19])

Die alten Coordinaten x_i und die neuen x_i' bestimmen die Lage desselben Punktes in Bezug auf verschiedene fundamentale Gruppen; die ersten in Bezug auf A_1, A_2, A_3, A_4 und E, die zweiten in Bezug auf $A_1^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}$, $A_4^{*\prime}$ und $E^{*\prime}$, welche beide Gruppen mit ihren entsprechenden A_1', A_2', A_3', A_4', E' und A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*, E^* zusammenfallen. Der Uebergang von den einen zu den andern wird durch eine lineare Substitution mit den Coefficienten, schreiben wir β_{ik}, von der Determinante Δ und mit B_{ik} als ersten Minoren oder als den entsprechenden Elementen des adjungirten Systems vermittelt, so dass man hat

$$mx_i = \beta_{i1}x_1' + \beta_{i2}x_2' + \beta_{i3}x_3' + \beta_{i4}x_4',$$
$$\frac{\Delta}{\mu}x_i' = \mathsf{B}_{1i}x_1 + \mathsf{B}_{2i}x_2 + \mathsf{B}_{3i}x_3 + \mathsf{B}_{4i}x_4.$$

Die ungestrichenen Coordinaten der Fundamentalpunkte des gestrichenen Systems sind dann aus folgender Tafel ersichtlich, wo die h_i' die von den Ecken A_i' ausgehenden Höhen des Fundamentaltetraeders im gestrichenen System sind.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$A_1^{*\prime}$	β_{11}	β_{21}	β_{31}	β_{41}	$\times \frac{h_1'}{\mu e_1'}$
$A_2^{*\prime}$	β_{12}	β_{22}	β_{32}	β_{42}	$\times \frac{h_2'}{\mu e_2'}$
$A_3^{*\prime}$	β_{13}	β_{23}	β_{33}	β_{43}	$\times \frac{h_3'}{\mu e_3'}$
$A_4^{*\prime}$	β_{14}	β_{24}	β_{34}	β_{44}	$\times \frac{h_4'}{\mu e_4'}$
$E^{*\prime}$	$\Sigma\beta_{1k}$	$\Sigma\beta_{2k}$	$\Sigma\beta_{3k}$	$\Sigma\beta_{4k}$	

d. h. die Substitutionscoefficienten β_{ik} sind die ungestrichenen Coordinaten vom Index i für den Fundamentalpunkt mit dem Index k im gestrichenen Raume; ihre Summe für k als zweiten Index über $k = 1, 2, 3, 4$ ist die Coordinate vom Index i für den Einheitpunkt $E^{*\prime}$.

Wenn somit die vier neuen Fundamentalpunkte durch ihre Coordinaten im alten System $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, x_i^{(4)}$ und ebenso der neue Einheitpunkt durch seine Coordinaten $x_i^{(\varepsilon)}$ in diesem gegeben sind, so gelten für die Bestimmung der linearen Substitution, welche dieser Coordinatentransformation äquivalent ist, die vier mit zwölf Gleichungen äquivalenten Relationengruppen

$$\beta_{11} : \beta_{21} : \beta_{31} : \beta_{41} = x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)},$$
$$\beta_{12} : \beta_{22} : \beta_{33} : \beta_{42} = x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)} : x_4^{(2)}, \text{ etc.}$$

und die vier weiteren

$$\mu x_i^{(\varepsilon)} = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \beta_{i3} + \beta_{i4}.$$

Die ersten gestatten, die Coefficienten β_{ik} mit den ersten Indices 2, 3, 4 durch die Coefficienten mit dem ersten Index 1 und die Coordinaten der vier neuen Fundamentalpunkte auszudrücken, während man dann aus den zweiten die vier Coefficienten β_{11}, β_{12}, β_{13}, β_{14} direct und aus ihnen die übrigen erhält. Wenn wir die Determinante links

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & x_1^{(3)}, & x_1^{(4)} \\ x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & x_2^{(3)}, & x_2^{(4)} \\ x_3^{(1)}, & x_3^{(2)}, & x_3^{(3)}, & x_3^{(4)} \\ x_4^{(1)}, & x_4^{(2)}, & x_4^{(3)}, & x_4^{(4)} \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{|cccc} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} & X_1^{(4)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} & X_2^{(4)} \\ X_3^{(1)} & . & . & . \\ X_4^{(1)} & . & . & . \end{array}$$

aus den alten Coordinaten der neuen Fundamentalpunkte durch X und ihre adjungirten Elemente durch $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \ldots$ bezeichnen, wie im Schema rechts, so finden wir zu bequemer Berechnung in jedem bestimmten Falle

$$X \cdot \beta_{hi} = \mu x_h^{(i)} \{ x_1^{(\varepsilon)} X_1^{(i)} + x_2^{(\varepsilon)} X_2^{(i)} + x_3^{(\varepsilon)} X_3^{(i)} + x_4^{(\varepsilon)} X_4^{(i)} \}.$$

Sind die alten Coordinaten Cartesische, so hat man speciell

$$x_1^{(n)} = 1, \quad x_2^{(n)} = x^{(n)}, \quad x_3^{(n)} = y^{(n)}, \quad x_4^{(n)} = z^{(n)};$$
$$x_1^{(\varepsilon)} = 1, \quad x_2^{(\varepsilon)} = x^{(\varepsilon)}, \quad x_3^{(\varepsilon)} = y^{(\varepsilon)}, \quad x_4^{(\varepsilon)} = z^{(\varepsilon)}.$$

Die Transformation der allgemeinen Strahlencoordinaten ergiebt sich leicht aus dem Vorigen. Ersetzt man in der Coordinaten-

tafel der p_{ik} die y_i, z_i durch die

$$\beta_{i1}y_1' + \beta_{i2}y_2' + \beta_{i3}y_3' + \beta_{i4}y_4', \quad \beta_{i1}z_1' + \beta_{i2}z_2' + \beta_{i3}z_3' + \beta_{i4}z_4'$$

respective, so erhält man mit $p_{ik}' = y_i'z_k' - y_k'z_i'$ z. B. p_{12} proportional zu

$$p_{12}'(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}) + p_{23}'(\beta_{12}\beta_{23} - \beta_{22}\beta_{13}) + p_{31}'(\beta_{13}\beta_{21} - \beta_{23}\beta_{11})$$
$$+ p_{14}'(\beta_{11}\beta_{24} - \beta_{21}\beta_{14}) + p_{24}'(\beta_{12}\beta_{24} - \beta_{22}\beta_{14}) + p_{34}'(\beta_{13}\beta_{24} - \beta_{23}\beta_{14}),$$

wo die Coefficienten der Reihe nach proportional sind den alten Coordinaten p_{12} der Kanten $A_1^{*\prime}A_2^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}A_3^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}A_1^{*\prime}$, $A_1^{*\prime}A_4^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}A_4^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}A_4^{*\prime}$ des neuen Fundamentaltetraeders. Und allgemein p_{ik} proportional zur Summe der Producte von p_{12}' mal p_{ik} von $A_1^{*\prime}A_2^{*\prime}$, von p_{23}' mal p_{ik} von $A_2^{*\prime}A_3^{*\prime}$, etc. bis p_{34}' mal p_{ik} von $A_3^{*\prime}A_4^{*\prime}$. Die Aenderungen für die transponirte Substitution sind leicht zu erkennen.

B. 1. Die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x, y, z sind in projectivische Coordinaten zu transformiren, für welche die Ecken des Fundamentaltetraeders sind $(2, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(6, -1, 0)$ und $(0, 0, 2)$, während der Einheitpunkt der Punkt $(2, 1, 1)$ ist.

Die Determinante X hat in diesem Falle den Werth -36 und ihr adjungirtes System ist

$$\begin{vmatrix} -60, & 4, & 20, & 0 \\ 12, & -2, & -10, & 0 \\ 12, & -8, & -4, & 0 \\ 30, & 2, & -4, & -18 \end{vmatrix}.$$

Man erhält daher die Substitutionscoefficienten

$$\beta_{22}, \beta_{24}, \beta_{31}, \beta_{34}, \beta_{41}, \beta_{42}, \beta_{43}$$

sämmtlich gleich Null und die übrigen in Vielfachen von μ, aus welchen sich folgende bezügliche lineare Substitutionen ergeben

$$x = \frac{18(x_1 + 2x_3)}{9x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4}, \quad y = \frac{35x_2 - 6x_3}{9x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4},$$
$$z = \frac{18x_4}{9x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4}.$$

Man bildet leicht aus den Coordinaten der Kanten des neuen Fundamentaltetraeders die Transformationsformeln der p_{ik}.

B. 2. Das orthogonale Hyperboloid der B. 2 und 3 des Art. 124 und das hyperbolische Paraboloid des B. 1

ebenda bieten Anlass, die allgemeine Coordinatentransformation mit Vortheil anzuwenden.

Man behalte die Fusspunkte der kürzesten Distanz als A_1, A_2 und nehme die Richtungen der Geraden $z=c$, $y=mx$ und $z=-c$, $y=-mx$ zu den Ecken A_4, A_3 des Fundamentaltetraeders (man gebraucht also Keilcoordinaten Art. 53), indess man den Einheitpunkt beibehält, so dass seine Coordinaten gleich Eins sind.

Aus der Coordinatentafel und ihrem adjungirten System

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & \infty, & \infty \\ 0, & 0, & -m\infty, & m\infty \\ c, & -c, & -c, & c \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -2cm\infty^2, & -2cm\infty^2, & 0, & 0 \\ 2cm\infty, & 2cm\infty, & -2cm\infty, & -2cm\infty \\ 2c\infty, & -2c\infty, & 2c\infty, & -2c\infty \\ -2m\infty^2, & 2m\infty^2, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

folgen dann die Coefficienten der Substitution

$$\beta_{13}=0,\ \beta_{14}=0,\ \beta_{21}=0,\ \beta_{22}=0,\ \beta_{31}=0,\ \beta_{32}=0,\ \beta_{43}=0,\ \beta_{44}=0;$$

$$2c\beta_{11}=\mu(1+c),\ 2c\beta_{12}=-\mu(1-c),\ 2m\beta_{23}=-\mu(1-m),$$

$$2m\beta_{24}=\mu(1+m);$$

$$2\beta_{23}=\mu(1-m),\ 2\beta_{34}=\mu(1+m),\ 2\beta_{41}=\mu(1+c),\ 2\beta_{42}=\mu(1-c).$$

Dadurch ergiebt sich die Substitution selbst

$$x=\frac{c}{m}\,\frac{(1+m)x_4-(1-m)x_3}{(1+c)x_1-(1-c)x_2},\quad y=c\,\frac{(1+m)x_4+(1-m)x_3}{(1+c)x_1-(1-c)x_2},$$

$$z=c\,\frac{(1+c)x_1+(1-c)x_2}{(1+c)x_1-(1-c)x_2}.$$

Die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids a. a. O. geht dadurch über in

$$(1+m^2)\{(1+c)^2x_1{}^2-(1-c)^2x_2{}^2\}+(1+m)^2x_4{}^2-(1-m)^2x_3{}^2=0;$$

die Gleichung des einfachen Hyperboloids wird

$$(1+m^2)\{(1+c)^2x_1{}^2-(1-c)^2\lambda^2x_2{}^2\}$$
$$+\{(1+m)^2x_4{}^2-(1-m)^2\lambda^2x_3{}^2\}=0;$$

und aus ihr geht für $\lambda = 1$ jene wieder hervor. Den übrigen Werthen von λ entsprechend giebt es unendlich viele Hyperboloide. Die Form der Gleichung lehrt, dass das Fundamentaltetraeder zu allen Flächen des Systems in der Beziehung steht, dass jede seiner Ecken die gegenüberliegende Fläche zur Polarebene für die Flächen hat und dass folglich seine Gegenkanten drei Paare von Polargeraden bilden. (Art. 78, 1.)

Durch Zusammenfassung der Glieder mit λ erhält die Gleichung die Form

$$(1+c)^2(1+m^2)x_1^2+(1+m)^2x_4^2$$
$$-\lambda^2\{(1-c)^2(1+m^2)x_2^2+(1-m)^2x_3^2\}=0$$

und man erkennt, dass alle Flächen des Systems durch die Schnittlinien der beiden Paare von imaginären Ebenen aus den Kanten A_2A_3, A_1A_4 — den gegebenen Geraden — gehen, deren Gleichungen sind

$$(1+c)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}x_1 \pm i(1+m)x_4=0,$$
$$(1-c)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}x_2 \pm i(1-m)x_3=0;$$

die gemeinsame Durchdringung aller Flächen des Systems ist also ein imaginäres windschiefes Vierseit. Das einem bestimmten Verhältniss λ entsprechende Hyperboloid enthält überdies die zweimal vier reellen Geraden

$$(1+c)x_1 \pm \lambda(1-c)x_2=0,\quad (1+m)x_4 \pm \lambda(1-m)x_3=0;$$
$$(1+c)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}x_1 \pm \lambda(1-m)x_3=0,$$
$$(1+m)x_4 \pm \lambda(1-c)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}x_2=0.$$

Die Transformation der Gleichung desselben Hyperboloids im B. 3 des Art. 124 giebt

$$x_3x_4+(1-c^2)x_1x_2=0,$$

oder die Fundamentallinien A_1A_4, A_4A_2, A_2A_3, A_3A_1 gehören ihm an; die durch die Kante A_1A_2 gehenden Kreisschnitte in den Ebenen

$$(1+m)x_4-(1-m)x_3=\pm m^2\{(1+m)x_4+(1-m)x_3\}$$

sind gegeben durch

$$x_3^2\frac{1-m}{1+m}\frac{1\pm m^2}{1\mp m^2}+(1-c^2)x_1x_2=0.$$

129. Wenn die projectivischen Räume auf dasselbe Coordinatensystem bezogen sind, so können ihre hauptsächlichen Beziehungen auf Grund der allgemeinen Gleichungen in Art. 126 f. leicht dargestellt werden.

In zwei collinearen Räumen fallen entsprechende Punkte P' und P zusammen für $x_i' = x_i$, also wenn die Relationen

$$\mu x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4$$

erfüllt sind; dies ist für vier Werthe des Proportionalitätsfactors μ möglich, denn man erhält durch Elimination der x_i zwischen ihnen die biquadratische Gleichung für μ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}-\mu, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\mu, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}-\mu \end{vmatrix} = 0$$

zur Bestimmung der Werthe von μ, für welche jene vier Gleichungen verträglich sind und welche somit die Coordinatengruppen der vier sich selbst entsprechenden Punkte liefern; denn durch Einsetzen der Wurzelwerthe $\mu_1, \ldots \mu_4$ in die Bedingungsgleichungen werden diese zu Bestimmungsgleichungen für die Coordinaten der fraglichen Punkte. Diese sind entweder alle reell, oder es sind zwei reell und die andern conjugirt imaginär, oder sie bilden zwei Paare conjugirt imaginärer Punkte. Im Falle ihrer Realität vereinfachen sich für die Wahl derselben als Fundamentalpunkte die Gleichungen der Collineation zu

$$\mu x_i' = a_i x_i, \quad \varrho \xi_k = a_k \xi_k'$$

wie in Art. 126, 2, wie es aus den Grundlagen unserer Coordinatentheorie auch direct folgt.

In dem Haupttetraeder, dessen Ecken sie sind, entsprechen die Kanten sich selbst und die Flächen sich selbst in der Art, dass jede der ersten Träger von zwei projectivischen Reihen und Ebenenbüscheln entsprechender Punkte und resp. Ebenen ist, deren Doppelelemente die zugehörigen Ecken und resp. Flächen des Tetraeders sind; und dass jede Fläche und Ecke zwei collineare Systeme trägt, für welche die zugehörigen Ecken und resp. Flächen die Doppelpunkte resp. Doppelebenen sind.

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punktepaare $a_i x_i$ und x_i und die Schnittgeraden entsprechender Ebenenpaare ξ_k' und

$a_k \xi_k'$ bilden nach Art. 58 Strahlencomplexe; alle ihre Geraden sind durch das Gesetz verbunden, dass ihre Durchstosspunkte S_1, S_2, S_3, S_4 mit den Flächen des Haupttetraeders Gruppen von festem Doppelverhältniss bilden, während zugleich — und auch in Folge dessen — ihre Verbindungsebenen mit den Gegenecken jener Flächen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 Büschel von demselben Doppelverhältniss liefern; denn die Gleichungen der von $A_3 A_4$ z. B. nach jenen Durchstosspunkten gehenden Ebenen $A_3 A_4 S_1$, $A_3 A_4 S_2$, $A_3 A_4 S_3$, $A_3 A_4 S_4$, d. h. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 + \lambda x_2 = 0$, $x_1 + \mu x_2 = 0$ liefern wegen der Werthe der beiden ersten Coordinaten von S_3, S_4 als π_{24}, $-\pi_{14}$ und $-\pi_{23}$, $-\pi_{31}$ (Art. 51) für λ, μ und das bezügliche Doppelverhältniss die Werthe

$$\lambda = \frac{\pi_{24}}{\pi_{14}}, \quad \mu = -\frac{\pi_{23}}{\pi_{31}}; \quad (S_1 S_2 S_3 S_4) = -\frac{\pi_{31}}{\pi_{23}} : \frac{\pi_{14}}{\pi_{24}}.$$

Und ebenso folgt das Doppelverhältniss der Ebenen nach den Hauptpunkten in derselben Folge aus den Gleichungen ihrer Schnitte mit $A_1 A_2$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_1 + \lambda \xi_2 = 0, \quad \xi_1 + \mu \xi_2 = 0$$

mit $\lambda = \frac{p_{24}}{p_{14}}$, $\mu = -\frac{p_{23}}{p_{31}}$ als $(\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4) = -\frac{p_{31}}{p_{23}} : \frac{p_{14}}{p_{24}}$ d. i. auch $= -\frac{\pi_{31}}{\pi_{23}} : \frac{\pi_{14}}{\pi_{24}}$.

In unserem Falle sind also beide nach den Coordinatenwerthen der Complexstrahlen $p_{ik} = (a_k - a_i) x_i x_k$ von dem Werthe

$$\frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} : \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2}.$$

Constructiv bestimmt ein Strahl des Complexes bei gegebenem Haupttetraeder das constante Doppelverhältniss und damit alle andern Strahlen des Complexes; derselbe Complex gehört also zu zweifach unendlich vielen Collineationen, die dasselbe Haupttetraeder haben.

Man sieht, dass Gleichheiten unter den Substitutionscoefficienten a_i das Verschwinden gewisser Coordinaten p_{ik} der Complexstrahlen bedingen, d. h. das Schneiden aller Complexstrahlen mit gewissen Kanten $A_i A_k$ des Haupttetraeders; man erkennt leicht, dass damit eine Eintheilung der zugehörigen Collineationen erhalten wird. Die Relation $a_1 = a_2$ macht $p_{12} = 0$, d. h. alle Complexstrahlen schneiden die Kante $A_3 A_4$ des Haupttetraeders, oder neben $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 A_4$ entsprechen die durch

diese Kante gehenden Ebenen alle sich selbst; in Folge dessen sind auch alle Punkte der Gegenkante $A_1 A_2$ derselben wie A_1, A_2 sich selbst entsprechend und die in den Ebenen durch $A_3 A_4$ liegenden collinearen Systeme der Räume centrisch collinear (vergl. „Kegelschn.", Art. 98). Sich selbst entsprechende Gerade sind ausser $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ alle durch A_3 resp. A_4 nach Punkten von $A_1 A_2$ gehenden. Hat man ausser $a_1 = a_2$ auch $a_3 = a_4$, so werden für alle Complexstrahlen gleichzeitig p_{12} und p_{34} gleich Null, d. h. sie schneiden alle sowohl $A_3 A_4$, als $A_1 A_2$ und diese beiden Geraden sind sowohl Träger von lauter sich selbst entsprechenden Punkten, als von lauter sich selbst entsprechenden Ebenen; auf jedem Complexstrahl liegen und durch ihn gehen unzählig viele Paare entsprechender Punkte und resp. Ebenen. Man hat diese Collineation die geschaarte genannt und kann die vorige als axiale bezeichnen.

Mit $a_1 = a_2 = a_3$ sind für alle Complexstrahlen p_{12}, p_{23}, p_{31} zugleich Null und sie gehen daher durch den festen Punkt A_4, das Centrum der Collineation; jeder trägt unendlich viele Paare entsprechender Punkte und Ebenen. Die Ebene A_4 enthält lauter sich selbst entsprechende Punkte und Strahlen und wird Collineationsebene genannt. Bezeichnen wir sie durch S (mit S′ identisch), so folgt, dass die Gegenebenen Q′ und R zu ihr parallel sind, weil SR mit S′R′ und S′Q′ mit SQ zusammenfallen müssen. (Vergl. B. 7.) Wenn insbesondere das Collineationscentrum in die Collineationsebene fällt, so liegen die Gegenebenen symmetrisch zu dieser. Im Falle der axialen Collineation sind R, Q′ zur Axe $A_3 A_4$ parallel ohne selbst parallel zu sein; im Falle der geschaarten parallel sowohl zu $A_3 A_4$ als zu $A_1 A_2$, also auch untereinander.

Wir besprechen unter den Beisp. den Zusammenhang collinearer Raumfiguren insbesondere für Flächen zweiten Grades.

B. 1. Die Verhältnisse $a_i : a_k$ sind die constanten Doppelverhältnisse der P, P' mit den S_i, S_k des Verbindungsstrahls.

B. 2. Man vervollständige die Textergebnisse durch die Betrachtung der entsprechenden Ebenenpaare und erläutere die Construction entsprechender Elementenpaare der collinearen Räume in den verschiedenen Fällen, mit den sie beherrschenden Doppelverhältnissen.

B. 3. Nach den Gesetzen der Collineation entspricht einem Kegelschnitt stets ein Kegelschnitt und einem Kegel zweiten

Grades wieder ein solcher, weil den projectivischen Punktreihen, Strahlen- und Ebenenbüscheln wieder solche entsprechen; aus dem letzten Grunde nach Art. 112 auch einem einfachen Hyperboloid im Allgemeinen wieder ein solches. Es entspricht aber überhaupt einer Fläche zweiten Grades wieder eine solche, und allgemein einer algebraischen Fläche eine ebensolche Fläche von derselben Ordnung und von derselben Klasse, da aus den Punkten resp. den Tangentialebenen einer Geraden mit der Originalfläche die Punkte und Ebenen der entsprechenden Geraden mit der entsprechenden Fläche hervorgehen. (Vergl. „Kegelschnitte", Art. 421, Art. 99.)

B. 4. Den Flächen zweiten Grades, welche keine reellen Geraden enthalten, entsprechen wieder Flächen derselben Art, so lange die Coefficienten der Substitution reell sind (vergl. Art. 134, 5); Ellipsoiden nur wieder Ellipsoide oder zweifache Hyperboloide oder elliptische Paraboloide, etc.; und einfachen Hyperboloiden nur wieder solche oder hyperbolische Paraboloide. Ob das eine oder andere, entscheidet im gegebenen Falle die Lage der gegebenen Fläche zur Gegenebene ihres Systems (Art. 126, B. 1). Wenn die im ungestrichenen Raume gegebene Fläche zweiten Grades die Gegenebene R nicht schneidet, so geht die entsprechende Fläche im gestrichenen Raume nicht ins Unendliche, ist also im Endlichen geschlossen, d. h. ein Ellipsoid; berührt jene die Ebene R in einem Punkte, d. h. hat sie mit ihr zwei reelle oder conjugirt imaginäre (vergl. „Kegelschn.", Art. 42, 95, 300, 4 f.) Gerade gemein, so berührt die entsprechende Fläche im gestrichenen Raume die unendlich ferne Ebene, genauer hat mit dieser zwei reelle oder conjugirt imaginäre Gerade gemein, d. h. sie ist entweder ein hyperbolisches oder ein elliptisches Paraboloid; schneidet endlich die Ebene R die Fläche im ungestrichenen Raume in einem eigentlichen Kegelschnitt, so wird die entsprechende Fläche von der unendlich fernen Ebene auch in einem reellen Kegelschnitt geschnitten, d. h. sie ist ein Hyperboloid. Alles das natürlich auch umgekehrt vom gestrichenen Raume und seiner Gegenebene Q′ aus; entstand also z. B. das (dann zweifache) Hyperboloid aus einem Ellipsoid, resp. aus einem elliptischen Paraboloid oder endlich einem zweifachen Hyperboloid, so muss es von der Gegenebene Q′ nicht getroffen resp. berührt oder endlich in einem eigentlichen Kegelschnitt geschnitten werden. Man stelle die verschiedenen Fälle auf und erläutere sie.

B. 5. Nach dem Zusammenhange zwischen Pol P und Polarebene P für eine Fläche zweiten Grades F (Art. 64 f.) entsprechen sich P' und P′, die entsprechenden Elemente im gestrichenen Raume, wieder als Pol und Polarebene in Bezug

auf die Fläche zweiten Grades F′; ebenso zwei Geraden g, g^*, die in Bezug auf F polar sind (Art. 66), zwei in Bezug auf F′ polare Gerade g', $g^{*\prime}$. Und da insbesondere (Art. 70 f.) der Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades der Pol der unendlich fernen Ebene ist, so folgt, dass dem Pol P_R der Ebene R in der Fläche des ungestrichenen Raumes der Mittelpunkt der entsprechenden Fläche des gestrichenen entspricht, den von ihm ausgehenden Strahlen und ihren polaren (in R) also die Durchmesser und die Stellungen der zu ihnen conjugirten Diametralebenen in F′; insbesondere auch den durch ihn an F gehenden Tangenten und Tangentialebenen die vom Mittelpunkte an F′ gehenden, d. h. der Asymptotenkegel der Fläche des gestrichenen Raumes. Ebenso ist bei zwei durch Collineation verbundenen Flächen zweiten Grades F, F′ der Punkt des ungestrichenen Raumes, der dem Pol der Gegenebene Q′ in Bezug auf F′ entsprechende der Mittelpunkt der Fläche F, etc.

Weil der Pol einer Tangentialebene ihr Berührungspunkt ist, so ist der Berührungspunkt eines Paraboloids mit der unendlich fernen Ebene als sein Mittelpunkt zu bezeichnen — es hat keinen Mittelpunkt im endlichen Raume (Art. 70 mit $A_{44} = 0$, Art. 89). Die Geraden und Ebenen, die ihn enthalten, sind die Durchmesser und Diametralebenen des Paraboloids, etc.

B. 6. Man erläutere den Beisp. 4, 5 entsprechend die Anwendung der axialen und geschaarten Collineation auf die Flächen zweiten Grades.

B. 7. Im Falle der centrischen Collineation haben zwei Flächen F, F′ denselben Tangentialkegel vom Centrum C der Collineation aus und die Ebenen der zugehörigen Berührungscurven auf F, F′ (Polarebenen von C) gehen durch einerlei Gerade in der Collineationsebene S; die Flächen haben auch einerlei Schnittcurve in S und die Spitzen der zugehörigen Berührungskegel (Pole von S) liegen mit C in einer Geraden; etc. (Vergl. Art. 150.)

Wir bemerken zur Construction, dass aus C, S und R als zwei parallele Ebenen zu einer Geraden l des ungestrichenen Raumes die entsprechende Gerade l' gefunden wird als die durch den Schnittpunkt von l mit S zu dem von C nach dem Schnittpunkte R von R mit l gehenden Strahl gezogene Parallele. Zieht man noch die Parallele durch C mit l oder SR bis zum Schnitt Q' mit l', dem Punkte, der dem unendlich fernen von l entspricht, so ist $CQ'SR$ ein Parallelogramm und somit die Gegenebene Q′ vom Centrum C ebenso weit und in demselben Sinne entfernt, wie die Collineationsebene S von der Gegenebene R.

B. 8. Für S als Schnitt mit S und A, A' als zwei entsprechende Punkte eines Strahles CS ist das Doppelverhältniss

$(CSAA')$ constant und gleich dem der vier Ebenen (CSAA') durch eine Gerade in S; dasselbe wird daher mittelst der Gegenpunkte Q', R eines Strahles durch C gemessen mit

$$(CSQQ') = (CSRR') = \frac{SQ'}{CQ'} = \frac{CR}{SR}.$$

B. 9. Man erläutere das Zerfallen des Complexes der Collineation in den Fällen der axialen, geschaarten und centrischen Collineation.

130. In reciproken Räumen, wo jedem Punkte eine Ebene und umgekehrt entspricht, können nur sich selbst entsprechende Gerade auftreten, d. h. gerade Linien, deren Punktreihen ihre Ebenenbüschel entsprechen; und es entsteht aus dem Schnitt von zwei solchen Geraden ein Punkt und eine Ebene, die sich vertauschbar oder involutorisch entsprechen und incident sind. (Vergl. „Kegelschn.", Art. 398.) Wir knüpfen die Entwicklung an den Nachweis der Gruppe von Punkten, die ihren Ebenen vertauschbar entsprechen, indem wir die Reciprocität beider Räume in Bezug auf ein und dasselbe Fundamentalsystem und also durch die allgemeinen Gleichungen (1), (2) oder (1*), (2*), des Art. 127 ausdrücken. Dann entspricht demselben Punkte y_i im gestrichenen und im ungestrichenen Raume je eine Ebene, und im Allgemeinen sind beide verschieden und schneiden sich also nur in einer Geraden; wir erörtern die Fälle ihrer Identität. Die Ebene im gestrichenen Raume hat nach den (1) a. a. O. die Coordinaten

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \alpha_{14}y_4,\ \alpha_{21}y_1 + \cdots,\ \alpha_{31}y_1 + \cdots,\ \alpha_{41}y_1 + \cdots,$$

die Ebene im ungestrichenen Raume aber

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 + \alpha_{41}y_4,\ \alpha_{12}y_1 + \cdots,\ \alpha_{13}y_1 + \cdots,\ \alpha_{14}y_1 + \cdots;$$

und beide werden identisch, wenn ihre gleichnamigen Coordinaten verhältnissgleich sind, also wenn gleichzeitig

$$k(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \cdot\cdot) = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \cdot\cdot,\ k(\alpha_{21}y_1 + \cdots) = \alpha_{12}y_1 + \cdots,$$
$$k(\alpha_{31}y_1 + \cdots) = \alpha_{13}y_1 + \cdots,\ k(\alpha_{41}y_1 + \cdots) = \alpha_{14}y_1 + \cdots$$

oder

$$\alpha_{11}(k-1)y_1 + (k\alpha_{12} - \alpha_{21})y_2 + \cdot\cdot = 0,$$
$$(k\alpha_{21} - \alpha_{12})y_1 + \alpha_{22}(k-1)y_2 + \cdot\cdot = 0, \text{ etc.}$$

ist. Und diese vier in den y_i linearen homogenen Gleichungen sind nur dann mit einander verträglich, wenn die Determinante

ihrer Coefficienten verschwindet, d. h. für einen Proportionalitätsfactor k, der eine Wurzel k_i einer durch die lineare Substitution der Reciprocität bestimmten biquadratischen Gleichung ist. Es giebt also in zwei reciproken Räumen im Allgemeinen vier Punkte, die ihren Ebenen vertauschbar oder involutorisch entsprechen.

Diese Punkte liegen in ihren Ebenen und sind die Ecken eines Tetraeders, welches diese zu anliegenden Flächen hat; denn für k als eine der Wurzeln der erwähnten biquadratischen Gleichung ist

$$k(\alpha_{i1} y_1 + \cdots) = \alpha_{1i} y_1 + \cdots;$$

und man erhält daher für die Gleichung der dem Punkte y_i entsprechenden Ebene

$$x_1(\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_1 + \cdot\cdot) + x_2(\alpha_{21} y_1 + \cdots) + x_3(\alpha_{31} y_1 + \cdots) \\ + x_4(\alpha_{41} y_1 + \cdots) = 0$$

durch Einsetzen von y_i für x_i, so lange y_i nicht in der Ebene liegt, einen von Null verschiedenen Werth n, der durch Multiplication der linken Seite der Gleichung mit k nach der vorigen Relation zugleich kn sein muss. Da aber $n = kn$ entweder $k = 1$ oder $n = 0$ fordert und das erste unmöglich ist, weil eine schiefsymmetrische Determinante

$$\begin{vmatrix} 0, & \alpha_{12} - \alpha_{21}, & \alpha_{13} - \alpha_{31}, & \alpha_{14} - \alpha_{41} \\ \alpha_{21} - \alpha_{12}, & 0, & \alpha_{23} - \alpha_{32}, & \alpha_{24} - \alpha_{42} \\ \alpha_{31} - \alpha_{13}, & \alpha_{32} - \alpha_{23}, & 0, & \alpha_{34} - \alpha_{43} \\ \alpha_{41} - \alpha_{14}, & \alpha_{42} - \alpha_{24}, & \alpha_{43} - \alpha_{34}, & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ -a, & 0, & d, & e \\ -b, & -d, & 0, & f \\ -c, & -e, & -f, & 0 \end{vmatrix}$$

von gerader Reihenzahl, als stets einem vollständigen Quadrat gleich — wie hier $= (af - be + cd)$ —, im Allgemeinen nicht Null sein kann, so bleibt nur das zweite d. h. $n = 0$ übrig oder die vier Punkte liegen in den entsprechenden Ebenen. Und da der Punkt $A_i' A_k' A_l'$, der der Ebene $A_i A_k A_l$ von drei solchen Punkten entspricht, in ihr liegen, also einer drei Punkte sein

muss, so bilden die Punkte und Ebenen das nämliche Tetraeder — Haupttetraeder der Reciprocität. (In der Ebene — vergl. a. a. O. — bilden die drei involutorischen Paare ein Dreieck, in welchem eine Ecke ihrer entsprechenden Seite gegenüber liegt, weil $k = 1$ eine Wurzel der betreffenden cubischen Gleichung ist, da eine schiefsymmetrische Determinante mit ungerader Reihenzahl stets verschwindet.)

Wird dieses Tetraeder zum Fundamentaltetraeder gewählt und setzt man den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 die anliegenden Flächen in der Ordnung $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$ resp. entsprechend, so müssen in der Substitution der Reciprocität die Coefficienten α_{11}, α_{21}, α_{41}; α_{12}, α_{22}, α_{32}; α_{23}, α_{33}, α_{43}; α_{14}, α_{34}, α_{44} sämmtlich Null sein, so dass die Gleichungen (1), (2) sich reduciren auf

$$(1)\quad m\xi_1' = \alpha_{13}x_3,\quad m\xi_2' = \alpha_{24}x_4,\quad m\xi_3' = \alpha_{31}x_1,\quad m\xi_4' = \alpha_{42}x_2;$$

$$(2)\quad r\xi_1 = \alpha_{31}x_3',\quad r\xi_2 = \alpha_{42}x_4',\quad r\xi_3 = \alpha_{13}x_1',\quad r\xi_4 = \alpha_{24}x_2'.$$

Nun entsprechen die Kanten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 sich selbst, d. h. ihren Punktreihen ihre Ebenenbüschel, und die Kanten A_1A_3, A_2A_4 einander involutorisch. Wären A_1, A_3 reell und A_2, A_4 conjugirt imaginär, so dass A_2A_4 eine reelle Gerade ist, so sind auch die von ihr nach A_1, A_3 gehenden Ebenen reell. Und für A_1, A_3 und A_2A_4 als zwei conjugirt imaginäre Paare sind A_1A_3, A_2A_4 reelle Kanten, durch welche auch zwei Paare conjugirt imaginärer Ebenen des Tetraeders gehen.

Da die einem Punkte entsprechenden Ebenen sich wie schon bemerkt, im Allgemeinen nur in einer Geraden schneiden, so bildet die Gesammtheit dieser Geraden (der doppeltconjugirten der Punkte y_i, auch Wechselstrahlen) einen Complex, der sich als Complex der reciproken Räume erweist. Bei der gewonnenen einfachen Bestimmung sind die Gleichungen dieser Ebenen für $P(y_i)$

$$\alpha_{13}y_3x_1 + \alpha_{24}y_4x_2 + \alpha_{31}y_1x_3 + \alpha_{42}y_2x_4 = 0,$$
$$\alpha_{31}y_3x_1 + \alpha_{42}y_4x_2 + \alpha_{13}y_1x_3 + \alpha_{24}y_2x_4 = 0$$

und damit die Coordinaten ihrer Schnittlinie p^*

$$\pi_{23} = y_1y_4(\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{31}\alpha_{42}),\quad \pi_{31} = y_1y_3(\alpha_{31}^2 - \alpha_{13}^2),$$
$$\pi_{14} = y_2y_3(\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{31}\alpha_{42}),\quad \pi_{24} = y_2y_4(\alpha_{24}^2 - \alpha_{42}^2),\ \text{etc.};$$

und man erhält daraus für das Doppelverhältniss des von ihr

nach den Fundamentalpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 gehenden Ebenenbüschels den von den y_i unabhängigen Ausdruck

$$-\frac{\pi_{31}}{\pi_{23}}:\frac{\pi_{14}}{\pi_{24}}=-\frac{(\alpha_{31}^2-\alpha_{13}^2)(\alpha_{24}^2-\alpha_{42}^2)}{(\alpha_{13}\alpha_{24}-\alpha_{31}\alpha_{42})^2}.$$

Und der nämliche Werth folgt für das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen die Verbindungsgerade π^* der entsprechenden Punkte einer Ebene von den Coordinaten η_i die Fundamentalebenen schneidet; denn die Gleichungen dieser Punkte sind

$$\alpha_{31}^{-1}\eta_3\xi_1+\alpha_{42}^{-1}\eta_4\xi_2+\alpha_{13}^{-1}\eta_1\xi_3+\alpha_{24}^{-1}\eta_2\xi_4=0,$$
$$\alpha_{13}^{-1}\eta_3\xi_1+\alpha_{24}^{-1}\eta_4\xi_2+\alpha_{31}^{-1}\eta_1\xi_3+\alpha_{42}^{-1}\eta_2\xi_4=0.$$

Die Subtraction und Addition der Gleichungen der Ebenen, die dem Punkte y_i entsprechen, liefert

$$(\alpha_{13}-\alpha_{31})(y_3x_1-y_1x_3)+(\alpha_{24}-\alpha_{42})(y_4x_2-y_2x_4)=0,$$
$$(\alpha_{13}+\alpha_{31})(y_3x_1+y_1x_3)+(\alpha_{24}+\alpha_{42})(y_4x_2+y_2x_4)=0;$$

zwei durch π_{ik} gehende Ebenen ausdrückend, die mit jenen ein harmonisches Büschel bilden und deren erste y_i und die von ihm ausgehende Transversale t_y der Kanten A_1A_3, A_2A_4 enthält, die einander involutorisch entsprechen; während die zweite die Polarebene von y_i in Bezug auf die Fläche zweiten Grades

$$(\alpha_{13}+\alpha_{31})x_1x_3+(\alpha_{24}+\alpha_{42})x_2x_4=0$$

ist. (Siehe B. 2.)

Ebenso entsteht aus den Gleichungen der einer Ebene η entsprechenden Punkte (mit der Verbindungsgeraden π^*) durch Subtraction und Addition die Doppelgleichung

$$(\alpha_{31}^{-1}\mp\alpha_{13})(\eta_3\xi_1\mp\eta_1\xi_3)+(\alpha_{42}^{-1}\mp\alpha_{24}^{-1})(\eta_4\xi_2\mp\eta_2\xi_4)=0,$$

die zwei Punkte ausdrückt, welche mit jenen eine harmonische Gruppe bilden; die obern Zeichen liefern den Punkt auf der in η_i liegenden Transversale von A_1A_3, A_2A_4 und die untern den Pol der Ebene η_i in Bezug auf die Fläche zweiten Grades

$$(\alpha_{13}^{-1}+\alpha_{31}^{-1})\xi_1\xi_3+(\alpha_{24}^{-1}+\alpha_{42}^{-1})\xi_2\xi_4=0. \quad \text{(B. 2.)}$$

Mit der Wahl von η_i als Verbindungsebene des gegebenen Punktes y_i mit der ihm doppelt conjugirten Geraden p^* gelangt man zur Construction des involutorischen Tetraeders und der beiden er-

wähnten Flächen zweiten Grades aus den Bestimmungselementen (fünf Paaren) der Reciprocität.[20])

B. 1. Man bilde die bilinearen Gleichungen der Reciprocität (vergl. die der Collineation in Art. 126), also die Gleichungen zwischen den Coordinaten x_i eines Punktes und denen eines Punktes x_i', welcher in der ihm im andern Raume entsprechenden Ebene liegt; und die Gleichung zwischen den Coordinaten ξ_i einer Ebene und den Coordinaten ξ_i' einer Ebene durch den ihm im andern Raume entsprechenden Punkt. Man wird nur in jenen — aber mit den Coefficienten α_{ik} — die ξ_i' durch die x_i' ersetzen und eine zweite mit den Elementen des Minorensystems von Δ und den ξ_i, ξ_k' bilden. Man specialisirt sie leicht für das involutorische Haupttetraeder.

B. 2. Diese Gleichungen führen zur Beantwortung der Frage nach den Punkten, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen, durch $x_i = x_i'$ und nach den Ebenen, welche durch ihre entsprechende Punkte gehen, für $\xi_i = \xi_i'$. Mit Benutzung der auf das involutorische Tetraeder bezogenen Gleichungen im Text erhalten wir beide in gleicher Einfachheit aus den vereinfachten Gleichungen (1) oder (2) direct; nämlich für die Gesammtheit oder den Ort der Punkte, die in ihren Ebenen liegen, die Gleichung

$$(\alpha_{13} + \alpha_{31})x_1x_3 + (\alpha_{24} + \alpha_{42})x_2x_4 = 0.$$

Der Ort bildet also eine Fläche zweiter Ordnung, die, weil ihrer Gleichung durch $x_1 = x_2 = 0$, wie durch $x_1 = x_4 = 0$, durch $x_3 = x_2 = 0$ und $x_3 = x_4 = 0$ stets genügt wird, alle Punkte der vier Fundamentalgeraden A_3A_4, A_2A_3, A_1A_4, A_1A_2 oder das windschiefe Vierseit $A_1A_2A_3A_4$ enthält. (Vergl. Art. 128, B. 2.)

Und man erhält für die Gesammtheit der Ebenen, die durch ihre entsprechenden Punkte gehen, aus den Auflösungen der (1) oder (2) nach den x_i oder x_i'

$$(\alpha_{13}^{-1} + \alpha_{31}^{-1})\xi_1\xi_3 + (\alpha_{24}^{-1} + \alpha_{42}^{-1})\xi_2\xi_4 = 0;$$

ihre Enveloppe also als eine Fläche zweiter Classe, die wegen steter Erfüllung ihrer Gleichung durch $\xi_1 = \xi_2 = 0$, durch $\xi_1 = \xi_4 = 0$, ferner $\xi_3 = \xi_2 = 0$ und $\xi_3 = \xi_4 = 0$ von allen Ebenen durch die Geraden A_1A_2, A_1A_4, A_2A_3, A_3A_4 berührt wird und somit diese Geraden auch enthält. In den Ecken des Vierseits berühren sich beide Flächen nach den entsprechenden Ebenen.

Man bilde die Gleichung des Ortes in den ξ_i und die der

Enveloppe in den x_i; die der Enveloppe ist

$$(\alpha_{24}^{-1} + \alpha_{42}^{-1})x_1x_3 + (\alpha_{13}^{-1} + \alpha_{31}^{-1})x_2x_4 = 0. \text{ (Vergl. Art. 80.)}$$

B. 3. Man erläutere geometrisch und algebraisch die Lage der doppeltconjugirten Geraden für die Elemente des Fundamentaltetraeders, also für die der Ecken, der Punkte der sechs Kanten und der vier Flächen, und wieder der Flächen, der Ebenen durch die sechs Kanten und durch die vier Ecken.

B. 4. Weil jeder Geraden eine Gerade, und dem Punkte eine Ebene und umgekehrt entspricht, dabei alle projectivischen Beziehungen wie die Incidenz von Elementenpaaren, die Projectivität von Reihen, Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln etc. sich wiederholen, so entspricht jeder Fläche zweiter Ordnung des einen Raumes eine Fläche zweiter Classe im andern und umgekehrt.

Enthält die eine den Mittelpunkt ihres Raumes (Art. 127, B. 1), so wird die andere von der unendlich fernen Ebene berührt. Einer Regelfläche entspringt wieder eine solche, einem Kegel zweiten Grades ein Kegelschnitt. Die specielleren Ausführungen der Art. 135 f. machen weitere Entwicklung hier überflüssig.

131. Wenn zwei reciproke Elementargebilde zweiter Stufe nicht vereinigt liegen, so erzeugen sie eine reelle Fläche zweiten Grades durch die Paare ihrer entsprechenden Elemente; nämlich zwei reciproke Ebenen Σ, Σ' als Enveloppe der Ebenen, welche einen Punkt oder eine Gerade in Σ mit der entsprechenden Geraden oder dem entsprechenden Punkte von Σ' verbinden; und zwei reciproke Bündel S, S' als Ort der Punkte, in welchen ein Strahl des einen Bündels die entsprechende Ebene des andern schneidet. Zu jenen Ebenen gehören Σ, Σ' selbst, weil ihrer Schnittlinie sowohl in Σ als in Σ' ein Punkt entspricht, der diese mit ihr verbindet; und die Scheitel der Bündel S, S' gehören zu diesen Punkten, weil ihrer Verbindungslinie sowohl in S als in S' eine Ebene entspricht, die sie hier schneidet.

Der Ort dieser Punkte ist wie die Enveloppe der Ebenen eine Fläche zweiten Grades, weil jede Gerade t zwei seiner Punkte resp. zwei ihrer Ebenen trägt. Zieht man nämlich nach den Punkten A, B, C der Geraden t drei Strahlen aus S, so entsprechen ihnen im Bündel S' drei Ebenen A', B', C' eines zu jenem Strahlenbüschel projectivischen Ebenenbüschels und die zwei sich selbst entsprechenden Punkte der projectivischen Reihen

A, B, C und A', B', C' — der Schnittpunkte von A', B', C' resp. in t — sind Punkte der Fläche — entweder reell und verschieden, oder vereinigt (Tangente) oder conjugirt imaginär. Die dual entsprechende Construction liefert die durch t gehenden Tangentialebenen der Fläche im Fall der reciproken Ebenen Σ, Σ'.[21])

Denken wir für die algebraische Entwicklung die Scheitel der Bündel S, S' als die Fundamentalpunkte A_4, A_1, so kann durch

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0 \quad \text{resp.} \quad \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 + \xi_4' x_4 = 0$$

jede Ebene des ersten und des zweiten Bündels ausgedrückt werden; und besteht zwischen den Coordinaten der Ebenen die bilineare Relation der Reciprocität (Art. 127, Art. 130, 1)

$$(\alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{32}\xi_3)\xi_2' + (\alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3)\xi_3' \\ + (\alpha_{14}\xi_1 + \alpha_{24}\xi_2 + \alpha_{34}\xi_3)\xi_4' = 0,$$

so bestimmen zwei Werthegruppen der einen eine Werthegruppe der andern Veränderlichen ξ, d. h. zu einem Strahl des einen Bündels die entsprechende Ebene des andern und damit einen Punkt der Fläche; z. B. zwei Werthegruppen η, ζ der ξ eine der ξ' — die Elimination der ξ_k', der η und ζ zwischen den Gleichungen des Problems liefert die Gleichung des Ortes. Jene Gleichungen sind

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0, \quad \zeta_1 x_1 + \cdots = 0, \quad \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 + \xi_4' x_4 = 0,$$

$$(\alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \alpha_{32}\eta_3)\xi_2' + (\alpha_{13}\eta_1 + \alpha_{23}\eta_2 + \alpha_{33}\eta_3)\xi_3' \\ + (\alpha_{14}\eta_1 + \alpha_{24}\eta_2 + \alpha_{34}\eta_3)\xi_4' = 0,$$

$$(\alpha_{12}\zeta_1 + \alpha_{22}\zeta_2 + \alpha_{32}\zeta_3)\xi_2' + (\alpha_{13}\zeta_1 + \alpha_{23}\zeta_2 + \alpha_{33}\zeta_3)\xi_3' \\ + (\alpha_{14}\zeta_1 + \alpha_{24}\zeta_2 + \alpha_{34}\zeta_3)\xi_4' = 0;$$

man entnimmt den beiden ersten

$$\eta_3 = -\frac{\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2}{x_3}, \quad \zeta_3 = -\frac{\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2}{x_3}$$

und bildet durch ihre Substitution in die beiden letzten

$$\{(\alpha_{12}x_3 - \alpha_{32}x_1)\eta_1 + (\alpha_{22}x_3 - \alpha_{32}x_2)\eta_2\}\xi_2' \\ + \{(\alpha_{13}x_3 - \alpha_{33}x_1)\eta_1 + (\alpha_{23}x_3 - \alpha_{33}x_2)\eta_2\}\xi_3' \\ + \{(\alpha_{14}x_3 - \alpha_{34}x_1)\eta_1 + (\alpha_{24}x_3 - \alpha_{34}x_2)\eta_2\}\xi_4' = 0,$$

und die entsprechende mit ζ statt η. Zwischen diesen und der ersten Gleichung in den ξ' lassen sich die ξ' linear eliminiren, sodass

man mit Vertauschung der Zeilen und Reihen die Determinante erhält

$$\begin{vmatrix} x_2, & (\alpha_{12}x_3-\alpha_{32}x_1)\eta_1+(\alpha_{22}x_3-\alpha_{32}x_2)\eta_2, & (\alpha_{12}x_3-\alpha_{32}x_1)\zeta_1+\cdot \\ x_3, & (\alpha_{13}x_3-\alpha_{33}x_1)\eta_1+(\alpha_{23}x_3-\alpha_{33}x_2)\eta_2, & (\alpha_{13}x_3-\alpha_{33}x_1)\zeta_1+\cdot \\ x_4, & (\alpha_{14}x_3-\alpha_{34}x_1)\eta_1+(\alpha_{24}x_3-\alpha_{34}x_2)\eta_2, & (\alpha_{14}x_3-\alpha_{34}x_1)\zeta_1+\cdot \end{vmatrix}=0.$$

Diese geht durch Zerlegung nach den binomischen Reihen von Elementen in η, ζ zuerst in

$$(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)\begin{vmatrix} x_2, & (\alpha_{12}x_3-\alpha_{32}x_1), & (\alpha_{22}x_3-\alpha_{32}x_1) \\ x_3, & (\alpha_{13}x_3-\alpha_{33}x_1), & (\alpha_{23}x_3-\alpha_{33}x_1) \\ x_4, & (\alpha_{14}x_3-\alpha_{34}x_1), & (\alpha_{24}x_3-\alpha_{34}x_1) \end{vmatrix}=0,$$

und durch die zweite Zerlegung mit Unterdrückung des Factors $(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)x_3$ in die Summe

$$x_1\begin{vmatrix} x_2, & \alpha_{22}, & \alpha_{32} \\ x_3, & \alpha_{23}, & \alpha_{33} \\ x_4, & \alpha_{24}, & \alpha_{34} \end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix} \alpha_{12}, & x_2, & \alpha_{32} \\ \alpha_{13}, & x_3, & \alpha_{33} \\ \alpha_{14}, & x_4, & \alpha_{34} \end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix} \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & x_2 \\ \alpha_{13}, & \alpha_{23}, & x_3 \\ \alpha_{14}, & \alpha_{24}, & x_4 \end{vmatrix}=0$$

über, wo man die Entstehung der drei Determinantenfactoren aus der Determinante der linearen Substitution der Reciprocität sofort erkennt. Die entwickelte Form der Gleichung (mit den Minoren der Substitutionsdeterminante)

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_{12}x_1x_2+\mathsf{A}_{13}x_1x_3+\mathsf{A}_{14}x_1x_4+\mathsf{A}_{22}x_2^2+(\mathsf{A}_{23}+\mathsf{A}_{32})x_2x_3 \\ +\mathsf{A}_{24}x_2x_4+\mathsf{A}_{33}x_3^2+\mathsf{A}_{34}x_3x_4=0 \end{aligned}$$

bestätigt durch das Fehlen der Glieder in x_1^2 und x_4^2, dass die Fläche die Scheitel A_1 und A_4 der Bündel enthält; der gemeinsame Strahl derselben A_1A_4 oder $x_2=0$, $x_3=0$ als Strahl von A_1 resp. A_4 liefert direct die Bedingungen

$$\alpha_{12}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\alpha_{32}\xi_3=0,\quad \alpha_{13}\xi_1+\alpha_{23}\xi_2+\alpha_{33}\xi_3=0$$

resp.

$$\alpha_{22}\xi_2'+\alpha_{23}\xi_3'+\alpha_{24}\xi_4'=0,\quad \alpha_{32}\xi_2'+\alpha_{33}\xi_3'+\alpha_{34}\xi_4'=0$$

und damit

$$\xi_2':\xi_3':\xi_4'=\mathsf{A}_{12}:\mathsf{A}_{13}:\mathsf{A}_{14}$$

für die entsprechende Ebene in A_4, und

$$\xi_1:\xi_2:\xi_3=\mathsf{A}_{14}:\mathsf{A}_{24}:\mathsf{A}_{34}$$

für die in A_1; diese sind also die zugehörigen Tangentialebenen der Fläche (Art. 63)

$$\mathsf{A}_{14}x_1 + \mathsf{A}_{24}x_2 + \mathsf{A}_{34}x_3 = 0, \text{ resp. } \mathsf{A}_{12}x_2 + \mathsf{A}_{13}x_3 + \mathsf{A}_{14}x_4 = 0.$$

Jede reelle Fläche zweiter Ordnung kann aus reciproken Bündeln, deren Scheitel S, S' zwei auf ihr frei gewählte Punkte sind, auf unendlich viele Arten erzeugt werden; und dual jede Fläche zweiter Classe. Um das erste auszuführen, hat man vier Strahlen des einen Bündels und die entsprechenden vier Ebenen des andern so zu wählen, dass zwei ihrer ebenen Querschnitte durch den einen Scheitel S erzeugt werden, da dann alle ihre Querschnitte durch S' auch erzeugt werden müssen. Dazu legt man durch S zwei Querschnitte K, K_1 der Fläche und durch S' und ihren zweiten Schnittpunkt A einen dritten Querschnitt, der K noch in G und K_1 noch in H trifft; man wählt in K noch zwei Punkte B, C und in K_1 zwei Punkte D, E und lässt die Ebenen K, K_1 und $S'AGH$ den Strahlen $S'G$, $S'H$, SA resp. entsprechen; dann bestimmen die vier Strahlen SB, SC, SD, SE mit den vier ihnen entsprechenden Ebenen $S'GB$, $S'GC$, $S'HD$, $S'HE$ die Reciprocität der Bündel S, S' so, dass in den Ebenen K, K_1 die Kegelschnitte durch S, B, C, A und G resp. S, D, E, A und H durch projectivische Strahlen- und Ebenenbüschel aus S und S' erzeugt werden und in Folge dessen als Ort der Schnittpunkte aller entsprechenden Elementenpaare die gegebene Fläche erzeugt wird.

Zur Construction aus reciproken Systemen in zwei Tangentialebenen Σ, Σ' wählt man auf der ersten zwei Punkte K, K_1 und die zugehörigen Tangentenkegel der Fläche, die noch die Tangentialebene A gemein haben; legt aus einem Punkte auf der Schnittlinie von Σ' mit A den Tangentenkegel, der mit den beiden ersten resp. noch die Ebenen G und H gemein hat und wählt endlich auf den Kegeln aus K, K_1 noch die Ebenenpaare B, C und D, E resp. Indem man den Geraden $\Sigma\mathsf{B}$, $\Sigma\mathsf{C}$, $\Sigma\mathsf{D}$, $\Sigma\mathsf{E}$ die Punkte $\Sigma'\mathsf{GB}$, $\Sigma'\mathsf{GC}$, $\Sigma'\mathsf{HD}$, $\Sigma'\mathsf{HE}$ resp. entsprechend setzt, hat man die Reciprocität der Systeme Σ, Σ' so festgesetzt, dass ihr Erzeugniss mit der vorgelegten Fläche identisch wird.

B. 1. Wählt man die Ebenen Σ, Σ' als die Fundamentalebenen A_4, A_1, so kann durch

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_2'\xi_2 + x_3'\xi_3 + x_4'\xi_4 = 0$$

jeder Punkt der ersten und resp. der zweiten ausgedrückt werden; die bilineare Gleichung

$$(\alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{32} x_3) x_2' + (\alpha_{13} x_1 + a_{23} x_2 + \alpha_{33} x_3) x_3' \\ + (\alpha_{14} x_1 + \alpha_{24} x_2 + \alpha_{34} x_3) x_4' = 0$$

macht zu zwei Werthegruppen y_1, y_2, y_3 und z_1, z_2, z_3 der x_i eine Gruppe der x_i' entsprechend und die Enveloppe der Verbindungsebenen wird durch die ganz gleiche Elimination erhalten. (Vergl. weiterhin Art. 140.)

B. 2. Man beweise auf Grund des Vorigen die Construction des Pols P zu einer Ebene P in Bezug auf die aus zwei reciproken Ebenen Σ, Σ' entstehende Fläche zweiten Grades: den Schnittlinien s, s' von P mit Σ, Σ' resp. entsprechen in Σ', Σ zwei Punkte S, S'; in ihrer Verbindungsgeraden ist P der vierte harmonische Punkt zu dem Schnittpunkte mit P in Bezug auf S und S'. Man bilde die dual entsprechende Construction.

B. 3. Wenn die Tangentialebene in einem der Scheitel die Fläche in einem reellen Linienpaare schneidet, so ist sie ein einfaches Hyperboloid; wenn nicht, Ellipsoid oder zweifaches Hyperboloid. Die Behandlung in Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten gestattet auch ihren Schnitt mit der unendlich fernen Ebene einfach anzugeben und die weiteren Unterscheidungen zu begründen.

B. 4. Die Strahlen durch einen Punkt S und ihre Normalebenen durch einen zweiten Punkt S' erzeugen als Ort ihrer Schnittpunkte eine Kugel. Man bilde ihre Gleichungen in Cartesischen Coordinaten. Diese Erzeugung der Kugel ist Specialfall der Erzeugung von Flächen zweiten Grades aus reciproken Bündeln mit entsprechend gleichen Winkeln.[22])

B. 5. Es giebt unter den Reciprocitäten ebener Systeme specielle mit singulären Linien; nämlich jede der Ebenen Σ, Σ' enthält eine Gerade s resp. s', die als Gerade jedem Punkte der andern Ebene entspricht und deren eigenen Punkten Strahlenbüschel aus projectivisch zugeordneten Punkten der andern entsprechen.

Die aus solchen Systemen entstehende Enveloppe zweiter Classe wird also von allen durch s und von allen durch s' gehenden Ebenen berührt, sowie von allen Ebenen, welche eine Verbindungsgerade der in ihnen gelegenen projectivischen Reihen enthalten, sodass s, s' und alle diese Verbindungsgeraden ihr angehören: Die Entstehung des einfachen Hyperboloids in Art. 117. Wenn s, s' sich in der Schnittlinie von Σ, Σ' begegnen, so entsteht als Fläche ein Kegelschnitt (Art. 117) als Enveloppe

der Ebenenbüschel durch seine Tangenten. Und wenn der Schnittpunkt von s, s' in der Projectivität ihrer Reihen sich selbst entspricht, so entstehen zwei Punkte mit allen ihren Ebenen.

B. 6. Man erläutere die Reciprocität von Bündeln mit singulären Strahlen und ihre Bedeutung für die Classification der Flächen zweiten Grades; ebenso die Reciprocitäten der Ebenen mit singulären Punkten, mit singulärem Punkte in singulärer Linie und die entsprechenden in den Bündeln.

132. Wenn sich in collinearen Systemen entsprechende Punkte (also auch Gerade und Ebenen) vertauschbar entsprechen, d. h. wenn jedem Punkte O, P' derselbe Punkt als O' und P entspricht, ob man ihn zum ungestrichenen oder gestrichenen Raume rechnet, so nennt man sie involutorisch oder sagt sie bilden eine involutorische Collineation. Zu ihrer Untersuchung gehen wir von den Gleichungen (1) der Collineation in einem System Cartesisch-Plücker'scher Coordinaten aus, die in Art. 126, 1 gegeben sind, weil in diesen die Gegenebene $\mathfrak{R}$ unmittelbar hervortritt. Dieselbe muss nach der definirenden Eigenschaft der Involution mit der Gegenebene $\mathfrak{Q}'$ zusammenfallen und wir wählen sie zur Ebene $z = 0$. Damit nehmen jene Gleichungen die Form an

$$z(x' - a_{24}) = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y,\ z(y' - a_{34}) = a_{31} + a_{32}x + a_{33}y,$$
$$zz' = a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z,$$

die durch Parallelverschiebung der Axen nach dem Anfangspunkte $(a_{24}, a_{34}, 0)$ in

$$zx' = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y,\quad zy' = a_{31} + a_{32}x + a_{33}y,$$
$$zz' = a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z$$

übergehen. Für den Fall der Involution folgen daraus die weiteren

$$z'x = a_{21} + a_{22}x' + a_{23}y',\ z'y = a_{31} + a_{32}x' + a_{33}y',$$
$$zz' = a_{41} + a_{42}x' + a_{43}y' + a_{44}z'.$$

Multipliciren wir die ersten beiden Gleichungen der letzten Gruppe mit z und setzen für zx', zy', zz' die Werthe nach denen der ersten Gruppe ein, so folgen als für alle x, y, z gültig

$$x(a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z) = a_{21}z + a_{22}(a_{21} + a_{22}x + a_{23}y),$$
$$+ a_{23}(a_{31} + a_{32}x + a_{33}y),$$
$$y(a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z) = a_{31}z + a_{32}(a_{21} + a_{22}x + a_{23}y),$$
$$+ a_{33}(a_{31} + a_{32}x + a_{33}y);$$

d. h. man muss haben

$$a_{42} = 0,\ a_{43} = 0,\ a_{44} = 0,\ a_{21} = 0,\ a_{31} = 0;$$

$$a_{23}(a_{22}+a_{32})=0, a_{32}(a_{22}+a_{33})=0, a_{41}=a_{22}^2+a_{23}a_{32}=a_{32}a_{23}+a_{33}^2.$$

Diesen Relationen kann in zwei Arten genügt werden, nämlich durch

(a) $a_{33} = a_{22},\ a_{23} = 0,\ a_{32} = 0$ und durch (b) $a_{33} = -a_{22}$;

und man erhält denselben entsprechend die Gleichungen der involutorischen Collineationen

(a) $zx' = a_{22}x,\ zy' = a_{22}y,\ zz' = a_{22}^2$ mit $z'x = a_{22}x',\ z'y = a_{22}y'$,

(b) $zx' = a_{22}x + a_{23}y,\ zy' = a_{32}x - a_{22}y,\ zz' = a_{22}^2 + a_{23}a_{32}$; etc.

Im Falle (a) folgt aus $x = x',\ y = y',\ z = z'$ für die sich selbst entsprechenden Elemente

$$x(z - a_{22}) = 0,\quad y(z - a_{22}) = 0,\quad z^2 - a_{22}^2 = 0,$$

also $z = a_{22}$ und sonst $x = 0,\ y = 0,\ z = -a_{22}$, d. h. es giebt in diesem Falle eine sich selbst entsprechende Ebene: Collineations- oder Involutions-Ebene, parallel zur Gegenebene im Abstande a_{22} von ihr, und einen sich selbst entsprechenden Punkt: Collineations- oder Involutions-Centrum im gleichen Abstande auf der andern Seite der Gegenebene. Die Punkte und Geraden in jener Ebene und wieder die Ebenen und Geraden aus diesem Punkte entsprechen sich selbst. Die Geraden in jener sind Träger involutorischer Büschel entsprechender Ebenenpaare, die Geraden durch diesen Träger involutorischer Reihen entsprechender Punkte; entsprechende Ebenen sind daher wie entsprechende Punkte durch Collineations-Centrum und -Ebene harmonisch getrennt. Wir haben einen besondern Fall der centrischen Collineation von Art. 129.

Im Falle (b) ist für die Vereinigung entsprechender Punkte

$$x(z - a_{22}) = a_{23}y,\quad y(z + a_{22}) = a_{32}x,\quad z^2 = a_{22}^2 + a_{23}a_{32}$$

$$(\text{setzen wir } = b^2,\quad \text{sodass}\quad z = \pm b),$$

wo die dritte Gleichung aus den beiden ersten folgt, so dass dieselben zwei Gerade in äquidistanten Parallelebenen zur Gegenebene darstellen, die mit b gleichzeitig reell und conjugirt imaginär sind und die Gleichungen haben[23])

$$x(b - a_{22}) = a_{23}y,\quad y(b + a_{22}) = a_{32}x.$$

Wählt man die Halbirungslinien der Winkel ihrer Orthogonalprojectionen in der Gegenebene zu Axen x und y, so erhält man aus $x+y=\lambda Y$, $x-y=\mu X$, $x'+y'=\lambda Y'$, etc. für die Gleichungen dieser Involution (b)

$$zY'=mX,\quad zX'=nY,\quad zz'=mn$$

und für die sich selbst entsprechenden Geraden oder die Axen unserer Involution,

$$z=\sqrt{mn},\quad Y=X\sqrt{\frac{m}{n}};\quad z=-\sqrt{mn},\quad Y=-X\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Entsprechende Punkte liegen in einer sie, diese Doppellinien, schneidenden Geraden, mit constantem Product ihrer Abstände von der Mitte zwischen ihnen oder sie bilden harmonische Gruppen mit ihren Schnitten in denselben; ist jenes constante Product positiv, so sind die Doppellinien reell, wenn negativ, imaginär. Die Schnittlinie entsprechender Ebenen schneidet die Doppelgeraden und sie bilden mit den Ebenen nach den Doppelgeraden eine harmonische Gruppe — wir haben den harmonischen Specialfall der geschaarten Collineation des Art. 129.

Wenn im Falle der involutorischen Collineation (a) die Collineationsebene unendlich fern ist, so liegen entsprechende Punkte äquidistant vom Centrum in derselben Geraden, entsprechende Gerade und Ebenen sind parallel: Symmetrie in Bezug auf ein Centrum; wenn das Centrum unendlich fern ist, liegen entsprechende Punkte in parallelen Geraden äquidistant von der Collineationsebene: Symmetrie in Bezug auf eine Ebene, orthogonal oder schief. (Vergl. die entsprechenden Symmetrien für ebene Figuren „Kegelschn.", S. 191 f.) Dem Falle (b) mit zwei reellen windschiefen Doppelgeraden entspringt nur eine Symmetrie, nämlich wenn die eine der Doppelgeraden unendlich fern ist: Geschaarte Symmetrie. Auch in ihr gehen die Gruppen harmonischer Punkte in Halbirungsgruppen über.

B. 1. Eine Fläche zweiten Grades ist mit sich selbst in involutorischer Collineation für jeden Punkt des Raumes als Centrum und seine Polarebene als Collineationsebene. Jedes ihrer Punktepaare auf einem Strahl durch den Pol wird durch ihn und die Polarebene harmonisch getrennt; die zugehörigen Tangenten und Tangentialebenen schneiden sich in der Polarebene.

Der unendlich fernen Polarebene entspricht die Symmetrie der Fläche in Bezug auf ihren Mittelpunkt. Für jede Polar-

ebene durch den Mittelpunkt entspringt die Symmetrie der Fläche in Bezug auf dieselbe nach der Richtung des ihr conjugirten Durchmessers. (Art. 71.)

B. 2. Sind zwei Gerade polar in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades (Art. 66 u. w.), so entspricht jedem ihrer Punkte, durch jene von ihm harmonisch getrennt, der zweite Schnittpunkt der von ihm ausgehenden Transversale der conjugirten Geraden. Ist die eine von ihnen unendlich fern, so wird die andere zu dem ihr (d. h. der durch sie gehenden Diametralebenen) conjugirten Durchmesser, und die entsprechenden Punktepaare der Fläche liegen in Transversalen des Durchmessers parallel der Diametralebene äquidistant von jenem.

133. Wir wenden uns schliesslich zu den involutorischen Reciprocitäten, wo jedem Punkte die nämliche Ebene entspricht, ob man ihn zu dem ungestrichenen oder zu dem gestrichenen Raume rechnet, oder wo alle entsprechenden Elemente sich vertauschbar entsprechen. Die Coordinatenwerthe der Ebenen, die demselben Punkte y_i entsprechen, je nachdem man ihn als dem einen oder dem andern System angehörig voraussetzt, sind nach Art. 130 in Bezug auf ein Fundamentaltetraeder von allgemeiner Lage

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \cdot\cdot, \quad \alpha_{21}y_1 + \cdots, \quad \alpha_{31}y_1 + \cdots, \quad \alpha_{41}y_1 + \cdots$$

oder

$$\Sigma\alpha_{1i}y_i, \quad \Sigma\alpha_{2i}y_i, \quad \Sigma\alpha_{3i}y_i, \quad \Sigma\alpha_{4i}y_i$$

und

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \cdot\cdot, \text{ etc. oder } \Sigma\alpha_{i1}y_i, \quad \Sigma\alpha_{i2}y_i, \quad \Sigma\alpha_{i3}y_i, \quad \Sigma\alpha_{i4}y_i$$

und zeigen sofort, dass es zwei Fälle der linearen Substitution giebt, in denen die entsprechenden Coordinaten ausnahmslos identisch werden und somit die dem Punkte y_i entsprechenden Ebenen zusammenfallen; also Fälle involutorischer Reciprocität.

Nämlich a) wenn zwischen den Coefficienten der Substitution die Relationen

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}, \quad \text{d. h. auch} \quad \alpha_{ii} = 0$$

und dann b) wenn zwischen ihnen die Relationen

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

bestehen. Man nennt im Falle a) die Determinante der Substitution schiefsymmetrisch, im Falle b) heisst sie symmetrisch; dort unterscheiden sich ihre Zeilen von den gleichnamigen Reihen durch den Wechsel der Vorzeichen, hier stimmen sie mit einander überein.

Betrachten wir zuerst den Fall a), so lauten die allgemeinen Gleichungen dieser Reciprocität

$$\begin{aligned}
m\xi_1' &= \quad\quad \alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\alpha_{14}x_4, & r\xi_1 &= \quad\quad -\alpha_{12}x_2'-\alpha_{13}x_3'-\alpha_{14}x_4',\\
m\xi_2' &= -\alpha_{12}x_1 \quad +\alpha_{23}x_3+\alpha_{24}x_4, & r\xi_2 &= \alpha_{12}x_1' \quad -\alpha_{23}x_3'-\alpha_{24}x_4',\\
m\xi_3' &= -\alpha_{13}x_1-\alpha_{23}x_2 \quad +\alpha_{34}x_4, & r\xi_3 &= \alpha_{13}x_1'+\alpha_{23}x_2' \quad -\alpha_{34}x_4',\\
m\xi_4' &= -a_{14}x_1-\alpha_{24}x_2-\alpha_{34}x_3 \;; & r\xi_4 &= \alpha_{14}x_1'+\alpha_{24}x_2'+\alpha_{34}x_3'.
\end{aligned}$$

Sie bestimmen alle Elementenpaare, weil die vier Punkte $\xi_i'=0$ resp. $\xi_i=0$ nicht in einer Ebene liegen können, also ein Fundamentaltetraeder zur Coordinatenbestimmung liefern; denn die Determinante der rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen ist als ein vollständiges Quadrat nicht Null. (Vergl. Art. 130.)

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 resp. mit x_1', ... und addirt die Producte, so erhält man die Summe Null, d. h. die Coordinaten entsprechender Elementenpaare erfüllen stets die Bedingung der Incidenz, oder entsprechende Elemente liegen stets vereinigt. Darum werden auch die Gleichungen der Flächen zweiten Grades identisch erfüllt, die wir als Ort der Punkte, die in ihren Ebenen liegen, und als Enveloppe dieser Ebenen in Art. 130, 2 erhielten.

Man nennt diese involutorische Reciprocität mit ausnahmslos vereinigten Elementenpaaren ein Nullsystem[24]), in jedem Elementenpaar den Punkt Nullpunkt der Ebene und die Ebene Nullebene des Punktes (vergl. Art. 58, B. unter 1) und 7); man nennt der Verbindungsgeraden zweier Punkte die Schnittlinie ihrer Nullebenen conjugirt und bezeichnet daher die Geraden durch den Nullpunkt in seiner Nullebene, die offenbar sich selbst conjugirt sind, als Nullaxen des Systems.

Man kann offenbar in einem solchen Nullsystem von jedem Punkte als Ecke aus unendlich viele involutorische Tetraeder von der Art des einzigen in Art. 130 als fundamental benutzten bilden: Man wählt in der Nullebene von A_1 von A_1 den Punkt A_2, darauf in dessen ihn und A_1 enthaltenden Nullebene A_2 den Punkt A_4 und seine durch ihn und A_2 gehende Nullebene A_4, endlich in ihrer Schnittlinie mit A_1 den Punkt A_3, dessen Nullebene A_2 dann durch ihn, A_1 und A_4 gehen muss. Macht man ein so gebildetes Tetraeder zum fundamentalen, so entsprechen den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 resp. die Ebenen A_4, A_3, A_2, A_1, somit die Kanten A_1A_2, A_2A_4, A_4A_3, A_3A_1 sich selbst und die Kanten A_1A_4, A_2A_3 ein-

ander; nach der angeführten Terminologie sind $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ Nullaxen in der Ebene $A_2 A_1 A_3$, wie $A_2 A_1$, $A_2 A_4$, sodann $A_3 A_4$, $A_3 A_1$ und $A_4 A_2$, $A_4 A_3$ in ihren Ebenen oder in den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 resp. In Folge des damit vorgeschriebenen Entsprechens der Fundamentalelemente werden die Gleichungen (1) der Reciprocität in Art. 127

$$m\xi_1' = \alpha_{14} x_4, \quad m\xi_2' = \alpha_{23} x_3, \quad m\xi_3' = \alpha_{32} x_2, \quad m\xi_4' = \alpha_{41} x_1,$$

und für das Nullsystem erhält man daher

$$(1) \quad m\xi_1' = \alpha_{14} x_4, \quad m\xi_2' = \alpha_{23} x_3, \quad m\xi_3' = -\alpha_{23} x_2, \quad m\xi_4' = -\alpha_{14} x_1$$

Dem Punkte y_i entspricht also die Ebene

$$\alpha_{14} y_4 x_1 + \alpha_{23} y_3 x_2 - \alpha_{23} y_2 x_3 - \alpha_{14} y_1 x_4 = 0$$

oder

$$(2) \qquad \alpha_{23}(y_3 x_2 - y_2 x_3) - \alpha_{14}(y_1 x_4 - y_4 x_1) = 0,$$

die ihn enthält und die Kanten $A_2 A_3$, $A_1 A_4$ resp. in den Punkten P_{23}, P_{14} mit den Doppelverhältnissen (Art. 52) schneidet,

$$(A_2 A_3 E_{23} P_{23}) = y_2 : y_3, \quad (A_4 A_1 E_{14} P_{14}) = y_4 : y_1.$$

Der Geraden p_{ik} zwischen zwei Punkten ist die Gerade $\pi_{ik}{}^*$ zwischen den entsprechenden Ebenen conjugirt und man findet

$$\pi_{12}{}^* = -\alpha_{23}\alpha_{14} p_{34} = p_{34}{}^*, \quad \pi_{23}{}^* = \alpha_{23}^2 p_{23} = p_{14}{}^*,$$
$$\pi_{31}{}^* = -\alpha_{23}\alpha_{14} p_{24} = p_{24}{}^*,$$
$$\pi_{14}{}^* = \alpha_{14}^2 p_{14} = p_{23}{}^*, \quad \pi_{24}{}^* = -\alpha_{23}\alpha_{14} p_{31} = p_{31}{}^*,$$
$$\pi_{34}{}^* = -\alpha_{23}\alpha_{14} p_{12} = p_{12}{}^*,$$

womit nach Art. 56 die Construction der conjugirten zu einer gegebenen Geraden verbunden ist. Man sieht auch, dass die Coordinatenverhältnisse $p_{12}{}^* : p_{12}$, $p_{31}{}^* : p_{31}$, $p_{24}{}^* : p_{24}$ und $p_{34}{}^* : p_{34}$ sämmtlich den Werth $-\alpha_{23}\alpha_{14}$ haben, während

$$p_{23}{}^* : p_{23} = \alpha_{14}^2 p_{14} : p_{23} \quad \text{und} \quad p_{14}{}^* : p_{14} = \alpha_{23}^2 p_{23} : p_{23}$$

sind, und erkennt also, dass auch sie den gleichen Werth erhalten, wenn man hat

$$(3) \qquad p_{23} : p_{14} = -\alpha_{14} : \alpha_{23} \quad \text{oder} \quad \alpha_{23} p_{23} + \alpha_{14} p_{14} = 0.$$

Die sich selbst conjugirten Geraden oder Nullaxen bilden also einen linearen Complex (Art. 58) von der Gleichung (3). Die Strahlen durch einen Punkt in seiner Nullebene und die

Strahlen in einer Ebene durch ihren Nullpunkt gehören ihm an. Unter derselben Bedingung schneidet die Gerade p_{ik} zwei im Nullsystem conjugirte Gerade, und wenn sie die eine schneidet und sich selbst conjugirt ist, auch die andere, so dass zwei Paare conjugirte Gerade eines Nullsystems stets zu einer Regelschaar eines Hyperboloids gehören. (Ibid. unter 3 und 5.)

Setzen wir A_1 als Anfangspunkt einer Cartesisch-Plücker'schen Coordinatenbestimmung mit A_2 als Richtung der Axe x, ξ, A_3 als Richtung der Axe der y, η und A_4 als Richtung der Axe der z, ζ, so entstehen aus den Gleichungen (1) die Gleichungen des Nullsystems

$$\xi' = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{14}} \frac{y}{z}, \quad \eta' = -\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{14}} \frac{x}{z}, \quad \zeta' = -\frac{1}{z},$$

so dass die Nullebene von (x_1, y_1, z_1) wird:

$$\alpha_{23}(y_1 x - x_1 y) - \alpha_{14}(z - z_1) = 0$$

oder wie oben

$$\alpha_{23} p_{23} + \alpha_{14} p_{14} = 0.$$

In allen solchen Cartesisch-Plücker'schen Tetraedern für dasselbe Nullsystem haben die z einerlei Richtung, weil diese der mit ihm gegebene Nullpunkt der unendlich fernen Ebene ist — man nennt sie Durchmesser des Nullsystems; die Richtungen von x und y sind die resp. Nullpunkte von xz und yz, die Stellung der Ebene xy ist die conjugirte Gerade der Axe z. Für xy als normal zur Richtung der Durchmesser wird die Axe z zur Axe des Nullsystems. Die Nullebene von x_1, y_1, z_1 enthält dann die von ihm ausgehende Normale zur Axe und macht mit der Ebene xy den Winkel α_1 mit

$$\tan \alpha_1 = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{14}} \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

oder seine Tangente ist dem besagten Abstand proportional. Zwei conjugirte Gerade gehören mit der Axe und der Normalstellung derselben zu einem hyperbolischen Paraboloid, sind also zu einer die Axenrichtung enthaltenden Ebene parallel und haben in Folge dessen die nämliche gemeinsame Normale mit der Axe. Die Folgen dieser einfachen Beziehungen lassen sich in der Aussage zusammenfassen, dass der Complex der Nullaxen bei jeder Drehung um seine Axe z und bei jeder Verschiebung längs derselben un-

geändert bleibt, weil dabei immer seine Strahlen nur mit andern ihm angehörenden zur Deckung kommen.

Das Nullsystem wird auch durch zwei Paare conjugirter Geraden in allgemeiner Lage (natürlich in derselben Regelschaar) bestimmt, weil die Nullebene eines Punktes die Verbindungsebene der durch ihn gehenden und der Nullpunkt einer Ebene der Schnittpunkt der in ihr liegenden Transversalen der beiden Paare ist. (Art. 58, B. unter 6.) Man erhält die Axe des Nullsystems aus ihnen als gemeinsame Normale n der beiden gemeinsamen Normalen n_1 und n_2 des ersten und des zweiten Paares conjugirter Geraden.

B. Man bilde die Gleichungen der entsprechenden im Nullsysteme zu den Flächen zweiter Classe in homogenen Coordinaten

$$a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + a_3 \xi_3^2 + a_4 \xi_4^2 = 0, \quad \text{resp.}$$
$$\varkappa \xi_1 \xi_3 = \xi_2 \xi_4 \quad \text{und} \quad \varkappa \xi_1 \xi_4 = \xi_2 \xi_3$$

und zu der in Plücker'schen Coordinaten

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 = 1.$$

134. Wir kommen zum Falle b) mit der symmetrischen Substitutionsdeterminante, wo die eine Ebene, die dem Punkte y_i nach beiden Auffassungen entspricht, die Gleichung hat

$$(\alpha_{12} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 + \alpha_{14} y_4) x_1 + (\alpha_{12} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3 + a_{24} y_4) x_2$$
$$+ (\alpha_{13} y_1 + \alpha_{23} y_2 + \alpha_{33} y_3 + \alpha_{34} y_4) x_3$$
$$+ (\alpha_{14} y_1 + \alpha_{24} y_2 + \alpha_{34} y_2 + \alpha_{44} y_4) x_4 = 0;$$

und der eine Punkt, der der Ebene η_i entspricht, nach den Gleichungen (1*), (2*) in Art. 127, weil nun auch die ersten Minoren der Substitutionsdeterminante A_{ik} und A_{ki} einander gleich sind, die Gleichung hat

$$(\mathsf{A}_{11} \eta_1 + \mathsf{A}_{12} \eta_2 + \mathsf{A}_{13} \eta_3 + \mathsf{A}_{14} \eta_4) \xi_1 + (\mathsf{A}_{12} \eta_1 + \mathsf{A}_{22} \eta_2 + \cdot \cdot) \xi_2$$
$$+ (\mathsf{A}_{13} \eta_1 + \cdots) \xi_3 + (\mathsf{A}_{14} \eta_1 + \cdots) \xi_4 = 0.$$

Man nennt die einem Punkte entsprechende Ebene seine Polarebene und den Punkt ihren Pol und sagt von den beiden Elementensystemen, sie stehen in Polarreciprocität oder bilden ein Polarsystem. Da die erhaltenen Gleichungen bilinear sind oder mit der Vertauschung der y_i mit den x_i und resp. der η_i mit den ξ_i sich nicht ändern, sondern nur nach den andern Ver-

änderlichen geordnet erscheinen, so gelten die Sätze: Wenn ein Punkt B in der Polarebene A von A liegt, so geht immer seine Polarebene B durch A, und wenn die Ebene B durch den Pol A der Ebene A geht, so liegt ihr Pol B in A (Art. 66). Man sagt auch, die Punkte y_i und x_i seien conjugirt, also dem Pol jeder Punkt seiner Polarebene, und ebenso die Ebenen η_i und ξ_i, also einer Ebene jede Ebene durch ihren Pol etc.; speciell die polaren Geraden: zur Verbindungsgeraden von zwei Punkten die Schnittgerade ihrer Polarebenen (Art. 66; 78, 1).

Wenn man die y_i den x_i gleichsetzt, so erhält man als Ort der Punkte, die in ihren Polarebenen liegen, die Fläche zweiter Ordnung

$$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + \alpha_{44}x_4^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \cdots + 2\alpha_{34}x_3x_4 = 0,$$

welche die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Punktcoordinaten x_i darstellt. Mit $\eta_i = \xi_i$ entsteht die Enveloppe jener Polarebenen in der Form

$$\mathsf{A}_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2\mathsf{A}_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots + 2\mathsf{A}_{34}\xi_3\xi_4 = 0,$$

der allgemeinen Gleichung in den Ebenencoordinaten ξ_i, die anstatt der Substitutionscoefficienten α_{ik} die zugehörigen ersten Minoren der Substitutionsdeterminante enthält; beide Flächen sind identisch (vergl. Art. 80), Ordnungs- oder Directrixfläche der Reciprocität. In Art. 130 und 131, 2 haben wir die Uebergänge zu Elementen der zugehörigen Polarsysteme bereits angezeigt bezüglich der Pol- und der Polarfläche bei der allgemeinen Reciprocität zweier Räume und bezüglich der Flächen zweiten Grades als Erzeugnisse der Verbindung reciproker Elementargebilde zweiter Stufe. Hier betrachten wir noch insbesondere die Polartetraeder.

Zu einem Punkte A_1 gehört als Polarebene eine Ebene A_1, zu einem Punkt A_2 in ihr eine durch A_1 gehende Polarebene A_2; wählen wir dann in der Schnittlinie von $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$ einen Punkt A_3, so geht seine Polarebene A_3 durch A_1A_2 und schneidet sich mit $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$ in einem Punkte A_4, der $A_1A_2A_3$ zur Polarebene hat. So ist ein Polartetraeder construirt worden, ein Tetraeder, in welchem Ecken und Gegenflächen vier Paare von Pol- und Polarebenen bilden und die Kanten in drei Paaren von gegenüberliegenden polare Gerade sind. Man sieht, dass es sechsfach unendlich viele Polartetraeder giebt, dass jeder Punkt Ecke von dreifach unendlich vielen ist, etc.

Wenn man ein solches Polartetraeder zum Fundamentaltetraeder der Coordinatenbestimmung wählt, so vereinfacht sich nach Art. 127, 2 die Substitution der Reciprocität zu

$$m\xi_i' = \alpha_{ii}x_i, \quad r\xi_k = \alpha_{kk}x_k,$$

alle Substitutionscoefficienten mit ungleichen Indices sind Null, die entsprechenden Minoren ebenso, während die $\mathsf{A}_{ii} = \alpha_{jj}\alpha_{kk}\alpha_{ll}$ werden. Mit Ersetzung der Doppelindices durch gleiche einfache werden die Polarebene von y_i und der Pol von η_i durch

$$\alpha_1 y_1 x_1 + \cdots + \alpha_4 y_4 x_4 = 0 \text{ respective } \mathsf{A}_1\eta_1\xi_1 + \cdots + \mathsf{A}_4\eta_4\xi_4 = 0$$

oder $$\alpha_1^{-1}\eta_1\xi_1 + \cdots + \alpha_4^{-1}\eta_4\xi_4 = 0$$

ausgedrückt und die Bedingung der Incidenz von Pol und Polarebene

$$\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_4 x_4^2 = 0 \text{ respective } \alpha_1^{-1}\xi_1^2 + \cdots + \alpha_4^{-1}\xi_4^2 = 0.$$

Bei gegebenem Polartetraeder wird die Reciprocität bestimmt durch Angabe eines Punktes und der ihm entsprechenden Ebene, aus deren bezüglichen Coordinaten man sofort die α_i erhält; nach den Vorzeichen der α_i unterscheiden sich die Formen der Flächen zweiten Grades — ihre Auffassung als Directrixflächen von Polarsystemen liefert nicht nur die reellen, sondern auch die imaginären oder nulltheiligen Flächen zweiten Grades.

Constructiv liefert die Ebene P und ihr Pol P auf jeder Fläche z. B. A_1 des Tetraeders zu dem in ihr liegenden Polardreieck ihres ebenen Polarsystems $A_2A_3A_4$ durch den Schnitt p_1 mit P und den Durchstosspunkt P_1 von A_1P in ihr das zur Bestimmung derselben noch nöthige Paar. (Vergl. „Kegelschnitte", Art. 399 f.) Man erhält den in A_1 liegenden Querschnitt der Directrixfläche als die Directrix dieses ebenen Polarsystems und diese durch die Doppelpunkte der Polinvolutionen auf zwei Seiten und die Doppelstrahlen der Polarinvolutionen an den Gegenecken des Dreiecks $A_2A_3A_4$ oder durch vier Punkte mit den zugehörigen Tangenten — wenn der Querschnitt reell ist. Natürlich folgt sein Mittelpunkt in jedem Falle als der Pol der unendlich fernen Geraden im bezeichneten Polarsystem, und findet man seine Axen als das rechtwinklige Paar der an ihm liegenden Polarinvolution seiner conjugirten Durchmesser (ibid. Art. 299). Endlich sind seine Brennpunkte die Doppelpunkte der Punktinvolutionen in den Axen, die durch p_1 und die zu ihr normale Gerade aus P_1 in

ihnen bestimmt werden (ibid. Art. 193). Für A_1 als Diametralebene resp. Hauptebene der Fläche und des Polarsystems ist A_1 die Richtung des conjugirten Durchmessers resp. der zugehörigen Hauptaxe und man erhält den Diametral- resp. den Hauptschnitt der Fläche: Construction aus drei conjugirten Durchmessern und einem Paar P, P von Pol und Polarebene.

B. 1. Die Richtungen und Stellungen von Durchmessern und zugehörigen conjugirten Diametralebenen einer Fläche zweiten Grades bilden das Polarsystem ihres Querschnittes mit der unendlich fernen Ebene. Im Fall der Kugel (Art. 123) nennt man es ein Orthogonalsystem, weil jeder Durchmesser auf der conjugirten Diametralebene normal ist. Da offenbar alle solche Bündel von Strahlen und Ebenen durch Parallelverschiebung zur Deckung kommen, so ist für alle Kugeln das zugehörige Polarsystem in der unendlich fernen Ebene dasselbe und sein Directrixkegelschnitt, der imaginäre Kreis in jener, gehört allen Kugeln an.

B. 2. Man wähle zu den drei Hauptebenen einer Fläche zweiten Grades den Punkt P und die zugehörige Polarebene P ihres Polarsystems so, dass sie wird a) ein reelles Ellipsoid, b) ein zweifaches Hyperboloid, c) ein einfaches Hyperboloid, d) ein imaginäres Ellipsoid. Durch collineare Umformung ist das auf die Bestimmung durch ein beliebiges Polartetraeder und ein Paar P, P zu übertragen. (Vergl. Art. 129, B. 3 f.)

B. 3. Die auf ein Polartetraeder bezogenen Gleichungen der Flächen zweiten Grades — wir schreiben sie durch entsprechende Verlegung des Einheitspunktes mit Coefficienten Eins (Art. 126, 2 Schluss) — zeigen die Typen (Art. 86 f.)

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

und gestatten alle die Zerlegungen, die wir in Art. 110 f. untersuchten. Beginnen wir mit dem zweiten und schreiben

$$(x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0,$$
$$\lambda (x_1 + ix_3) = x_2 + x_4, \quad x_1 - ix_3 = -\lambda (x_2 - x_4),$$
oder $$\mu (x_1 + ix_3) = x_2 - x_4, \quad x_1 - ix_3 = -\mu (x_2 + x_4),$$

so haben wir ein Vierseit von Geraden in der Fläche aus dem Schnitt von

$$x_1 \pm ix_3 = 0 \text{ mit } x_2 + x_4 = 0, \text{ resp. } x_2 - x_4 = 0,$$

also von zwei imaginären Ebenen durch $A_2 A_4$ und von zwei reellen durch $A_1 A_3$, mit imaginären Seiten, so dass $A_2 A_4$ in

zwei reellen und die polarconjugirte $A_2 A_3$ in zwei imaginären Punkten die Fläche trifft; und wir haben zwei zugehörige projectivische Büschel imaginärer Ebenen als die Fläche erzeugend: Jede ihrer Tangentialebenen schneidet sie in zwei imaginären Geraden, deren einziger reeller Punkt ihr Schnitt, der Berührungspunkt, ist; sie theilen sich in zwei zweifach unendliche Systeme und erzeugen die imaginären Punkte und Ebenen der Fläche.

Für den ersten Typus schreiben wir nun entweder wie Art. 110 f.

$$(x_1 + x_3)(x_1 - x_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0,$$
$$\lambda(x_1 + x_3) = x_2 + x_4, \quad x_1 - x_3 = -\lambda(x_2 - x_4), \text{ etc.}$$

oder neu

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) - (x_3 + ix_4)(x_3 - ix_4) = 0$$

und damit

$$\lambda(x_1 + ix_2) = x_3 + ix_4, \quad x_1 - ix_2 = \lambda(x_3 - ix_4)$$
$$\text{resp. } \mu(x_1 + ix_2) = x_3 - ix_4, \text{ etc.}$$

und haben ein Vierseit in der Fläche markirt aus den imaginären Ebenenpaaren $x_1 \pm ix_2 = 0$, $x_3 \pm ix_4 = 0$, etc., d. h. aus vier Geraden, welche weder einen reellen Punkt noch eine reelle Ebene haben und daher als rein imaginär bezeichnet werden (vergl. die Axen in Art. 132 (b) für imaginäre b); und von eben solchen Geraden wird die Fläche durch die projectivischen Büschel erfüllt; sie enthält also neben den reellen Geraden nur rein imaginäre Gerade, die Träger ihrer imaginären Punkte und Tangentialebenen. Damit ist auch der dritte Typus erledigt.

B. 4. Conjugirte rein imaginäre Gerade sind windschief. Aus den Coordinaten von zwei imaginären Ebenen $\eta + i\eta^*$, $\zeta + i\zeta^*$ bildet man die π_{12}, etc. proportional zu $\alpha_{12} + i\beta_{12}$ oder

$$\{\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 + \eta_2^*\zeta_1^* - \eta_1^*\zeta_2^*\} + i\{\eta_1^*\zeta_2 - \eta_2\zeta_1^* + \eta_1\zeta_2^* - \eta_2^*\zeta_1\}, \text{etc.}$$

Hier fordert $R = 0$ gleichzeitig

$$\Sigma\alpha_{ik}\alpha_{lm} = \Sigma\beta_{ik}\beta_{lm} \quad \text{und} \quad \Sigma\alpha_{ik}\beta_{lm} = 0.$$

Der Schnitt mit der conjugirt imaginären Geraden $\alpha_{12} - i\beta_{12}$, etc. verlangt die vorher gleichen Summen entgegengesetzt gleich, d. h. beide Null, was nach Art. 58, B. 2 die linearen Complexe mit den Coefficienten α resp. β zu speciellen macht.

Im allgemeinen Falle sagt $\Sigma\alpha_{ik}\beta_{lm} = 0$ aus, dass die bezüglichen linearen Complexe in Involution sind; nämlich von der Eigenschaft, dass die Nullpunkte derselben Ebene einer Geraden ihrer gemeinsamen Congruenz (und dual) eine Involution

bilden, deren Doppelelemente in den Axen der Congruenz liegen (vergl. die Axen in Art. 132 unter b). Nach dem Sinne dieser elliptischen Involution werden die conjugirten rein imaginären Geraden ebenso von einander getrennt, wie nach Art. 43, 96 der „Kegelschn.“ die übrigen conjugirt imaginären Elementenpaare.[25])

B. 5. Während bei reellen Projectivitäten reellen Elementen stets wieder solche entsprechen, müssen im Allgemeinen aus reellen imaginäre Elemente entspringen, wenn die zugehörige Substitution complexe Coefficienten hat. In Folge dessen können dann auch die drei Typen der Flächen zweiten Grades in einander übergeführt werden; wie z. B. der dritte in den zweiten durch $\mu x_i' = x_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $\mu x_4' = ix_4$. Die Fälle sind näher zu erläutern.

B. 6. Die ebene Abbildung der Kugel in Art. 124, B. 20, die nach der Erzeugung der Flächen zweiten Grades aus reciproken Bündeln in Art. 131 (vergl. B. 4) auf alle Flächen zweiten Grades übergehen muss, kann nach 5) auf das einfache Hyperboloid übertragen werden. Seine durch das Projectionscentrum gehenden Geraden g, l erscheinen als Punkte G, L und als Scheitel von Strahlbüscheln der Bilder der l und resp. g der Fläche; durch die dreifach unendlich vielen projectivischen Zuordnungen von diesen werden die Kegelschnitte erzeugt, welche die ebenen Querschnitte der Fläche abbilden, etc.

B. 7. Nachdem in den B. des Art. 129 die Flächen zweiten Grades als Collinearfiguren betrachtet sind, kann nun ihre collineare Transformation in sich selbst betrachtet werden, welche auf sechsfach unendlich viele Weise möglich sein muss, weil die allgemeine Collineation von fünfzehn, die allgemeine Fläche zweiten Grades von neun Coefficientenverhältnissen abhängt. Weil jede Gerade in der Fläche dabei wieder in eine Gerade der Fläche übergehen muss, so haben wir analytisch einfach die linearen Substitutionen für die Parameter der erzeugenden Ebenenbüschel (oder Reihen) (Art. 53, B. 5)

$$\lambda' = \frac{\alpha_1 \lambda + \alpha_2}{\beta_1 \lambda + \beta_2} \text{ resp. } \mu' = \frac{a_1 \lambda + a_2}{b_1 \lambda + b_2} \text{ oder } \lambda' = \frac{a_1' \mu + a_2'}{b_1' \mu + b_2'}, \text{ etc.}$$

bei deren erster jede Gerade der ersten wie zweiten Regelschaar in eine andere derselben Schaar übergeht — je zwei in jeder in sich selbst, also ein unverändertes windschiefes Vierseit in der Fläche — während bei der zweiten die Regelschaaren vertauscht werden. Die centrische involutorische Collineation (Art. 132, 1) mit Pol und Polarebene ist ein Fall der zweiten Art, die geschaart involutorische in 2) ibid. ein Fall der ersten; bei der

ersten kann insbesondere die eine Regelschaar unverändert bleiben ($\lambda' = \lambda$) und in der zweiten l_1 und l_2 sich selbst entsprechen, so dass wir geschaarte Collineation haben (Art. 129).

Die Ueberführung einer Fläche zweiten Grades in sich kann ebenso durch Reciprocität geschehen und insbesondere durch das Nullsystem oder den linearen Complex; man vergleiche die involutorischen Tetraeder in den Entwickelungen der Art. 131 u. 133.

B. 8. Der Schluss von 7) weist schon auf die enge Beziehung, welche die lineare Transformation des linearen Complexes in sich zu beiden Projectivitäten der Flächen zweiten Grades mit sich selbst haben wird. Im Allgemeinen bleiben auch hier vier Gerade fest, die ein Vierseit bilden.[26])

Wir bemerken endlich, dass jeder tetraedrale Complex in sich übergeht, wenn sein Haupttetraeder bleibt, weil er dann durch sein Doppelverhältniss allein bestimmt ist. In Bezug auf jenes hat seine Gleichung die Form

$$bp_{23}p_{14} + cp_{31}p_{24} = 0 \text{ oder auch } ap_{12}p_{34} + bp_{23}p_{14} + cp_{31}p_{24} = 0.$$

135. Indem jede feste reelle oder imaginäre Fläche zweiter Ordnung Σ den Raum zu einem bestimmten Polarsystem macht, d. h. jedem seiner Punkte eine seiner Ebenen als Polarebene und jeder seiner Ebenen einen seiner Punkte als Pol zuordnet, liefert sie auch zu jeder Verbindung von Ebenen, Punkten und Geraden, gleichviel ob in endlicher oder unendlich grosser Anzahl, d. h. also zu jeder Raumfigur eine entsprechende Figur, die Verbindung von ebenso vielen Punkten, Ebenen und Geraden, nämlich den Polen, Polarebenen und resp. polaren Geraden der ersten. Z. B. aus dem Hexaeder $f = 6$, $e = 8$, $k = 12$ ein Octaeder $e = 6$, $f = 8$, $k = 12$. Poncelet hat die Entwicklung dieser Zusammenhänge als die Theorie der reciproken Polaren bezeichnet.[27])

Einer Fläche S als einem Orte von Punkten entspricht daher im Allgemeinen eine Fläche S als Enveloppe von Ebenen.

Wenn wir in S einen Punkt betrachten, der einer gewissen Tangentialebene von S entspricht, so entspricht auch umgekehrt die Tangentialebene von S in diesem Punkte dem Berührungspunkte jener Tangentialebene von S. Denn die Tangentialebene von S enthält alle die Punkte der Fläche S, die dem angenommenen Punkte benachbart sind, und es muss ihr also der Punkt correspondiren, in dem sich alle die der angenommenen benachbarten Tangentialebenen von S schneiden, d. h. der Berührungs-

punkt dieser Ebene mit der Fläche. Die Tangenten der einen Fläche sind in Σ polar den bezüglichen Tangenten der andern.

So entspricht überhaupt jedem mit einer Fläche verbundenen Punkte eine mit der reciproken Fläche verbundene Ebene und umgekehrt; und einer Geraden als zwei Punkte verbindend entspricht eine Gerade als Durchschnitt von zwei Ebenen. In Folge dessen ist die Ordnung von S, als ausgedrückt durch die Zahl der Punkte, in denen eine Gerade diese Fläche schneidet, der Classe von S gleich, welche durch die Zahl der Tangentialebenen gegeben wird, die an S durch eine Gerade gehen. Die Reciprocalfläche einer Fläche zweiter Ordnung ist daher wieder eine Fläche zweiter Ordnung, weil nach Art. 76, B., 82 zwei Tangentialebenen durch eine beliebige Gerade an sie gehen. (Vgl. Art. 66.)

Sehr einfache Vorstellungen aus der Theorie der gewundenen Curven zeigen die allgemeinen Reciprocitätsverhältnisse dieser letzteren. Eine jede nicht ebene Curve kann als eine Reihe von Punkten betrachtet werden, die nach einem gewissen Gesetze stetig auf einander folgen; sie mögen durch 1, 2, 3, etc. bezeichnet sein als nach der Reihe der Zahlen geordnet. Aus der Verbindung jedes dieser Punkte mit dem nächstfolgenden entspringt eine Reihe von geraden Linien, welche durch 12, 23, 34, etc. zu bezeichnen sind; jede von ihnen ist eine Tangente der Curve. In ihrer Vereinigung bilden sie eine Fläche und zwar eine abwickelbare oder developpable Fläche (Anmerk. des Art. 115), weil jede von ihnen (wie 12) die nächstfolgende (23) durchschneidet. Wenn wir endlich die Ebenen 123, 234, etc. betrachten, von denen jede drei auf einander folgende Punkte enthält, so bilden sie eine Reihe von Ebenen, welche als die osculirenden Ebenen der Curve benannt werden und die zugleich Tangentenebenen der durch ihre Tangenten erzeugten abwickelbaren Fläche sind.

Die Bildung des reciproken Systems giebt uns an Stelle der Reihen von Punkten, Linien und Ebenen entsprechende Reihen von Ebenen, Linien und Punkten; die Reciprocalform einer Reihe von Punkten, einer Curve im Raume, ist daher eine Reihe von Ebenen, die eine developpable Fläche berühren.

Wenn die Curve jener Punkte ganz in einer Ebene enthalten ist, so gehen die Ebenen der Reciproken sämmtlich durch einen Punkt und bilden die Tangentenebenen einer Kegelfäche.

So bildet die Reihe der Punkte, welche zweien Oberflächen gemeinsam sind, eine gewundene Curve; reciprok wird von der Reihe der Tangentenebenen, welche zwei Oberflächen gemeinsam haben, eine abwickelbare Fläche berührt, welche beide Oberflächen umhüllt.

Der Schaar der durch einen Punkt gehenden Tangentenebenen einer Fläche entspricht die Reihe der in der correspondirenden Ebene liegenden Punkte der andern Fläche oder dem ebenen Schnitt der Fläche der Tangentenkegel ihrer Reciproken. Es ergiebt sich auch leicht, dass einem Punkte und seiner Polarebene in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung eine Ebene und ihr Pol in Bezug auf die reciproke Fläche entsprechen.

136. Die Reciproken werden oft in Bezug auf eine feste Kugel gebildet, deren Centrum dann der Ursprung der Reciprocität heisst, und wie in Art. 405 der „Kegelschn." erörtert, kann auch hier die Erwähnung der Kugel unterlassen und von den Reciprocalformen als in Bezug auf einen gewissen Ursprung gebildet gesprochen werden. Diesem Ursprung entspricht selbst die unendlich ferne Ebene und dem Querschnitt der einen Fläche in der letztern Ebene entspricht der Tangentenkegel, der vom Ursprung aus an die andere zu ihr reciproke geht. Wenn also der Ursprung ausserhalb einer Fläche zweiten Grades liegt, d. h. wenn von ihm aus an dieselbe reelle Tangentialebenen gehen, so hat die Reciprocalfläche reelle Punkte im Unendlichen oder sie ist ein Hyperboloid; wenn der Ursprung im Innern der Fläche liegt, so ist die Reciproke ein Ellipsoid; wenn er der Fläche selbst angehört, so wird die Reciprocalfläche von der unendlich fernen Ebene berührt, oder sie ist ein Paraboloid.

Die Reciproke einer Regelfläche, d. i. einer durch Bewegung einer geraden Linie erzeugten Fläche, ist wieder eine Regelfläche, da einer geraden Linie eine gerade Linie und der durch Bewegung einer Geraden erzeugten Originalfläche die durch Bewegung der Reciprocallinie entstehende Fläche entspricht*). Dem einfachen Hyper-

*) Cayley hat bemerkt, dass der Grad einer Regelfläche immer dem Grade ihrer Reciprocalfläche gleich sein muss. Der Grad der Reciprocalfläche ist der Zahl von Tangentenebenen gleich, welche durch eine willkürliche Gerade gehen. Nun werden wir in Bd. 2 formell beweisen, es ist aber an sich hinreichend offenbar (vergl. auch Art. 113), dass die Tangentenebene in einem beliebigen Punkte einer Regelfläche die erzeugende Gerade enthält, welche durch diesen Punkt geht. Daher

boloid entspricht daher stets wieder ein einfaches Hyperboloid, so lange der Ursprung nicht in der Fläche liegt, und wenn dies der Fall ist, so ist die Reciprocalfläche ein hyperbolisches Paraboloid.

137. Wenn die Reciproken in Bezug auf eine Kugel gebildet werden, so ist jede Ebene zu der geraden Linie normal, die den ihr entsprechenden Punkt mit dem Ursprung verbindet. So entspricht jedem Kegel eine ebene Curve und der mit dem Ursprung als Spitze über dieser letzteren gebildete neue Kegel hat normal zu jeder Tangentialebene des ersten Kegels eine Erzeugende und umgekehrt. Man nennt im Allgemeinen zwei Kegel — gleichgültig ob von gemeinsamem Scheitel oder nicht — reciprocal, wenn jede Erzeugende des einen normal ist zu einer Tangentialebene des andern. (Vergl. Beisp. 17 des Art. 124.) Aus dem letzten Art. ergiebt sich beispielsweise, dass der Tangentenkegel einer Fläche aus dem Ursprung in diesem Sinne reciprok ist dem Asymptotenkegel der Reciprocalfläche.

Die Schnitte von zwei reciproken Kegeln von einerlei Scheitel mit einer Ebene sind polarreciprok in Bezug auf den Fusspunkt der Normalen vom gemeinschaftlichen Scheitel auf diese Ebene. Denn für P als den Schnittpunkt der Ebene mit einer Erzeugenden des ersten Kegels und QR als ihre Schnittlinie mit der zu ihr normalen Tangentialebene des andern Kegels, sowie M als Fusspunkt der Normale vom Scheitel O der Kegel auf die Ebene ist offenbar PM normal zu QR, und für S als Schnittpunkt von PM und QR ist POS ein bei O rechtwinkliges Dreieck und somit $PM \cdot MS$ dem constanten $\overline{OM}^2$ gleich. Die Ortscurve von P ist daher identisch mit derjenigen, welche entsteht, wenn man in der von M auf die Tangente QR gefällten Normalen ein dem Reciproken ihrer Länge gleiches Stück abträgt.

Das Folgende erläutert die Anwendung des hiermit begründeten Princips: Durch den Scheitel jedes Kegels vom zweiten Grade gehen zwei als Focallinien benannte Gerade von der Eigenschaft, dass jeder Schnitt des Kegels durch eine Ebene, die zu einer derselben normal ist, den Fusspunkt dieser letztern zum Brennpunkte hat. Denn indem

ist der Grad der Reciprocalfläche der Zahl von Erzeugenden gleich, welche eine willkürliche Gerade schneiden. Und dies ist genau dieselbe Zahl, wie die der Punkte, in denen die Gerade die Fläche schneidet, weil jeder Punkt einer Erzeugenden der Fläche angehört.

wir den Reciprocalkegel des gegebenen durch die Normalen seiner Tangentialebenen aus der Spitze bilden, und die beiden Ebenen der Kreisschnitte betrachten, die derselbe nach Art. 106 besitzt, so erkennen wir nach dem gegenwärtigen Art., dass der Schnitt des gegebenen Kegels mit einer Ebene, die zu einer von diesen parallel ist, ein Kegelschnitt sein muss, der den Fusspunkt ihrer Normale aus dem Scheitel zum Brennpunkte hat. Das eben Bewiesene kann auch dahin ausgesprochen werden, dass die Focallinien eines Kegels zu den Kreischnittebenen des Reciprocalkegels normal sind.

138. Die Reciprocalfläche einer Kugel in Bezug auf irgend einen Punkt ist eine Umdrehungsfläche, die durch Drehung eines Kegelschnittes um die transversale Axe erzeugt wird. Dies kann ähnlich wie das Entsprechende in Art. 406 der „Kegelschn." bewiesen werden.

Wenn wir zwei beliebige Punkte A, B betrachten, so sind ihre Entfernungen vom Ursprung in dem nämlichen Verhältnisse wie die Normalen, welche von jedem auf die dem andern entsprechende Ebene gefällt werden. („Kegelschn." Art. 117. Schluss.) Da nun die Entfernung des Centrums einer festen Kugel vom Ursprung und die vom Centrum auf die Tangentenebene derselben gefällte Normale beide constant sind, so muss für jeden Punkt der Reciprocalfläche die Entfernung vom Ursprung zu der von ihm auf eine feste, nämlich die dem Centrum der Kugel entsprechende Ebene gefällten Normalen in einem constanten Verhältniss sein. Der Ort des Punktes ist eine Umdrehungsfläche, für welche der Ursprung ein Focalpunkt und die fragliche Ebene eine Directrixebene ist. (Vergl. Art. 160, 170.)

Durch die Methode der Reciprocität gelangen wir daher von Eigenschaften der Kugel zu Eigenschaften von Umdrehungsflächen um die transversale Axe. Indem wir Beispiele geben, stellen wir links Eigenschaften der Kugel, rechts die correspondirenden Eigenschaften der Umdrehungsflächen.

B. 1. Eine Tangentenebene einer Kugelfläche ist normal zu der geraden Linie, die ihren Berührungspunkt mit dem Centrum verbindet.	Die gerade Verbindungslinie eines Focalpunktes mit irgend einem Punkte der Fläche ist normal zu der Ebene, welche durch den Focalpunkt und die Durchschnittslinie der entsprechenden Directrixebene mit der Tangentenebene des Punktes bestimmt ist.

B. 2. Jeder Tangentenkegel einer Kugel ist ein gerader Kegel, dessen Tangentenebenen mit der Ebene der Berührungscurve gleiche Winkel bilden.

Der Kegel, dessen Scheitel ein Focalpunkt und dessen Basis ein ebener Schnitt einer Umdrehungsfläche ist, ist ein gerader Kegel, welcher die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Pol der Schnittebene zur Axe hat.

Es ist ein specieller Fall dieses letzten Satzes, dass jeder ebene Schnitt eines Umdrehungsparaboloids auf die Tangentenebene in seinem Scheitel sich als ein Kreis orthogonal projicirt.

B. 3. Jede Ebene ist normal zu der geraden Linie, welche das Centrum mit ihrem Pole verbindet.

Die gerade Verbindungslinie eines beliebigen Punktes mit einem Focalpunkte ist normal zu der Ebene, welche durch diesen Focalpunkt und dieDurchschnittslinie der entsprechenden Directrixebene mit der Polarebene des Punktes bestimmt ist.

B. 4. Jede Ebene durch das Centrum ist normal zu dem ihr conjugirten Durchmesser.

Jede Ebene durch einen Focalpunkt ist normal zu der geraden Linie von ihm zu ihrem Pol.

B. 5. Jeder Kegel, der einen ebenen Schnitt der Kugel zur Basis hat, hat zur Ebene desselben parallele Kreisschnitte.

Die Focallinien eines Tangentenkegels der Umdrehungsfläche sind die geraden Linien, welche seinen Scheitel mit den beiden Focalpunkten verbinden.

B. 6. Jeder Cylinder, welcher eine Kugel umhüllt, ist gerade.

Jeder durch einen Focalpunkt gehende ebene Schnitt hat diesen zum einen Brennpunkt.

B. 7. Irgend zwei für die Kugel zu einander polare (vergl. Art. 65) gerade Linien sind rechtwinklig zu einander.

Die Ebenen, welche von zwei einander polaren geraden Linien mit einem Focalpunkte bestimmt werden, sind normal zu einander.

B. 8. Jede eine Kugel umhüllende Fläche zweiten Grades ist eine Umdrehungsfläche und ihr Asymptotenkegel daher ein gerader Kegel.

Wenn eine Fläche zweiten Grades eine Umdrehungsfläche umhüllt, so ist ein Tangentenkegel der ersten, dessen Scheitel ein Focalpunkt der letzten ist, ein Umdrehungskegel.

B. 9. Man bilde den polarreciproken Satz zu dem des Art. 95 von der Kugel, welche der Ort der Punkte ist, von welchen an eine Fläche zweiten Grades Tripel zu einander rechtwinkliger Tangentialebenen geben.

139. Die Reciproke einer centrischen Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen beliebigen Punkt kann auch nach Analogie der für Kegelschnitte angewendeten Methode (vergl. „Kegelschn." Art. 413) ausgedrückt werden. Denn die Länge der von irgend einem Punkte auf die Tangentenebene gefällten Normalen ist nach Art. 91

$$p = \frac{k^2}{\varrho} = \sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)} - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)$$

und daher die Gleichung der Reciprocalfläche

$$(xx' + yy' + zz' + k^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

So hat die Reciprocalfläche in Bezug auf das Centrum die Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = k^4,$$

d. h. sie ist eine Fläche zweiten Grades, deren Axen die Reciproken der Axen der gegebenen Fläche sind.

Wir haben im 16. Beisp. des Art. 124 die Methode angegeben, nach welcher die Gleichung der Reciproken einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf eine andere allgemein gebildet wird. Und wir erhalten insbesondere die Reciprocalfläche in Bezug auf die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$ durch Substitution von $x, y, z, -k^2$ für $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ in die Gleichung des Art. 80 in Ebenencoordinaten; oder mehr symmetrisch, diese letzte Gleichung selbst kann als die Gleichung der Reciproken in Bezug auf die Fläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ betrachtet werden.

Die Reciproke von der Reciproken einer Fläche ist nothwendig diese Fläche selbst, so auch für die Fläche zweiten Grades, wie schon im Art. 80 in allgemeinster Form bewiesen ward.

Das Princip der Dualität ist von der Methode der reciproken Polaren unabhängig in den früheren Entwickelungen begründet, wonach alle unsere Gleichungen eine zweifache geometrische Interpretation gestatten, so dass sie als Gleichungen in Ebenencoordinaten ξ_i interpretirt die reciproken oder dualen Sätze sammt Beweisen zu denen liefern, welche nach der Interpretation in Punktcoordinaten x_i in ihnen enthalten sind.

Es erscheint unnöthig, weitere Beispiele dafür zu geben, wie alle die vorhergehenden Untersuchungen den entsprechenden Gleichungen in Ebenencoordinaten angepasst werden können.

IX. Kapitel.

Methoden der abgekürzten Bezeichnung oder Symbolik.

140. In den Art. 35, 40, 47 und wieder 50 f. sind für die linken Seiten der Gleichungen von Ebenen Symbole L, M etc. zur Abkürzung verwendet worden, in Art. 60, 76, 84 ward das Symbol U für die linke Seite der allgemeinen homogenen Gleichung zweiten Grades gebraucht, um damit U_i als halbes Differential derselben nach der Veränderlichen x_i und U' etc. als das Resultat der Substitution von x_i' statt x_i zu bezeichnen. In Beisp. 11 Art. 124 sind die Polynome der Gleichungen von zwei Flächen als U, V bezeichnet worden und es ist auch gesagt, dass man nach dem Princip der Dualität dieselben Symbole als homogene Polynome ersten bezüglich zweiten Grades etc. in Ebenencoordinaten ξ_i ebensowohl auffassen dürfe, wie als solche in Punktcoordinaten x_i. In den folgenden Betrachtungen wird das Gleiche vorausgesetzt und sind oft die Ergebnisse beider Interpretationen nebeneinander gestellt. [28])

Als erste Anwendung sei die Erzeugung der reellen Flächen zweiten Grades aus Art. 131 wieder betrachtet.

a) Wenn $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ lineare Gleichungen in den Coordinaten x_i oder ξ_i sind, so bezeichnet

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0$$

alle Ebenen durch ihren Schnittpunkt resp. alle Punkte ihrer Verbindungsebene; analoge Bedeutung habe

$$\lambda_1 L_1 + \mu_1 M_1 + \nu_1 N_1 = 0.$$

Besteht dann zwischen den beiderseitigen Parametern $\lambda, ..$ und $\lambda_1, ..$ eine bilineare Relation

$$(a\lambda + b\mu + c\nu)\lambda_1 + (d\lambda + e\mu + f\nu)\mu_1 + (g\lambda + h\mu + k\nu)\nu_1 = 0,$$

so werden durch sie zwei Werthegruppen λ', .. und λ'', .. der λ, μ, ν einer Werthegruppe der λ_1, μ_1, ν_1 zugeordnet und man findet die Gleichung der erzeugten Fläche zweiten Grades durch genau dieselbe Eliminationsrechnung wie in Art. 131 in der Form

$$L \begin{vmatrix} L_1, & b, & c \\ M_1, & e, & f \\ N_1, & h, & k \end{vmatrix} + M \begin{vmatrix} a, & L_1, & c \\ d, & M_1, & f \\ g, & N_1, & k \end{vmatrix} + N \begin{vmatrix} a, & b, & L_1 \\ d, & e, & M_1 \\ g, & h, & N_1 \end{vmatrix} = 0$$

für zwei erzeugende Bündel oder Ebenen von allgemeiner Lage.

Sie geht in

$$A_{11}LL_1 + A_{21}LM_1 + A_{31}LN_1 + A_{12}ML_1 + A_{22}MM_1 + A_{32}MN_1 + A_{13}NL_1 + A_{23}NM_1 + A_{33}NN_1 = 0$$

über, wenn man die Minoren der Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & k \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

mit A_{11}, A_{12}, etc. bezeichnet. Man zeigt leicht, das dies der Schreibart der reciproken Bündel etc. in der Form

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0, \quad \frac{L_1}{\lambda_1} = \frac{M_1}{\mu_1} = \frac{N_1}{\nu_1}$$

mit der linearen Substitution

$$k\lambda = a_{11}\lambda_1 + a_{12}\mu_1 + a_{13}\nu_1, \quad k\mu = a_{21}\lambda_1 + a_{22}\mu_1 + a_{23}\nu_1, \quad k\nu = a_{31}\lambda_1 + a_{32}\mu_1 + a_{33}\nu_1$$

entspricht.

b) Aber es ergiebt sich eine weitere Bedeutung der gewonnenen Gleichung, indem wir die $L, \ldots, N_1$ als lineare homogene Functionen der Strahlencoordinaten p_{ik} oder π_{ik} interpretiren; dann ist die linke Seite der Endgleichung eine homogene Function zweiten Grades in denselben Variabeln und stellt also durch ihr Verschwinden einen Strahlencomplex zweiten Grades dar (Art. 58); sie enthält überschüssige Coefficienten und ist daher geeignet, jeden Complex zweiten Grades auszudrücken. Durch Erläuterung der geometrischen Bedeutung der Grundgleichungen

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1 L_1 + \mu_1 M_1 + \nu_1 N_1 = 0$$

wird ihr geometrischer Sinn erhellt. Diese repräsentiren Bündel (Art. 35) von linearen Complexen, von denen jeder durch zwei willkürliche Gerade des Raumes bestimmt ist, weil durch diese die Verhältnisse der Parameter λ, μ, ν geliefert werden, während sie alle die hyperboloidische Regelschaar gemein haben, welche nach Art. 58, B. unter (3) drei linearen Complexen wie $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ und $L_1 = 0$, etc. gemeinsam ist. Die Construction des durch zwei Gerade individualisirten linearen Complexes zu einer Regelschaar giebt der Schluss des B. desselben Art. unter (7). Und wenn nach der bilinearen Relation zwei linearen Complexen vom ersten Bündel ein linearer Complex des zweiten Bündels entspricht (Art. 58, B. unter 8), so erkennen wir als das diesen Gemeinsame oder als das Element des Erzeugnisses wiederum eine Regelschaar zweiten Grades. Sodass der Complex zweiten Grades aus zweifach unendlich vielen hyperboloidischen Regelschaaren in ähnlicher Weise zusammengesetzt ist, wie eine Fläche zweiten Grades aus zweifach unendlich vielen Punkten und Tangentialebenen; die paraboloidischen unter ihnen insbesondere haben Richtungsebenen, die einen Kegel zweiten Grades umhüllen, etc. Der Complex aus zwei collinearen Räumen (Art. 129) bietet einen Specialfall dar; ihre entsprechenden Gebilde erster Stufe erzeugen jene Regelschaaren, aber diese enthalten alle die vier sich selbst entsprechenden Punkte und Ebenen der Räume. (Vergl. ferner den Complex der harmonischen Secanten $\pi = 0$ in Art. 217 und 241, die Bemerkungen über die Flächen zweiten Grades als Complexe rücksichtlich ihrer Tangenten (Art. 81 f. und 216, 6.)

141. Die collinearen Elementargebilde zweiter Stufe lassen sich in gleicher Art behandeln und liefern uns zugleich in allgemeiner Form das wichtigste Beispiel zu den in Art. 135 durch die Polarreciprocität begründeten Anschauungen von den gewundenen Curven und den developpabeln Flächen.

Zwei collineare Ebenenbündel an verschiedenen Scheiteln erzeugen als die Gesammtheit der Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen eine Congruenz von Strahlen, von welcher durch jeden Punkt des Raumes ein Strahl geht und in jeder Ebene drei Strahlen liegen; und sie erzeugen als Ort der Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen eine gewundene Curve dritter Ordnung,[29]) welche die Strahlen der besagten Congruenz zu Bisecanten (d. i. zweimal schneidenden eventuell

berührenden Geraden hat. Zunächst geometrisch: Jede Ebene E des Bündels vom Scheitel S bringt mit der entsprechenden E′ des Bündels S' einen Strahl der Congruenz hervor; um den durch einen Punkt P gehenden zu finden, nimmt man den dem Strahl SP des ersten entsprechenden Strahl des zweiten Bündels und bestimmt zu der ihn mit P verbindenden Ebene die entsprechende im Büschel um SP — sie schneidet die vorige in dem durch P gehenden Strahle der Congruenz.

Die drei in einer beliebigen Ebene gelegenen Strahlen sind die Verbindungsgeraden der drei Punkte, welche in den durch den Schnitt der collinearen Bündel mit ihr entstehenden zwei collinearen Systemen sich selbst entsprechen (vergl. Art. 129 mit den a_{i4} gleich Null); in jeder Ebene liegen somit drei Punkte, in welchen sich entsprechende Strahlen der collinearen Bündel S und S' schneiden, und es ist einer von ihnen nothwendig reell, während die beiden andern conjugirt imaginär sein können — so dass ihre Verbindungsgerade stets reell ist. Dass die aus den sich schneidenden Strahlenpaaren der Bündel entstehende Curve von der dritten Ordnung ist, ergiebt sich weiter auch so: Irgend zwei entsprechende Strahlen der Bündel wie a, a' oder b, b' etc. sind Träger zweier projectivischer Büschel entsprechender Ebenen derselben und der Ort der Schnittlinien ihrer entsprechenden Paare ist je eine hyperboloidische Regelschaar H_a, H_b etc. mit den schneidenden Geraden der andern a, a' resp. b, b' etc. Irgend zwei solche einfache Hyperboloide H_a, H_b haben die Schnittlinie der durch die Scheitelkanten ihrer erzeugenden Büschel bestimmten entsprechenden Ebenen ab, $a'b'$ zur gemeinsamen Geraden und durchdringen sich daher noch in einer gewundenen Curve dritter Ordnung, in welcher sonach jeder Punkt P zugleich der Schnitt zweier entsprechenden Ebenen aP und $a'P$ und der zweier entsprechenden Ebenen bP und $b'P$, also der Schnitt zweier entsprechenden Strahlen der Bündel und somit auch Schnitt entsprechender Ebenenpaare aller ihrer andern entsprechenden Ebenenbüschel ist. Die gewundene Curve ist allen diesen Hyperboloiden gemein und irgend zwei von ihnen haben ausser ihr eine ihrer Bisecanten gemein; denn jede Schnittlinie von zwei entsprechenden Ebenen der Bündel schneidet die Curve in den zwei Punkten, welche in den von den zugehörigen projectivischen Strahlenbüscheln in ihr gebildeten vereinigten projectivischen Reihen sich selbst entsprechen. Betrachtet man

insbesondere die dem gemeinsamen Strahle SS' oder o, p' der Büschel entsprechenden Strahlen o' und p, offenbar die Tangenten der gewundenen Curve in S' und S, so erkennt man, dass die zugehörigen Hyperboloide H_o und H_p Kegel zweiten Grades aus S, S' als Spitzen sind, die projicirenden Kegel der Curve aus ihren Punkten S, S' — mit der gemeinsamen Mantellinie SS'.

Und dualistisch entsprechend: Zwei collineare Ebenen Σ, Σ' erzeugen durch die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punktepaare eine Strahlencongruenz, von der durch jeden Punkt drei Strahlen gehen — nämlich die sich selbst entsprechenden Strahlen der zwei collinearen Bündel, durch die sie von ihm aus projicirt werden — und in jeder Ebene Π ein Strahl liegt — nämlich für s als ihre Schnittlinie in Σ und s' als die entsprechende Gerade in Σ' der Strahl der Regelschaar H_s, der in Π liegt. Diese Congruenz setzt sich überhaupt aus allen den hyperboloidischen Regelschaaren H_a, H_b etc. zusammen, welche die entsprechenden Geraden a, a' etc. der Ebenen Σ, Σ' als Gesammtheiten der Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punktepaare erzeugen.

Sie erzeugen überdies als Enveloppe der Verbindungsebenen entsprechender und zugleich sich schneidender Strahlenpaare eine Developpable dritter Classe, weil je zwei jener Hyperboloide wie H_a und H_b eine gemeinsame Gerade von ab nach $a'b'$ und alle durch sie gehenden Ebenen zu gemeinsamen Tangentialebenen haben, während alle ihre übrigen gemeinsamen Tangentialebenen auch jedes andere Hyperboloid H_x berühren. Betrachtet man wieder die Punktreihe in der Schnittlinie o, p' der Ebenen Σ, Σ' und die entsprechenden Reihen o' in Σ' und p in Σ, so entstehen aus ihnen die Regelschaaren H_o, H_p als Tangenten zweier Kegelschnitte in Σ und Σ', welche ihre Schnittlinie berühren und deren gemeinsame Tangentialebenen die Ebenen der Developpablen dritter Classe sind; die Strahlen der Congruenz bilden die Gesammtheit der Bitangenten dieser Fläche.

Man sieht, dass hier in irgend zwei Ebenen der Developpabeln durch die Schnitte mit den Bitangenten derselben collineare Punktsysteme bestimmt werden, wie an irgend zwei Punkten der Curve dritter Ordnung durch die Verbindungsebenen mit ihren Bisecanten collineare Ebenenbündel; demnach auch in irgend zwei Bitangenten durch ihre Schnitte mit den sämmtlichen Ebenen

der Developpabeln projectivische Reihen und aus irgend zwei Bisecanten durch ihre Verbindungsebenen mit den sämmtlichen Punkten der Curve dritter Ordnung projectivische Ebenenbüschel.

B. 1. Wenn die vier Flächen eines Tetraeders durch feste Gerade gehen und drei seiner Ecken sich in festen Geraden bewegen, so ist der Ort der letzten Ecke eine gewundene Curve dritter Ordnung. Denn eine Anzahl von Lagen der Basis schneidet die letzten drei Geraden in projectivischen Reihen und der Scheitel ist folglich der Schnitt von entsprechenden Ebenen in projectivischen Büscheln.

B. 2. Die Curve dritter Ordnung wird aus allen ihren Punkten durch Kegel zweiten Grades projicirt; die developpable Fläche dritter Classe von allen ihren Ebenen in Kegelschnitten geschnitten. Jene ist durch sechs Punkte bestimmt, weil jeder derselben mit den fünf andern fünf Mantellinien eines Kegels vom zweiten Grade liefert; ebenso diese durch sechs ihrer Ebenen, etc.

Ein siebentes Element (Punkt resp. Ebene) ist mit den sechs bestimmenden durch die dualen Sätze verbunden: Die Durchschnittslinien der Ebenen 712, 745; 723, 756; 734, 761 liegen in einer Ebene. Und wenn dies für zwei der sieben Punkte wahr ist, so gilt es für jede zwei derselben. Wenn einer derselben variirt, so dreht sich die besagte Ebene um eine Bisecante. Die Verbindungslinien der Punkte 712, 745; 723, 756; 734, 761 für sieben Ebenen einer Developpablen dritter Classe gehen durch einen Punkt, etc.

B. 3. Wenn man die Punkte in einer Geraden mit den ihnen projectivisch entsprechenden Geraden einer Regelschaar (oder Tangenten eines Kegelschnittes nicht in derselben Ebene mit ihr) durch Ebenen verbindet, so bilden diese eine Developpable dritter Classe, und dual.

B. 4. Drei Punkte und drei Bisecanten resp. zwei Punkte und vier Bisecanten der Curve dritter Ordnung bestimmen sie — weil jene mit je zweien der Bisecanten ein einfaches Hyperboloid bestimmen, das sie enthält und diese mit den vier Bisecanten zwei collineare Bündel, die sie erzeugen; etc., und dual.

B. 5. Die gewundene Curve dritter Ordnung wird von irgend einem Punkte auf irgend eine Ebene in eine Curve dritter Ordnung projicirt. Da eine solche drei Inflexionspunkte in gerader Linie hat und die Inflexionspunkte die Bilder der drei Punkte der gewundenen Curve sind, deren Schmiegungsebenen das Projectionscentrum enthalten, so folgt, dass irgend drei Punkte der Curve mit dem Schnittpunkte ihrer Schmiegungsebenen in einer

Ebene liegen. (Vergl. weiter „Höhere Curven“ Art. 216.) Man deute die Realität aller drei Inflexionspunkte der ebenen Curve, wenn ihr Doppelpunkt isolirt ist, und die nur eines Inflexionspunktes bei einem Knotenpunkte für die gewundene Curve dritter Ordnung.

B. 6. Die Spur der Developpablen dritter Classe in irgend einer Ebene ist eine Curve vierter Ordnung mit drei Rückkehrpunkten; ihre zu diesen gehörigen Rückkehrtangenten schneiden sich einem Punkte, der die in der Ebene liegende Bitangente zur harmonischen Polare in Bezug auf das Dreieck der Rückkehrpunkte hat.

142. Die algebraische Ausdrucksform führt ebenso leicht zu allen diesen Ergebnissen. Für L, M, N und L_1, M_1, N_1 als in den Coordinaten x_i resp. ξ_i lineare homogene Polynome sind

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0, \quad \lambda_1 L_1 + \mu_1 M_1 + \nu_1 N_1 = 0 \quad \text{(Art. 35)}$$

die Gleichungen entsprechender Ebenen von zwei collinearen Bündeln resp. entsprechender Punkte von zwei collinearen Ebenen, wenn zwischen ihren Parametern λ, μ, ν, λ_1, etc. die linearen Relationen bestehen (Art. 124, 4)

$$k\lambda_1 = a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu, \quad k\mu_1 = a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu,$$
$$k\nu_1 = a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}\nu;$$

und wir wissen, dass für das directe Entsprechen der Fundamentalebenen $L = 0$, $L_1 = 0$ etc. und der zugehörigen Einheitelemente (Art. 52) diese Relationen einfach zur Gleichheit der entsprechenden Parameter werden,

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \mu_1 = \mu, \quad \nu_1 = \nu.$$

Dann führt die Elimination der Parameter zu dem Systeme von Determinanten

$$\left\| \begin{matrix} L, & M, & N \\ L_1, & M_1, & N_1 \end{matrix} \right\| = 0$$

oder zu den Gleichungen von drei einfachen Hyperboloiden

$$LM_1 - L_1 M = 0, \quad MN_1 - M_1 N = 0, \quad NL_1 - N_1 L = 0,$$

welche für die Interpretation in Punktcoordinaten in Paaren drei gerade Linien als Reihen, nämlich

$$M = 0, \ M_1 = 0; \quad N = 0, \ N_1 = 0 \quad \text{und} \quad L = 0, \ L_1 = 0$$

und eine allen gemeinsame Curve dritter Ordnung darstellen, die diese zu Bisecanten hat; und für die Interpretation in Ebenen-

coordinaten ebenso in Paaren drei Gerade als Ebenenbüschel und zu dreien oder gemeinsam eine entwickelbare Fläche dritter Classe, von der jene Bitangenten sind. Denn jene Gleichungen zeigen die Entstehung der drei Hyperboloide aus den Paaren von projectivischen Elementargebilden erster Stufe an

$$L + \varkappa L_1 = 0,\ M + \varkappa M_1 = 0;\ M + \varkappa M_1 = 0,\ N + \varkappa N_1 = 0;$$
$$N + \varkappa N_1 = 0,\ L + \varkappa L_1 = 0.$$

Wir heben nun zuerst hervor, wie die unendlich vielen Erzeugungen der gewundenen Curve dritter Ordnung z. B., die wir in Art. 141 kennen lernten, Folge der Eigenschaft der Determinanten sind, wornach sie nicht geändert werden durch Addition der mit willkürlichen Constanten muliplicirten entsprechenden Elemente ihrer Horizontalreihen resp. Verticalreihen zu ihren Elementen; ganz wie bei den Erzeugungen eines Kegelschnittes aus projectivischen Gebilden erster Stufe („Kegelschnitte" Art. 291). Deshalb wird das Bisecantensystem der Curve aus zwei collinearen Bündeln S, S' aus jedem ihrer Punkte durch ein zu den Bündeln S und S' collineares Bündel projicirt, oder es wird durch die Paare aus unendlich vielen collinearen Bündeln erzeugt, deren Scheitel in der Curve liegen — ein Büschel von collinearen Bündeln. Und ebenso durch die zweifach unendlich vielen projectivischen Ebenenbüschel aus ihren Bisecanten.

Die Curve ist allen Flächen des linearen Systems zweiter Stufe

$$\lambda_1(MN_1 - M_1N) + \lambda_2(NL_1 - N_1L) + \lambda_3(LM_1 - L_1M) = 0$$

gemein; die Fläche λ_1, λ_2, λ_3 hat mit einer beliebigen andern Fläche λ_i' desselben die Gerade von den Gleichungen

$$(\lambda_2\lambda_3' - \lambda_3\lambda_2')L + (\lambda_3\lambda_1' - \lambda_1\lambda_3')M + (\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1')N = 0,$$
$$(\quad . \quad . \quad . \quad)L_1 + (\quad . \quad . \quad . \quad)M_1 + (\quad . \quad . \quad . \quad)N_1 = 0,$$

gemein, deren gleiche Parameter so bestimmt werden können, dass sie durch zwei ganz beliebige Punkte der Curve geht; und es können daher drei beliebige Bisecanten der Curve als Scheitelkanten der erzeugenden Ebenenbüschel gewählt werden.

Die einfachste Construction — aus den Kegeln H_o und H_p (Art. 141) — führt zum einfachsten algebraischen Ausdrucke. Die Scheitel S und S' derselben sind die Schnittpunkte der Curve mit der gemeinsamen Mantellinie op', die zugehörigen Tangenten

p, o' oder s, s' die Mantellinien der Kegel, welche die längs der gemeinsamen Mantellinie sie berührenden Tangentialebenen aus ihnen schneiden, und die Tangentialebenen der Kegel in diesen die Schmiegungsebenen der Curve in ihren Scheiteln S und S'; der Kegel aus S wird durch die projectivischen Ebenenbüschel um o und o', aus S' durch die um p' und p erzeugt. Die Ebene Σ' im Büschel s' oder o' entspricht der Ebene oo' im Büschel o und die Ebene Σ im Büschel s oder p der Ebene $p'p$ im Büschel p'. Denken wir den Schnittpunkt von Σ mit s' und den von Σ' mit s, so haben wir ein Tetraeder, das wir durch die Bezeichnung A_4 für S, A_1 für S', A_2 für $\Sigma s'$ und A_3 für $\Sigma' s$ als Coordinatentetraeder charakterisiren; seine Ecken A_4, A_1 sind die Scheitel der collinearen Bündel (L, M, N) und (L_1, M_1, N_1) resp., deren Collineation durch die Kegel H_p und H_o resp. oder durch die projectivischen Ebenenbüschel um p, p' d. i. um die Kanten A_4A_3, A_1A_4 und resp. um o, o' d. i. A_1A_4, A_1A_2 bestimmt wird; die Ebenen L und N_1 sind resp. $x_1 = 0$, $x_4 = 0$; in $x_2 = 0$ fallen L_1 und M und in $x_3 = 0$ M_1 und N zusammen, die Tangente der Curve in A_4 oder S ist LL_1 oder $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und die Tangente in A_1 oder S' NN_1 oder $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Die Gleichungen der collinearen Bündel werden

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0, \quad \lambda x_2 + \mu x_3 + \nu x_4 = 0$$

und die projicirenden Kegel der Curve aus ihren Scheiteln

$$x_1 x_3 - x_2^2 = 0, \quad x_2 x_4 - x_3^2 = 0,$$

das Hyperboloid aus den Büscheln um A_1A_2 und A_3A_4 aber

$$x_2 x_3 - x_1 x_4 = 0;$$

der Einheitpunkt der Coordinatenbestimmung ist ein Punkt der Curve. Die projectivischen Büschel, die sie erzeugen,

$$L - \omega M = 0\ (= L - \omega L_1),\ M - \omega N = 0\ (= L_1 - \omega M_1),$$
$$N - \omega N_1 = 0\ (= M_1 - \omega M),$$

werden zu

$$x_1 - \omega x_2 = 0, \quad x_2 - \omega x_3 = 0, \quad x_3 - \omega x_4 = 0$$

und liefern die Coordinatenverhältnisse eines Punktes der Curve als proportional den Potenzen einer Zahl ω, die für A_4 und A_1 respective 0 und ∞ wird,

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1.$$

Die dual entsprechende Untersuchung führt zur Erzeugung der Developpabeln dritter Classe aus projectivischen Reihen

$$\xi_1 - \omega\xi_2 = 0, \quad \xi_2 - \omega\xi_3 = 0, \quad \xi_3 - \omega\xi_4 = 0$$

und zur entsprechenden Darstellung ihrer Ebenen.

Eine Bisecante der Curve ist durch die Werthe ω_1, ω_2 bestimmt, welche den zugehörigen Curvenpunkten entsprechen und hat daher aus der Tabelle

$$\begin{Vmatrix} \omega_1^3, & \omega_1^2, & \omega_1, & 1 \\ \omega_2^3, & \omega_2^2, & \omega_2, & 1 \end{Vmatrix}$$

die Coordinaten

$$\pi_{12} = p_{34} = 1, \quad \pi_{23} = p_{14} = \omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2, \quad \pi_{31} = p_{24} = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\pi_{14} = p_{23} = \omega_1\omega_2, \quad \pi_{24} = p_{31} = -\omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2), \quad \pi_{34} = p_{12} = \omega_1^2\omega_2^2,$$

welche für eine Tangente übergehen in

$$1,\ 3\omega^2,\ 2\omega;\quad \omega^2,\ -2\omega^3,\ \omega^4;$$

die zugehörigen Gleichungen sind

$$x_1 - (\omega_1 + \omega_2)x_2 + \omega_1\omega_2 x_3 = 0, \quad x_2 - (\omega_1 + \omega_2)x_3 + \omega_1\omega_2 x_4 = 0$$

und respective

$$x_1 - 2\omega x_2 + \omega^2 x_3 = 0, \quad x_2 - 2\omega x_3 + \omega^2 x_4 = 0.$$

Die Ebene durch drei Punkte ω_1, ω_2, ω_3 wird aus

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \omega_1^3, & \omega_1^2, & \omega_1, & 1 \\ \omega_2^3, & \omega_2^2, & \omega_2, & 1 \\ \omega_3^3, & \omega_3^2, & \omega_3, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

durch Reduction in der Form erhalten (vergl. „Kegelschn.“, Art. 303)

$$x_1 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)x_2 + (\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1)x_3 - \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 = 0.$$

Die Schmiegungsebene im Punkte ω der Curve hat also speciell die Gleichung

$$x_1 - 3\omega x_2 + 3\omega^2 x_3 - \omega^3 x_4 = 0,$$

oder die Coordinaten der Schmiegungsebene in ω sind verbunden durch

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = 1 : -3\omega : 3\omega^2 : -\omega^3,$$

d. h. die Tangentenfläche der gewundenen Curve dritter Ordnung ist

eine Developpable dritter Classe, die aus den projectivischen Reihen

$$\xi_2 + 3\omega\xi_1 = 0, \quad \xi_3 + \omega\xi_2 = 0, \quad 3\xi_4 + \omega\xi_3 = 0$$

entsteht; in der That sind die drei Ebenen derselben, die durch einen Punkt y_i gehen, durch die drei Wurzeln von

$$y_1 - 3\omega y_2 + 3\omega^2 y_3 - \omega^3 y_4 = 0$$

bestimmt, während die Curve in einer beliebigen Ebene η_i drei Punkte hat, bestimmt aus

$$\omega^3\eta_1 + \omega^2\eta_2 + \omega\eta_3 + \eta_4 = 0.$$

Beide Gleichungen zeigen für den Schnittpunkt von drei Schmiegungsebenen und die Ebene der drei zugehörigen Curvenpunkte die Incidenzbedingung (Art. 53) erfüllt, d. h. jener liegt immer in dieser. Nehmen wir dazu die zwischen den Coordinaten der Tangenten der Curve nach den oben erhaltenen Werthen bestehende Relation $3p_{23} - p_{14} = 0$, die dieselben als einem linearen Complex zugehörig bezeichnet, so sehen wir (Art. 133, Formel (3)) ihre Zugehörigkeit zu einem Nullsystem als Nullaxen und erkennen, dass durch dieselbe den Punkten der Curve ihre Schmiegungsebenen zugewiesen werden (Nullpunkte und Nullebenen).

Die Bedingungen für das Zusammenfallen zweier Ebenen dort, respective zweier Punkte hier sind

$$-y_2 + 2\omega y_3 - \omega^2 y_4 = 0, \quad y_1 - 2\omega y_2 + \omega^2 y_3 = 0, \text{ resp.}$$
$$3\omega^2\eta_1 + 2\omega\eta_2\eta_3 + \eta^3 = 0, \quad \omega^2\eta_2 + 2\omega\eta_3 + 3\eta_4 = 0;$$

die ersten liefern durch Elimination des Parameters ω die Gleichung der Tangentenfläche in x_i-Coordinaten und die Gleichung der Curve in ξ_i-Coordinaten (nämlich mit Wiedereinsetzung der x für die y resp. der ξ für die η)

$$(x_1x_3 - x_2^2)(x_2x_4 - x_3^2) = (x_1x_4 - x_2x_3)^2,$$
$$4(3\xi_1\xi_3 - \xi_2^2)(3\xi_2\xi_4 - \xi_3^2) = (9\xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3)^2.$$

B. 1. Mit Hülfe der Relationen des Art. 56 zwischen den Coordinaten einer Geraden und denen eines in ihr gelegenen Punktes x_i erhalten wir vier Gleichungen zwischen jenen und den Potenzen des Parameters ω, aus denen diese eliminirt werden können; man bilde so die Gleichung des Complexes der Gesammtheit der Geraden, die die Curven ein Mal treffen. Er ist vom dritten Grade, aber sehr speciell; denn sein Complexkegel

aus einem Punkte ist ein Kegel dritter Ordnung mit Doppelkante; seine Complexcurve in einer Ebene zerfällt in drei Strahlenbüschel.

B. 2. Man bilde analog zu 1) die Gleichung für den Complex der Geraden, welche in den Schmiegungsebenen der gewundenen Curve dritter Ordnung liegen oder die Gleichung ihrer Tangentenfläche in Strahlencoordinaten. Seine Specialität ist das Zerfallen des Complexkegels in drei ebene Strahlenbüschel und die Complexcurve als Curve vierter Ordnung und doch nur dritter Classe, also mit drei Rückkehrpunkten.

B. 3. Man erläutere die Unterscheidung der Curven dritter Ordnung nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Ebene näher, wonach sie einen reellen unendlich fernen Punkt oder deren drei im Allgemeinen getrennte enthalten kann: cubische Ellipse, cubische Hyperbel; während im letzten Falle insbesondere zwei der drei unendlich fernen Punkte benachbart sein können: hyperbolische Parabel (mit einer unendlich fernen Tangente); und endlich alle drei benachbart, so dass die unendlich ferne Ebene Schmiegungsebene ist: cubische Parabel. Durch eine cubische Hyperbel gehen drei Cylinder zweiten Grades, durch die hyperbolische Parabel nur zwei, von denen einer parabolisch ist, durch die Parabel nur ein parabolischer Cylinder und durch die cubische Ellipse ein allgemein elliptischer Cylinder. Die cubische Ellipse hat reelle parallele Schmiegungsebenen, weil eine reelle unendlich ferne Bitangente ihrer Developpabeln; die cubische Hyperbel nicht. Bei der cubischen Parabel werden alle Tangenten von ihren Schmiegungsebenen proportional getheilt oder die Schnitte der Developpabeln in ihren Ebenen sind Parabeln; etc. Man verbinde dies mit dem Ausdruck der Entwicklung in Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten.

B. 4. Wenn die erzeugenden collinearen Bündel eine sich selbst entsprechende Ebene FF' haben, so zerfällt die erzeugte Curve dritter Ordnung in einen in dieser Ebene liegenden Kegelschnitt und eine denselben einmal schneidende Gerade, und dual bei collinearen Ebenen mit einem sich selbst entsprechenden Punkte.

Enthalten die Bündel zwei sich selbst entsprechende Ebenen oder entspricht ihr gemeinsamer Strahl sich selbst, so liegen in jenen zwei Gerade, welche die zugehörigen entsprechenden Büschel als ihre Perspectivaxen erzeugen und diese bilden mit dem Strahl SS' die erzeugte Curve; und dual.

In beiden Fällen hat die Curve einen scheinbaren Doppelpunkt wie allgemein; im ersten Falle dazu einen wirklichen Doppelpunkt und im zweiten deren zwei.

B. 5. Aus den Erzeugungen durch collineare Bündel resp. Ebenen folgt direct: Die Seitenflächen zweier Tetraeder, deren Ecken auf derselben Curve dritter Ordnung liegen, sind Tangentialebenen einer Developpabeln dritter Classe.

Jeder Punkt der Curve ist Ecke eines Tetraeders, das ihr eingeschrieben und zugleich der Developpabeln umgeschrieben ist.[30])

B. 6. Acht Punkte einer Curve dritter Ordnung 1 2 3 4 5 6 7 8 bilden ein windschiefes Achteck, für welches die Schnittlinien seiner vier Paare von gegenüberliegenden Flächen, also (1 2 3, 5 6 7), (2 3 4, 6 7 8), (3 4 5, 7 8 1) und (4 5 6, 8 1 2), derselben Regelschaar eines Hyperboloids angehören;[31]) und dual acht Ebenen einer Developpabeln dritter Classe ein Achtflach, für das die Verbindungslinien der vier Paare Gegenecken Gerade einer Regelschaar sind. Denn wir können zeigen, dass für unsere Geraden die Summen der mit constanten Zahlen $\varkappa$, λ, μ, ν multiplicirten gleichnamigen Coordinaten verschwinden — wie leicht zu sehen, die Bedingung der hyperboloidischen Lage. (Art. 58, 5.)

Mit Benutzung des Parameterausdruckes sind die acht Punkte durch $\omega_1, \ldots \omega_8$ ausdrückbar und die Ebenen 1 2 3, 5 6 7 haben die Coordinaten

$$1, \quad -(\omega_1+\omega_2+\omega_3), \quad \omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1, \quad -\omega_1\omega_2\omega_3,$$
$$1, \quad -(\omega_5+\omega_6+\omega_7), \quad \omega_5\omega_6+\omega_6\omega_7+\omega_7\omega_5, \quad -\omega_5\omega_6\omega_7.$$

Die Coordinaten $\pi_{12}, \pi_{23}, \pi_{31}, \pi_{14}, \ldots$ oder $\pi_{ik}^{(1)}$ der Schnittlinie lassen sich also, mit Unterdrückung der Zeichen ω, schreiben

$$1+2+3-5-6-7,$$
$$(5+6+7)(12+23+31)-(1+2+3)(56+67+75),$$
$$56+67+75-12-23-31;$$
$$123-567, \quad 567(1+2+3)-123(5+6+7),$$
$$123(56+67+75)-567(12+23+31).$$

Man sieht dann leicht, dass immer

$$\pi_{ik}^{(1)}(4-8)+\pi_{ik}^{(2)}(5-1)+\pi_{ik}^{(3)}(6-2)+\pi_{ik}^{(4)}(7-3)=0$$

ist, was die hyperboloidische Lage beweist.

Auf sechs Punkte eines Kegelschnittes in der Parameterdarstellung $(1, \omega, \omega^2)$ angewandt, sind die Coordinaten der Geraden 12 und 45 proportional zu $\omega_1\omega_2$, $-(\omega_1+\omega_2)$, 1 und $\omega_4\omega_5$, $-(\omega_4+\omega_5)$, 1 und die ihres Schnittpunktes also zu $\omega_1+\omega_2$, $(\omega_4+\omega_5)$, $\omega_1\omega_2-\omega_4\omega_5$, $\omega_1\omega_2(\omega_4+\omega_5)-\omega_4\omega_5(\omega_1+\omega_2)$; und man erhält mit der Summe der Producte der gleichnamigen

Coordinaten der drei Schnittpunkte in $\omega_3 - \omega_6$, $\omega_4 - \omega_1$, $\omega_5 - \omega_2$ als Null den Pascal'schen Satz, etc.

Die Untersuchung der Configuration von Regelschaaren aus den durch die Permutationen der acht Punkte entstehenden Achtecken wäre ein analoges Problem zu dem von der vollständigen Figur des Palcal'schen Sechsecks mit seinen 60 Pascallinien. („Kegelschn.“ Art. 287 f., Note S. X f.)

B. 7. Schliesslich erinnern wir an die Auffassung der L, M, N etc. als Polynome von linearen Complexen (vergl. Art. 140, b) und empfehlen die entsprechende Ueberlegung.

143. Wenn $U = 0$, $V = 0$ zwei beliebige Flächen zweiten Grades in Punktcoordinaten darstellen, so ist

$$U + \lambda V = 0$$

die allgemeine Gleichung derjenigen Flächen zweiten Grades, welche durch alle gemeinschaftlichen Punkte jener beiden hindurchgehen; sie repräsentirt, wenn λ unbestimmt ist, eine einfach unendliche Reihe von Flächen zweiten Grades, welche eine gemeinschaftliche Durchdringungscurve haben. Man kann die Vereinigung derselben als ein Flächenbüschel zweiten Grades bezeichnen.

Da nach Art. 59 neun Punkte eine Fläche zweiten Grades bestimmen, so ist $U + \lambda V = 0$ die allgemeinste Gleichung einer durch acht gegebene Punkte gehenden Fläche dieser Art. Wenn $U = 0$, $V = 0$ zwei Flächen zweiten Grades sind, deren jede durch diese acht Punkte hindurchgeht, so wird durch $U + \lambda V = 0$ eine Fläche derselben Art vorgestellt, die diese Punkte ebenfalls enthält, und die Constante λ kann so bestimmt werden, dass die Fläche durch einen beliebigen neunten Punkt geht, d. i. dass sie mit irgend einer beliebigen die acht Punkte*) enthaltenden Fläche zweiten Grades zusammenfällt.

Alle durch acht Punkte gehende Flächen zweiten Grades haben somit eine ganze Reihe gemeinschaftlicher Punkte, welche eine Durchdringungs- oder Durchschnittscurve bilden; und alle Flächen zweiten Grades, welche acht gegebene Ebenen berühren,

*) Der allgemeinere Ausdruck Elemente, in welchem wir Punkte der Flächen und Tangentenebenen derselben zusammenfassen, kann hier überall dem eingeschränkteren substituirt werden. An Stelle der räumlichen Curve tritt die developpable Fläche, wenn man von Punktcoordinaten zu Tangentialcoordinaten übergeht

haben eine ganze Reihe gemeinschaftlicher Tangentenebenen, welche eine bestimmte abwickelbare Fläche erzeugen, die die ganze Reihe von Flächen zweiten Grades umhüllt, denen die acht festen Ebenen als Tangentenebenen entsprechen.

Offenbar kann daher das Problem, eine Fläche zweiten Grades durch neun gegebene Punkte zu beschreiben, unbestimmt werden; denn wenn der neunte Punkt der durch die acht gegebenen Punkte bestimmten Raumcurve angehört, die der Durchschnitt von zwei durch sie gehenden Flächen zweiten Grades ist, so enthält jede durch die acht Punkte gehende Fläche zweiten Grades auch den neunten Punkt. Zur Bestimmung der Fläche muss daher ein neunter nicht in dieser Curve gelegener Punkt gegeben sein.

Denn wenn im Allgemeinen für $U = 0$, $V = 0$ als Gleichungen zweier durch acht bestimmte Punkte gehenden Flächen zweiten Grades durch die Substitution der Coordinaten eines neunten Punktes in $U + \lambda V = 0$ die Constante λ bestimmt wird, so geschieht dies in dem speciellen Falle nicht mehr, wo durch diese Coordinaten die Gleichungen $U = 0$, $V = 0$ identisch erfüllt sind, d. i. wenn der neunte Punkt der Durchdringungscurve jener Flächen angehört.

Denken wir aber U, V als homogene Functionen zweiten Grades in Ebenencoordinaten ξ_i, so ist $U + \lambda V = 0$ die allgemeine Gleichung der einfach unendlich vielen Flächen zweiten Grades, welche alle die den Flächen $U = 0$, $V = 0$ gemeinsamen Tangentialebenen berühren oder welche ihrer gemeinsamen Developpabeln (Art. 135) eingeschrieben sind. Es ist auch die Gesammtheit aller Flächen zweiten Grades, welche acht feste Ebenen berühren — man nennt sie eine Flächenschaar zweiten Grades; und das Problem unter den Flächen an gegebene acht Tangentialebenen eine durch Angabe einer neunten Tangentialebene zu bestimmen, fordert, dass diese nicht zu der gemeinsamen Developpablen der durch die acht ersten bestimmten Schaar gehört.

B. 1. Die Gleichung des orthogonalen Hyperboloids in B. 2 des Art. 124 kann in der Form

$$(z - c)^2 + \frac{(y - mx)^2}{1 + m^2} - \lambda^2 \left\{ (z + c)^2 + \frac{(y + mx)^2}{1 + m^2} \right\} = 0$$

geschrieben werden, in welcher sie zeigt, dass die einfachen

Hyperboloide, die zu zwei windschiefen Geraden als Ort der Punkte von constanten Quadraten der Entfernungsverhältnisse construirt werden, ein Büschel bilden. Für $\lambda^2 = 1$ gehört demselben das hyperbolische Paraboloid

$$(1 + m^2)\, cz + mxy = 0$$

(B. 1 a. a. O.) an und für $\lambda^2 = -1$ die nicht reelle Fläche

$$m^2x^2 + y^2 + (1 + m^2)(z^2 + c^2) = 0;$$

(vergl. noch Art. 149, B. 2); man charakterisire die letztere weiter. Wenn zwei windschiefe Gerade für eine Fläche zweiten Grades polar und zugleich die Träger rechtwinkliger Involutionen harmonischer Polarebenen sein sollen, so erhellt, dass dieselbe ein bestimmtes imaginäres windschiefes Viereck enthalten muss, weil für G_1, H_1 und G_2, H_2 als Doppelpunkte der von den rechtwinkligen Polarinvolutionen in der jedesmal andern Geraden bestimmten elliptischen Punktinvolutionen die geraden Linien G_1G_2, G_2H_1, H_1H_2, H_2G_1 in Bezug auf die Fläche sich selbst polar und also Erzeugende derselben sein müssen — sodass jene Bedingung mit der Angabe eines windschiefen Vierecks äquivalent ist. (Vergl. Art. 124, 4 und weiterhin 149, 2.)

B. 2. Das Büschel im vorigen Beispiel ist in der That zugleich eine Schaar, d. h. ein einfach unendliches System von Flächen zweiten Grades, welche derselben durch die gemeinsamen Tangentialebenen von zweien unter ihnen bestimmten developpabeln Fläche eingeschrieben sind und von denen daher jede durch eine weitere Tangentialebene bestimmt wird. Denn man erhält die Gleichung der Flächen des Büschels in Ebenencoordinaten nach Art. 80 in der Form

$$(c\zeta - 1)^2 + \frac{(\xi - m\eta)^2}{1 + m^2} = \lambda^2 \left\{ (c\zeta + 1)^2 + \frac{(\xi + m\eta)^2}{1 + m^2} \right\}.$$

Man discutire diese Gleichung.

144. Wenn sieben Punkte (oder Tangentenebenen) als einer Reihe von Flächen zweiten Grades gemeinsam gegeben sind, so ist ein achter diesen Flächen gemeinsamer Punkt (eine achte gemeinschaftliche Tangentenebene) durch sie bestimmt.

Denn wenn $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ drei durch jene sieben Punkte gehende Flächen zweiten Grades darstellen, so wird durch $U + \lambda V + \mu W = 0$ eine beliebige andere diese Punkte enthaltende Fläche zweiten Grades ausgedrückt; sie ist durch zwei weitere Punkte bestimmt, weil die Constanten λ und μ so be-

stimmt werden können, dass die dargestellte Fläche durch zwei beliebige andere Punkte hindurchgeht. Aber die Gleichung $U + \lambda V + \mu W = 0$ repräsentirt offenbar eine Fläche zweiten Grades, welche durch alle den drei Flächen $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ gemeinschaftlichen Punkte hindurchgeht; da sich dieselben nun in acht Punkten durchschneiden, so existirt ausser den sieben gegebenen Punkten ein bestimmter achter Punkt, welcher dem ganzen System von Flächen gemeinsam ist; wir nennen es ein Bündel resp. Netz oder ein lineares System zweiter Stufe und diese acht Punkte seine Grundpunkte resp. die acht Ebenen seine Grundebenen.

Obgleich also im Allgemeinen acht Punkte eine Curve von doppelter Krümmung bestimmen, welche der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades ist, so ist es doch möglich, dass sie zur Bestimmung derselben nicht hinreichen; denn es giebt, wie wir eben gesehen haben, einen speciellen Fall, in welchem acht gegebene Punkte nur für sieben unabhängige Punkte zählen.

Wenn wir daher sagen, dass eine Fläche zweiten Grades durch neun Punkte resp. Tangentialebenen und eine Durchschnittscurve resp. gemeinsame Developpable von zwei solchen Flächen durch acht Punkte resp. Ebenen bestimmt ist, so setzen wir voraus, dass jene neun und diese acht Punkte resp. Ebenen in ihrer Lage vollkommen unabhängig sind*).

Es ist klar, dass die Flächen zweiten Grades durch sechs Punkte oder an sechs Tangentialebenen durch vier von ihnen sagen wir $U^{(1)} = 0$, $U^{(2)} = 0$, $U^{(3)} = 0$, $U^{(4)} = 0$ mittelst linearer Parameter, also durch

$$U^{(1)} + \lambda_1 U^{(2)} + \lambda_2 U^{(3)} + \lambda_3 U^{(4)} = 0$$

ausgedrückt werden können, etc. Wir sprechen also von linearen

*) Die Entwicklung der auf Flächen beliebigen Grades bezüglichen allgemeinen Theorie entspricht ganz der für höhere Curven gültigen.[32]) (Salmon-Fiedler, „Höhere Curven" Art. 24—30.) Wenn eine Anzahl von Punkten gegeben ist, die um Eins kleiner ist als die Zahl der zur Bestimmung einer Fläche n^{ter} Ordnung nöthigen Punkte, so ist dadurch eine Curve bestimmt, durch welche die Fläche geht; und wenn die Zahl der gegebenen Punkte um zwei geringer ist, so sind durch sie eine gewisse Anzahl anderer Punkte der Fläche mitbestimmt, nämlich so viel, als zu der Anzahl n^3 noch fehlen.

Gebilden dritter Stufe aus Flächen zweiten Grades und sehen, dass ebenso lineare Gebilde vierter Stufe etc. gebildet werden können; und dass schliesslich die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiten Grades als lineares Gebilde neunter Stufe aus solchen Flächen in der besondern Form von Ebenen- oder Punktepaaren angesehen werden kann, worin die Parameter die Verhältnisse der Coefficienten zu einem unter ihnen bilden.

B. Man zeige, dass für $l_1, \ldots l_7$ als entsprechend zu bestimmende Constanten und $u_1, \ldots u_7$ als lineare Functionen der Punktcoordinaten die in lineare Factoren zerfallende Summe

$$l_1 u_1^2 + \cdots + l_7 u_7^2 \equiv (\xi_1 x_1 + \cdots)(\xi_1^* x_1 + \cdots)$$

Paare von Ebenen ausdrückt, welche in Bezug auf jede die Ebenen $u_i = 0$ berührende Fläche zweiten Grades zu einander conjugirt sind; und dass sie als Quadrat einer linearen Function die achte Ebene liefert, welche alle jene Flächen noch berührt.

145. Wenn ein System von Flächen zweiten Grades eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve hat, d. i. wenn die Flächen desselben acht Punkte gemein haben, so gehen die Polarebenen eines festen Punktes in Bezug auf die Flächen des Systems durch eine feste gerade Linie; oder die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Flächen eines Büschels bilden ein Ebenenbüschel.

Wenn ein System von Flächen zweiten Grades derselben developpabeln Fläche eingeschrieben ist, d. i. wenn die Flächen desselben acht gemeinsame Tangentenebenen besitzen, so ist der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Flächen des Systems eine gerade Linie; oder die Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen einer Schaar bilden eine geradlinige Punktreihe.

Denn wenn die Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ die Polarebenen eines festen Punktes resp. die Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Flächen zweiten Grades $U = 0$, $V = 0$ respective bezeichnen, so ist $P + \lambda Q = 0$ die Gleichung der Polarebene desselben Punktes resp. die Gleichung des Pols derselben Ebene in Bezug auf die Fläche $U + \lambda V = 0$.

Von der Construction der Fläche zweiten Grades aus einem Polartetraeder und einem Paar P, P von Pol und Polarebene (Art. 134) gelangt man ebenso leicht zum Büschel wie zur Schaar von Flächen zweiten Grades; wenn nämlich zum Pol P statt der Polarebene selbst nur eine Gerade bekannt ist, durch die P geht,

so liefert jede Lage von P mit P und dem Tetraeder eine Fläche zweiten Grades, und da der Drehungsparameter der Ebene in die Gleichung der Flächen in Coordinaten x_i linear eingeht, so bildet ihre Gesammtheit ein Büschel; wenn aber zur Polarebene P statt des Pols P eine Gerade gegeben wäre, in der er liegt, so liefert jede Lage des Pols eine Fläche zweiten Grades und ihre Gesammtheit ist eine Schaar. Man zeigt auch rein geometrisch, dass der Querschnitt des ersten Systems mit einer Ebene ein Büschel von Kegelschnitten und die Tangentialebenen des zweiten aus einem Punkte eine Schaar von Kegeln zweiten Grades bilden, doch mit vier gemeinsamen Punkten, hier mit vier gemeinsamen Tangentialebenen. („Kegelschn.“ Art. 268 f., 282.)

Insbesondere ist der Ort der Centra aller derselben developpabeln Fläche eingeschriebenen oder acht Ebenen berührenden Flächen zweiten Grades eine gerade Linie.

146. Wenn ein System von Flächen zweiten Grades durch eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve geht (oder in eine gemeinschaftliche developpable Fläche eingeschrieben ist), so erzeugen die Polaren einer festen geraden Linie ein Hyperboloid mit einem Mantel.

Denn wenn $P + \lambda Q = 0$, $P' + \lambda Q' = 0$ die Polaren zweier Punkte jener geraden Linie sind, so liegt ihre Durchschnittslinie nothwendig auf dem Hyperboloid $PQ' = P'Q$.

147. Wenn ein System von Flächen zweiten Grades eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve hat, so ist der Ort des Pols einer festen Ebene eine Raumcurve dritter Ordnung.

Die Elimination von λ zwischen den Gleichungen

$$P + \lambda Q = 0, \quad P' + \lambda Q' = 0, \quad P'' + \lambda Q'' = 0$$

der Polarebenen von irgend drei Punkten giebt das System der Determinanten

$$\left\| \begin{matrix} P, & P', & P'' \\ Q, & Q', & Q'' \end{matrix} \right\| = 0,$$

welches eine Curve dritter Ordnung repräsentirt. Denn die Flächen zweiten Grades $PQ' = P'Q$, $PQ'' = P''Q$ bestimmen zwar eine Durchschnittscurve vierter Ordnung, aber dieselbe enthält die gerade Linie $P = 0$, $Q = 0$ als Theil, welche der Durchdringungscurve der Flächen $P'Q'' = P''Q'$, $PQ'' = P''Q$ nicht angehört;

diese enthalten statt ihrer die Gerade $P'' = 0$, $Q'' = 0$. Die zu allen drei Flächen gemeinschaftlichen Punkte bilden daher eine gewundene Curve dritter Ordnung.

Wenn (nach reciproker Interpretation) ein System von Flächen zweiten Grades einer gemeinschaftlichen developpabeln Fläche eingeschrieben ist, so umhüllt die Polarebene eines festen Punktes eine developpable Fläche, welche die Reciproke einer Raumcurve dritter Ordnung ist. (Vergl. Art. 141, 142.)

148. Die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf alle die durch sieben gegebene Punkte gehenden Flächen zweiten Grades gehen durch einen bestimmten festen Punkt.

Die Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle diejenigen Flächen zweiten Grades, welche dieselben sieben Tangentenebenen besitzen, liegen in einer festen Ebene.

Denn die Gleichung der Polare eines festen Punktes in Bezug auf eine der durch die allgemeine Gleichung $U + \lambda V + \mu W = 0$ dargestellten Flächen ist von der Form $P + \lambda Q + \mu R = 0$ und enthält daher den festen Punkt, in welchem die Ebenen $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ sich schneiden.

Man kann auf Grund dieses Satzes zu einem Punkte P den harmonischen Pol P^* in Bezug auf die Flächen des Systems construiren, indem man für drei seiner einfachen Hyperboloide die Polarebenen ermittelt. Sind $1, 2, \ldots 7$ die sieben Punkte, so gehen durch $5, 6, 7$ drei Erzeugende solcher Hyperboloide, nämlich die Transversalen zu $12, 34$; die zu $13, 24$ bestimmen ein zweites und die zu $14, 23$ das dritte. Die harmonisch conjugirten Punkte in den Transversalen zu zwei Erzeugenden desselben Hyperboloids sind Punkte der Polarebene.

Daraus ergiebt sich die Bestimmung der Polarebene von P in Bezug auf die durch neun Punkte $1, 2, \ldots 9$ gegebene Oberfläche zweiter Ordnung; sie enthält die harmonischen Pole zu P in Bezug auf die Systeme durch die Punkte $1, 2, \ldots 6, 7$; $1, 2 \ldots 6, 8$ und $1, 2, \ldots 6, 9$. Damit ist aber die Fläche zweiter Ordnung selbst linear construirt[33]) und man ermittelt leicht ihr Centrum und ein System von drei einander conjugirten Durchmessern.

Dagegen ist der Ort des Pols einer Ebene in Bezug auf die Flächen des Systems eine Fläche dritter Ordnung. Aus Art. 144

erkennt man auch, dass der Ort der Spitzen der durch die sieben Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades eine Curve sechster Ordnung ist, die auf der vorigen Fläche liegt. Sie ist auch der Ort solcher Pole, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen des Systems ein Büschel bilden. (Vergl. Art. 250.)

149. Aus dem Umstande, dass die Discriminante in Bezug auf die Coefficienten der Gleichung vom vierten Grade ist, folgt, dass die Grösse λ aus einer biquadratischen Gleichung bestimmt werden muss, wenn die Gleichung $U + \lambda V = 0$, die allgemeine Gleichung der einem linearen System angehörigen Flächen, einen Kegel darstellen soll. Daraus ergiebt sich, dass durch die Durchschnittslinie zweier Flächen zweiten Grades vier Kegel zweiten Grades hindurchgehen.

Wenn λ_i irgend eine der vier Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung bezeichnet, so bestimmen die vier Ebenen

$$U_1 + \lambda_i V_1 = 0,\quad U_2 + \lambda_i V_2 = 0,\quad U_3 + \lambda_i V_3 = 0,\quad U_4 + \lambda_i V_4 = 0$$

durch ihren Durchschnitt die Scheitel dieser vier Kegel; oder diese Punkte sind gegeben als die vier durch die Determinantenreihe

$$\left\| \begin{matrix} U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ V_1, & V_2, & V_3, & V_4 \end{matrix} \right\| = 0$$

bestimmten Punkte.

Dieselben vier Punkte sind diejenigen, deren Polaren in Bezug auf alle die gemeinschaftliche Curve enthaltenden Flächen zweiter Ordnung in eine Ebene zusammenfallen, nämlich in die Ebene der drei andern.

Denn die Aufstellung der Bedingungen, unter welchen die Ebenen

$$x_1 U_1' + x_2 U_2' + x_3 U_3' + x_4 U_4' = 0,$$
$$x_1 V_1' + x_2 V_2' + x_3 V_3' + x_4 V_4' = 0$$

zusammenfallen, führt auf dieselbe Reihe von Determinanten.

Ebenso giebt es vier Ebenen, deren Pole in Bezug auf eine Reihe von Flächen zweiten Grades zusammenfallen, welche derselben developpabeln Fläche eingeschrieben sind.

B. 1. Die Scheitelkante p des Büschels der Polarebenen eines Punktes in Bezug auf ein Flächenbüschel zweiten Grades (Art. 145) bestimmt mit den Punkten des

gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole der Flächen vier Ebenen von constantem Doppelverhältniss.

Für $U=0$, $U'=0$ als zwei Flächen des Büschels bezogen auf ihr gemeinsames Polartetraeder (Art. 134) und $u=0$, $u'=0$ als die Gleichungen der Polarebenen von P in Bezug auf dieselben ist $\lambda u + u' = 0$ die Gleichung der Polarebene von P in Bezug auf die Fläche $\lambda U + U' = 0$ des Büschels; die Ebenen

$$\lambda_1 u + u' = 0, \; \lambda_2 u + u' = 0, \; \lambda_3 u + u' = 0, \; \lambda_4 u + u' = 0$$

gehen dann durch die Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 respective, d. i. durch die Punkte des gemeinsamen Quadrupels für diejenigen λ_i, welche den Bedingungen

$$\lambda_1 a_{11} + a_{11}' = 0, \; \lambda_2 a_{22} + a_{22}' = 0, \; \lambda_3 a_{33} + a_{33}' = 0, \; \lambda_4 a_{44} + a_{44}' = 0$$

genügen. Das Doppelverhältniss der vier Ebenen ist also von der Lage des Punktes P unabhängig. Wenn P in der gemeinsamen Curve der Flächen liegt, so ist p die entsprechende Tangente derselben.

Dieselben Formeln zeigen in den Variabeln ξ_i interpretirt, dass die Pole einer Ebene in Bezug auf alle die Flächen der derselben Developpabeln eingeschriebenen Schaar von Flächen zweiter Classe eine geradlinige Reihe bilden, in welcher die den vier Ebenen des gemeinsamen Quadrupels angehörigen Punkte eine Gruppe von unveränderlichem Doppelverhältniss liefern (es sind die Geraden, deren polare in zwei Flächen zweiten Grades sich schneiden); so insbesondere für alle Erzeugenden der gemeinsamen Developpabeln.

Da die Gleichungen der beiden erstbetrachteten Flächen zweiten Grades in den ξ_i durch

$$a_{11}^{-1} \xi_1^2 + \cdots = 0, \quad a_{11}'^{-1} \xi_1^2 + \cdots = 0$$

ausgedrückt werden, so gelten für die Parameter der Schnittpunkte der Polreihen in den Fundamentalebenen die Gleichungen

$$\lambda_1 a_{22} a_{33} a_{44} + a_{22}' a_{33}' a_{44}' = 0, \text{ etc.},$$

und die Bildung des Doppelverhältnisses $\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$ zeigt, dass es in diesem Falle wie im vorigen denselben Werth hat, nämlich

$$\frac{a_1 a_3' - a_1' a_3}{a_2 a_3' - a_2' a_3} : \frac{a_1 a_4' - a_1' a_4}{a_2 a_4' - a_2' a_4}.$$

Damit ist ein Complex zweiten Grades (Art. 129) charakterisirt, zu dessen geometrischer Definition wir durch folgende

Ueberlegung gelangen. Durch die Constructionen beider Sätze treten zum primitiven Punkt- oder Ebenensystem des Raumes die beiden zu ihm reciproken Ebenen- oder Punktsysteme, welche nach Art. 134 und 78 die erste und zweite Fläche zweiten Grades erzeugen. Diese sind nothwendig collinear (Art. 127) und die Geraden des Complexes sind nichts anderes als die Verbindungslinien der entsprechenden Paare von Punkten und zugleich die Schnittlinien der entsprechenden Paare von Ebenen derselben. Unsere Sätze aber sagen wie dort, dass diese Geraden mit den sich selbst entsprechenden Punkten und Ebenen der collinearen Räume Reihen und Büschel von constantem Doppelverhältniss bestimmen.[34]) (Art. 129.)

B. 2. Für das Büschel orthogonaler Hyperboloide wird die biquadratische Gleichung der Discriminante zur Bestimmung des Polarquadrupels mit λ' als dem Parameter $(1+\lambda^2):(1-\lambda^2)$ von der Form

$$\begin{vmatrix} m^2, & -m\lambda', & 0, & 0 \\ -m\lambda', & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -c\lambda' \\ 0, & 0, & -c\lambda', & c^2 \end{vmatrix} = m^2c^2(1-\lambda'^2)(1-\lambda'^2) = 0;$$

die Kegel zweiten Grades im Büschel entsprechen also den Verhältnissen λ (B. 1 in Art. 140 oder 2 in Art. 124) aus

$$\lambda' = \pm 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 0, \ \lambda = \infty,$$

für welche die Flächengleichung in der That übergeht in

$$(mx \pm y)^2 + (z \pm c)^2 (1 + m^2) = 0;$$

es ist die Gleichung von vier Ebenen (vergl. Art. 124, 2)

$$(mx \pm y) \pm i\,(z \pm c)\sqrt{1+m^2} = 0,$$

welche die Kugel vom Radius Null oder den unendlich fernen imaginären Kreis (Art. 152) berühren, weil die Summe der Quadrate ihrer Coordinaten verschwindet. Die allgemeine Theorie der Metrik (Art. 246) giebt genaue Auskunft darüber, inwiefern diese Ebenenpaare selbst zu den Flächen des Systems gehören.

Die Transformation des B. 2 in Art. 128 giebt für das obere respective untere Zeichen in den Klammern die Gleichungen dieser Ebenenpaare in der mit der dortigen äquivalenten Form

$$(1+m)\,x_3 \pm i\,(1+c)\sqrt{1+m^2}\cdot x_1 = 0,$$

$$(1-m)\,x_3 \mp i\,(1-c)\sqrt{1+m^2}\cdot x_2 = 0.$$

150. Wenn die Fläche $V = 0$ in zwei Ebenen $L = 0$ und $M = 0$ zerfällt, so geht die Gleichung $U + \lambda V = 0$ über in $U + \lambda LM = 0$, welcher Fall einer besonderen Untersuchung bedarf, nachdem in Art. 111 der Fall schon untersucht ist, in welchem auch $U = 0$ in zwei Ebenen zerfällt. Im Allgemeinen ist die Durchdringung zweier Flächen zweiten Grades eine Curve vierter Ordnung; aber der Durchschnitt von $U = 0$ mit einer der Flächen $U + \lambda LM = 0$ reducirt sich offenbar auf die beiden Kegelschnitte, in welchen $U = 0$ die Ebenen $L = 0$, $M = 0$ schneidet.

Jeder Punkt der geraden Linie $L = 0$, $M = 0$ hat in Bezug auf alle Flächen des Systems $U + \lambda LM = 0$ dieselbe Polarebene. Denn wenn $P = 0$ die Polarebene eines Punktes in Bezug auf $U = 0$ ist, so ist seine Polarebene in Bezug auf $U + \lambda LM = 0$ durch $P + \lambda(L'M + LM') = 0$ ausgedrückt, was sich für $L = 0$, $M = 0$ auf $P = 0$ reducirt. So haben insbesondere in den beiden Durchschnittspunkten der Geraden $L = M = 0$ mit der Fläche $U = 0$ alle Flächen des Büschels dieselbe Tangentialebene. Und die Form $U + \lambda LM = 0$ kann also als Gleichung eines Systems von Flächen zweiten Grades bezeichnet werden, die mit einander eine doppelte Berührung haben.

Umgekehrt zerfällt die Durchdringungscurve von zwei sich doppelt berührenden Flächen zweiten Grades in zwei Kegelschnitte; denn jede durch die beiden Berührungspunkte und einen Punkt der Durchdringung gelegte Ebene schneidet beide Flächen in Kegelschnitten, welche drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben, den Berührungspunkten nämlich, gemeinsam haben und daher identisch sein müssen.

Einzig der schon behandelte Fall bildet eine Ausnahme, wo die Verbindungsgerade der Berührungspunkte beider Flächen zweiten Grades eine erzeugende Gerade beider Flächen ist (Art. 118), sodass der Rest der Durchdringungscurve eine gewundene Curve dritter Ordnung ist. (Art. 141 f., 147.)

Ausser den Punkten der Geraden $L = M = 0$ existiren noch zwei einzelne Punkte, welche in Bezug auf alle Flächen des Systems die nämliche Polarebene haben und deshalb nach Art. 146 die Scheitel von Kegeln zweiten Grades sind, die die beiden Schnittcurven enthalten. Für solche Punkte muss die Polarebene $P = 0$ in Bezug auf $U = 0$ mit der Ebene $L'M + LM' = 0$, der Polar-

ebene in Bezug auf $LM = 0$, identisch sein. Weil dann die Polarebene des Punktes in Bezug auf $U = 0$ durch $L = 0$, $M = 0$ geht, so muss der Punkt selbst in der Polarlinie dieser Geraden, d. h. in der Durchschnittslinie der Tangentialebenen von $U = 0$, in den Schnittpunkten mit $L = M = 0$ liegen. Wenn diese Polarlinie die Fläche $U = 0$ in A, A' und $LM = 0$ in B, B' schneidet, so sind die fraglichen Punkte die Doppelpunkte F, F' der durch AA', BB' bestimmten Involution; denn da nun FF' mit AA' sowohl wie mit BB' eine harmonische Gruppe bilden, so geht die Polarebene von F sowohl in Bezug auf $U = 0$ als in Bezug auf $LM = 0$ durch F', und umgekehrt.

In analoger Weise werden alle Flächen des Systems durch zwei Kegel zweiten Grades umhüllt. Denn für den Schnittpunkt der beiden gegebenen gemeinsamen Tangentialebenen mit irgend einer dritten gemeinschaftlichen Tangentialebene als Scheitel haben die Tangentenkegel aller Flächen des Systems drei Tangentialebenen und die Berührungserzeugenden in zweien derselben gemein und sind daher identisch. Die Reciproken von zwei sich doppelt berührenden Flächen zweiten Grades sind wieder zwei sich doppelt berührende Flächen zweiten Grades, und den beiden Ebenen der Durchdringung des einen Paares entsprechen die beiden Spitzen der gemeinschaftlichen Tangentenkegel des andern Paares.

151. Wenn zwei Flächen zweiten Grades eine dritte in der nämlichen ebenen Curve schneiden, so haben die Ebenen derjenigen Curven, in welchen sie dieselbe überdies durchschneiden, mit der Ebene der Curve, welche sie selbst noch mit einander gemein haben, einerlei Durchschnittslinie.

Denn die Flächen $U + LM = 0$, $U + LN = 0$ bestimmen mit einander ebene Schnitte, welche durch die Ebenen

$$L = 0, \quad M - N = 0$$

gegeben sind.

152. Die ähnlichen Flächen zweiten Grades gehören zu der eben discutirten Classe. Denn zwei Flächen zweiten Grades sind — die bei der Betrachtung ähnlicher Curven zweiten Grades („Kegelschn." Art. 242) gebrauchten Gründe beweisen es — ähnlich und ähnlich gelegen, wenn die Glieder vom zweiten Grade in den Gleichungen derselben übereinstimmen. Der geome-

trische Sinn dieser Bedingungen ist in der Existenz des Aehnlichkeitscentrums, dem Parallelismus der Axen und ihrer Verhältnissgleichheit ausgesprochen. Ihre Gleichungen sind also von der Form $U = 0$, $U + cL = 0$, und wir sehen daraus, dass zwei solche Flächen zweiten Grades einander in einer ebenen Curve im Endlichen durchschneiden, während die Ebene der andern Durchschnittscurve in unendlicher Entfernung ist. Wenn wir drei ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiten Grades betrachten, so gehen die drei Ebenen ihrer endlichen Durchschnittscurven durch dieselbe gerade Linie. Endlich besitzen die sechs Ebenen der Durchschnittscurven von vier solchen Flächen einen gemeinschaftlichen Punkt.

Alle Kugeln (Art. 123) sind ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiten Grades; es ist die Consequenz dieser ihrer Natur, dass sie einen gemeinschaftlichen Durchschnitt in unendlicher Entfernung haben, einen Durchschnitt, welcher offenbar ein imaginärer Kreis ist.

Ein ebener Querschnitt einer Fläche zweiten Grades ist ein Kreis, wenn diejenigen zwei Punkte, in welchen seine Ebene diesen unendlich entfernten imaginären Kreis schneidet, ihm angehören.

Wir können daraus direct die Zahl der Auflösungen erkennen, deren das Problem der Bestimmung der Kreisschnitte einer Fläche zweiten Grades fähig ist.

Denn die Schnittcurve der Fläche zweiten Grades mit der unendlich entfernten Ebene wird von der Schnittcurve einer Kugel mit derselben Ebene in vier Punkten geschnitten, welche durch sechs gerade Linien verbunden werden können; die durch irgend eine dieser Geraden gehenden Ebenen schneiden die Fläche zweiten Grades in Kreisen. Die sechs geraden Linien theilen sich in drei Paare, von denen jedes einen der drei Punkte als seinen Durchschnittspunkt bestimmt, welche in Bezug auf die Durchschnittscurve der Fläche zweiten Grades und die der Kugel dieselbe Polare haben. Diese drei Punkte bestimmen die Richtungen der Axen der Fläche zweiten Grades, ihre Verbindungsgeraden sind die Stellungen ihrer Hauptebenen.

Ein Kreispunkt ist nach Art. 108 der Berührungspunkt einer Tangentialebene, welche durch eine dieser sechs Geraden geht;

es giebt also in allem zwölf Kreispunkte, von denen nur vier reell sind. Und da die Erzeugenden in der Tangentialebene einer Fläche zweiten Grades, welche durch eine gegebene Gerade geht, nothwendig die beiden Punkte enthalten — eine einen —, welche diese Gerade mit der Fläche gemein hat, so muss jeder der Kreispunkte in einer von den acht Erzeugenden liegen, die durch die vier in unendlicher Ferne gelegenen der Fläche zweiten Grades und einer Kugel gemeinsamen Punkte gehen; d. h. die zwölf Kreispunkte einer Fläche zweiten Grades liegen zu je drei in acht nicht reellen geraden Linien.[35])

Eine Umdrehungsfläche ist diejenige Fläche zweiten Grades, welche mit einer Kugel eine doppelte Berührung in unendlicher Entfernung hat. Denn eine Gleichung von der Form $x^2 + y^2 + az^2 = b$ kann in der Form

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) + \{(a-1)z^2 - (b - r^2)\} = 0$$

geschrieben werden, deren letzter Theil die Verbindung zweier Ebenen repräsentirt. Es erhellt auch, wie in diesem Falle nur eine Stellung reeller Kreisschnitte vorhanden ist, welche bestimmt ist durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der unendlich entfernten Schnitte der Fläche zweiten Grades und der Kugel.

B. Wenn ein Tetraeder mit einem festen Punkte in jeder seiner Kanten und ein fester Kegelschnitt gegeben sind, so gehen die vier Flächen zweiten Grades, die durch diesen Kegelschnitt, eine der Ecken des Tetraeders und die drei Fixpunkte der von ihr ausgehenden Kanten gelegt werden, durch einen Punkt.[36])

Denken wir uns das Tetraeder als fundamental und sei die Ebene des Kegelschnitts durch

$$L \equiv \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0,$$

die Fläche zweiten Grades durch ihn und die vier Fundamentalpunkte durch

$$U \equiv a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4 = 0$$

ausgedrückt. Die Flächen unseres Satzes haben dann Gleichungen von der Form

$$U + LM_1 = 0,\quad U + LM_2 = 0,\quad U + LM_3 = 0,\quad U + LM_4 = 0$$

und die linearen Polynome M_1, .. M_4 müssen, weil die Fundamentalelemente A_1, A_2, A_3, A_4 resp. enthaltend, dreigliedrig sein, sodass man setzen kann

$$M_1 \equiv m_{12}x_2 + m_{13}x_3 + m_{14}x_4, \quad M_2 \equiv m_{21}x_1 + m_{23}x_3 + m_{24}x_4,$$

$$M_3 \equiv m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{34}x_4, \quad M_4 \equiv m_{41}x_1 + m_{42}x_2 + m_{43}x_3.$$

Damit nun die beiden ersten Flächen die Kante A_1A_2 im nämlichen Punkte schneiden, müssen die durch Einsetzen von $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und nachmalige Ausscheidung der respectiven Factoren x_2 und x_1 entstehenden Gleichungen für das Verhältniss $x_2 : x_1$ denselben Werth liefern; also aus

$$a_{12}x_1 + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) m_{12} = 0 \text{ und } a_{12}x_2 + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) m_{21} = 0$$

$$a_{12} = -\lambda_1 m_{12} - \lambda_2 m_{21};$$

man erhält analoge Resultate aus der Betrachtung der Kanten A_1A_3, A_1A_4, .. A_{34} für die Coefficienten a_{13}, a_{14}, .. a_{34} und damit

$$-U \equiv \lambda_1 M_1 x_1 + \lambda_2 M_2 x_2 + \lambda_3 M_3 x_3 + \lambda_4 M_4 x_4.$$

Daraus entstehen die Gleichungen der vier Flächen zweiten Grades als

$$U + LM_1 = 0, \quad U + LM_2 = 0 \text{ etc.}$$

und die Ebenen ihrer endlichen Durchdringungen sind

$$M_1 = M_2, \; M_1 = M_3, \; M_1 = M_4, \; M_2 = M_3, \; M_2 = M_4, \; M_3 = M_4$$

oder sie schneiden sich in dem Punkte $M_1 = M_2 = M_3 = M_4$, der auch den Flächen selbst angehört, weil $-U - LM_1$ mit der Gleichsetzung aller M gleich dem ersten übergeht in

$$M_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) - (\lambda_1 x_1 + \cdots) M_1 = 0.$$

Man bilde den hierdurch mit bewiesenen dual entsprechenden Satz.

153. Wenn die Ebenen $L = 0$ und $M = 0$ zusammenfallen, so geht die Form $U + \lambda LM = 0$ über in $U + \lambda L^2 = 0$, welche einen Büschel von Flächen zweiten Grades darstellt, die mit der Fläche $U = 0$ in jedem Punkte ihres Durchschnitts mit der Ebene $L = 0$ eine Berührung haben.

Zwei Flächen zweiten Grades können sich nicht in drei Punkten berühren, ohne dass sie sich längs einer ganzen ebenen Curve berühren. Denn die Ebene der drei Punkte schneidet sie in Kegelschnitten, welche diese und die entsprechenden Tangenten gemein haben und daher identisch sind.

Die in dem Beispiele des Art. 79 gegebene Gleichung des Tangentenkegels einer Fläche ist ein specieller Fall der hier betrachteten Gleichungsform $U = L^2$.

Auch zwei concentrische und ähnliche Flächen zweiten Grades $U = 0$, $U - c^2 = 0$ sind als einander umhüllende zu betrachten, bei welchen die Ebene der Berührungspunkte ganz in unendlicher Entfernung ist.

Jede Ebene schneidet die beiden Flächen $U = 0$, $U - L^2 = 0$ nach Curven zweiten Grades, die eine doppelte Berührung haben, und wenn der Schnitt der einen auf einen punktförmigen, d. i. unendlich kleinen Kreis sich reducirt, so ist dieser Punkt offenbar der Brennpunkt des Schnittes der andern.

Wenn also eine Fläche zweiten Grades eine andere Fläche dieser Art umhüllt, so schneidet die Tangentenebene in einem Kreispunkte der einen die andere in einem Kegelschnitte, für welchen dieser Kreispunkt ein Brennpunkt ist. Und wenn die eine dieser Flächen eine Kugel ist, als für welche jede Ebene eine Kreisschnittebene und jeder Punkt ein Kreispunkt ist, so schneidet die Tangentenebene der Kugel die andere Fläche in einem Kegelschnitte, welcher ihren Berührungspunkt zum einen Brennpunkte hat*).

Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den betrachteten Kreispunkt und die Ebene xy in die entsprechende Tangentenebene verlegt, so erhält man als den analytischen Ausdruck dieser Sätze das Ergebniss, dass für $z = 0$ die Grösse $U - L^2$ sich auf $x^2 + y^2 - l^2 = 0$ reducirt, so dass sie einen Kegelschnitt bezeichnet, welcher den Anfangspunkt zum Brennpunkte und die gerade Linie l, die Durchschnittslinie der Schnittebene mit der Ebene der Berührungscurve, zur Directrix hat.

Zwei Flächen zweiten Grades, welche von derselben dritten Fläche zweiten Grades umhüllt werden, schneiden einander in ebenen Curven. Denn offenbar haben die Flächen $U - L^2 = 0$, $U - M^2 = 0$ die Ebenen $L - M = 0$, $L + M = 0$ zu ihren Durchschnittsebenen. Dieselben bilden mit den Ebenen der Berührung ein harmonisches Büschel.

Man findet ferner: Wenn drei Flächen zweiten Grades durch dieselbe vierte umhüllt werden, so gehen die Ebenen ihrer Durch-

*) Dies ist die allgemeinere Form, welche das Theorem von Dandelin über die Schnitte des Umdrehungskegels annimmt, aus dem man die Theorie der Kegelschnitte so leicht elementar entwickelt. („Kegelschnitte", Art. 430.)

schnittscurven zu dreien durch gerade Linien aus dem Schnittpunkt ihrer Ebenen der Berührung.

B. Man specialisire den Satz für die umschriebenen Flächen als Kegel und bilde den dualistisch entsprechenden Satz für drei ebene Schnitte einer Fläche zweiten Grades.

154. Die Gleichung $aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0$, in welcher L, M, N, P lineare Polynome, also $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ Ebenen bezeichnen, ist die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, für welche jede dieser vier Ebenen die Polare des Punktes ist, in welchem die drei andern sich schneiden. Denn $aL^2 + bM^2 + cN^2 = 0$ ist die Gleichung eines Kegels, der den Punkt $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ zum Scheitel hat, und der Vergleich mit der Gleichung der Fläche zweiten Grades zeigt, dass derselbe diese berührt und dass $P = 0$ die Ebene der Berührungscurve darstellt.

Solche vier Ebenen bilden also stets (Art. 134) ein in Bezug auf die Fläche sich selbst conjugirtes Tetraeder, oder ein Quadrupel harmonischer Polarebenen der Fläche, analog den in der Theorie der Kegelschnitte betrachteten sich selbst conjugirten Dreiecken. (Vergl. „Kegelschnitte", Art. 312 f.) Seine Ecken bezeichnen wir als ein Quadrupel harmonischer Pole der Fläche. Die drei Paare seiner gegenüberliegenden Kanten sind Paare reciproker Polaren in Bezug auf die Fläche. (Vergl. Art. 128, 2.) Aus einer von ihnen bestimmt sich die gegenüberliegende entweder als die Durchschnittslinie der Polarebenen zweier in ihr liegender Punkte oder als die Verbindungslinie der Pole zweier durch sie gehender Ebenen; speciell als die Durchschnittslinie der beiden Tangentenebenen der Fläche in den Punkten, wo die gegebene Gerade sie schneidet, oder als die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangentenebenen der Fläche, welche durch sie hindurchgehen. Auf analoge Weise bestimmt sich, wenn eine Ecke des Tetraeders gegeben ist, die gegenüberliegende Seitenfläche desselben und umgekehrt. Denken wir uns dann eine Seitenfläche willkürlich gewählt, so ist zur Bestimmung eines sich selbst conjugirten Tetraeders, dem sie angehört, in ihr eine gerade Linie als Kante und in dieser ein Punkt als Ecke willkürlich festzusetzen und damit erst das Tetraeder bestimmt. Dies entspricht genau der Zahl von überzähligen Constanten, welche die allgemeine Gleichung

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0$$

enthält; denn diese Zahl ist sechs, und es entsprechen drei von ihnen der Wahl der Ebene, zwei der geraden Linie in ihr, und eine, die letzte, der Wahl des Eckpunktes in dieser.

Man sieht leicht in den Sätzen, wonach je zwei Eckpunkte eines Tetraeders mit den Durchschnittspunkten der sie verbindenden Kante in der Fläche eine Reihe harmonischer Punkte, und zwei Seitenebenen eines solchen Tetraeders mit den beiden durch ihre gemeinschaftliche Kante gehenden Tangentenebenen der Fläche ein harmonisches Büschel bilden, fernere Constructionsmittel für dieselbe Aufgabe.

Wir bemerken noch, wie die Theorie der conjugirten Durchmesser und Diametralebenen, der Asymptotenkegel etc. mit specialisirenden Bestimmungen dieser Theorie der sich selbst conjugirten Tetraeder zusammenhängen. Wenn eine der vier Flächen des Tetraeders mit der unendlich entfernten Ebene zusammenfällt, so reducirt sich ihr analytisches Symbol auf eine Constante und die allgemeine Gleichungsform der gegenwärtigen Betrachtung auf die einem System conjugirter Durchmesser und Diametralebenen entsprechenden der Art. 71, 83 f. Eine grosse Anzahl der an diese sich anschliessenden Sätze lassen sich hier als Specialfälle der allgemeinen Theorie erkennen. So schliesst sich auch die Theorie der reellen geraden Linien in den Flächen zweiten Grades an sie an; zwei Glieder der Gleichung sind negativ.

Im Art. 146 ist bewiesen worden, dass für zwei gegebene Flächen zweiten Grades immer vier Ebenen existiren, welchen in Bezug auf beide die nämlichen Pole entsprechen. Wenn man diese Ebenen durch $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ bezeichnet, so werden die Gleichungen beider Flächen in die Form

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0, \quad a'L^2 + b'M^2 + c'N^2 + d'P^2 = 0$$

transformirt. Die Möglichkeit dieser Transformation kann auch a priori aus der Zählung der Constanten erkannt werden, denn die Polynome L, M, N, P enthalten implicite je drei Constanten und die gedachten Formen der allgemeinen Gleichung enthalten ausserdem drei Constanten explicite; das System derselben schliesst somit achtzehn Constanten ein und ist daher hinreichend allgemein, um die Gleichungen von irgend zwei Flächen zweiten Grades zu ersetzen. Dass sich diese

Transformation auf alle Flächen eines Büschels erstreckt, liegt in der Natur der Sache.

In derselben Art scheinen die Gleichungen von drei Flächen zweiten Grades in die Form

$$aL^2+bM^2+cN^2+dP^2+eQ^2=0,\ a'L^2+b'M^2+c'N^2+d'P^2+e'Q^2=0,$$
$$a''L^2+b''M^2+c''N^2+d''P^2+e''Q^2=0$$

gebracht werden zu können, für L, M, N, P, Q als fünf Ebenen, deren Gleichungen die identische Relation $L+M+N+P+Q=0$ erfüllen. Denn jedes der fünf linearen Polynome enthält drei Constanten und jede der obigen drei Gleichungen überdies deren vier, so dass die Gesammtzahl der Constanten des Systems siebenundzwanzig ist; dasselbe erscheint somit allgemein genug zum Ausdruck von drei beliebigen Flächen zweiten Grades. Dennoch ist dies nicht der Fall — ein Beispiel für die Unsicherheit dieser Schlussweise.[37])

B. Im Art. 368 der „Kegelschnitte“ ist gezeigt, dass die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte derselben Ebene mit ihren gemeinsamen Tangenten in einem Kegelschnitte liegen, der der Ort der Scheitel harmonischer Tangentenbüschel jener beiden ist und mit ihnen dasselbe Tripel harmonischer Pole hat; sowie ferner, dass die acht Tangenten derselben in ihren gemeinsamen Punkten einen Kegelschnitt berühren, der die Enveloppe der Träger harmonischer Punktepaare jener beiden und noch demselben Tripel conjugirt ist. Wenn man von den gegebenen Kegelschnitten eine Centralprojection macht, in welcher die eine Seite des gemeinsamen Tripels zur unendlich fernen Geraden wird, so sind die Bilder concentrische Kegelschnitte und die andern Seiten das gemeinsame Paar ihrer conjugirten Durchmesser. Die angeführten Sätze ergeben sich dann unmittelbar. Analoge Sätze gelten für drei Flächen zweiten Grades, welche ein gemeinsames Quadrupel harmonischer Pole besitzen und lassen sich eben so einfach beweisen: Für drei solche Flächen berühren die 24 Tangentialebenen in ihren acht gemeinsamen Punkten eine Fläche zweiten Grades und die 24 Berührungspunkte ihrer acht gemeinsamen Tangentialebenen liegen in einer Fläche zweiten Grades; die 24 Tangenten ihrer gemeinsamen Curven in jener, und die 24 Erzeugenden ihrer gemeinsamen Developpabeln in dieser berühren Flächen zweiten Grades, welche alle dasselbe Quadrupel haben und von deren letzten die einen zugleich von allen Trägern harmonischer Schnittpunktepaare, die andern von

allen Scheitelkanten harmonischer Tangentialebenenpaare berührt werden.[38])

Wir denken die Flächen auf das gemeinsame Quadrupel bezogen, also in den Gleichungen

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0,\ b_1x_1^2 + \cdots = 0,\ c_1x_1^2 \cdots = 0$$

ausgedrückt und setzen y_i, z_i als zwei Punkte einer Geraden von den Coordinaten p_{ik} (Art. 55) voraus, welche mit ihnen harmonische Paare von Schnittpunkten bestimmt; dann erkennt man leicht als die Bedingungsgleichungen (vergl. „Kegelschnitte", Art. 341, 2)

$$0 = (b_2c_3 + b_3c_2)p_{23}^2 + (b_1c_4 + b_4c_1)p_{14}^2 + (b_3c_1 + b_1c_3)p_{31}^2$$
$$+ (b_2c_4 + b_4c_2)p_{24}^2 + (b_1c_2 + b_2c_1)p_{12}^2 + (b_3c_4 + b_4c_3)p_{34}^2;$$

$$0 = (c_2a_3 + c_3a_2)p_{23}^2 + \cdots\cdot,\ 0 = (a_2b_3 + a_3b_2){}_{23}^2 + \cdots\cdot.$$

Die Gerade p_{ij} aber berührt die Fläche zweiter Ordnung

$$a_{1k}x_1^2 + a_{2k}x_2^2 + a_{3k}x_3^2 + a_{4k}x_4^2 = 0,$$

wenn die fernere Bedingung erfüllt ist

$$0 = a_{2k}a_{3k}p_{23}^2 + a_{1k}a_{4k}p_{14}^2 + a_{3k}a_{1k}p_{31}^2 + a_{2k}a_{4k}p_{24}^2$$
$$+ a_{1k}a_{2k}p_{12}^2 + a_{3k}a_{4k}p_{34}^2.$$

Man kann nun zwischen diesen vier Gleichungen drei der Quadrate der p_{ik} eliminiren und erhält drei Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse von dreien der Coefficienten a_{ik} zum vierten; aber man erhält vier Gruppen von Werthen derselben und somit vier Flächen zweiten Grades, welche der Bedingung entsprechen. Dass die Tangenten der paarweise gemeinsamen Curven in den gemeinschaftlichen Punkten und die Erzeugenden der paarweise gemeinsamen Developpabeln in den gemeinschaftlichen Tangentialebenen diese Flächen gleichfalls berühren, ist geometrisch evident.

155. Die geraden Verbindungslinien der Ecken eines Tetraeders mit den entsprechenden Ecken des ihm in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades polaren Tetraeders gehören zu dem nämlichen System der Erzeugenden eines Hyperboloids mit einem Mantel. Die Durchschnittslinien der entsprechenden Flächen beider Tetraeder besitzen die nämliche Eigenschaft.[39])

Wenn wir das eine Tetraeder als das fundamentale denken, so sind die Coordinaten der Ecken des andern nach Art. 80 proportional den $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$; $A_{12}, A_{22}, A_{23}, A_{24}$; $A_{13}, A_{23}, A_{33}, A_{34}$ und $A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}$ respective; somit sind die Gleichungen der vier von dem Satze bezeichneten Geraden

$$\frac{x_2}{A_{12}} = \frac{x_3}{A_{13}} = \frac{x_4}{A_{14}}, \quad \frac{x_3}{A_{23}} = \frac{x_4}{A_{24}} = \frac{x_1}{A_{12}},$$

$$\frac{x_4}{A_{34}} = \frac{x_1}{A_{13}} = \frac{x_2}{A_{23}}, \quad \frac{x_1}{A_{14}} = \frac{x_2}{A_{24}} = \frac{x_3}{A_{34}}.$$

Die Bedingung nun, unter welcher eine beliebige Gerade

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0, \quad \xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 + \xi_4' x_4 = 0$$

die erste dieser Linien schneidet, wird erhalten, indem man x_1 zwischen den letzten beiden Gleichungen eliminirt, und ist unter Anwendung der Strahlencoordinaten $\pi_{ik} = \xi_i \xi_k' - \xi_i' \xi_k$ des Art 55

$$A_{12}\pi_{12} - A_{13}\pi_{31} + A_{14}\pi_{14} = 0.$$

In derselben Art findet man die Bedingungen für das Durchschneiden dieser Geraden mit den drei andern geraden Linien wie folgt

$$-A_{12}\pi_{12} + A_{23}\pi_{23} + A_{24}\pi_{24} = 0,$$

$$A_{13}\pi_{31} - A_{23}\pi_{23} + A_{34}\pi_{34} = 0,$$

$$-A_{14}\pi_{14} + A_{24}\pi_{24} - A_{34}\pi_{34} = 0;$$

da die Summe dieser vier Bedingungsgleichungen identisch verschwindet, so ist jede derselben eine Folge der drei andern, d. h. jede gerade Linie, welche drei der betrachteten Geraden schneidet, begegnet auch der vierten unter ihnen, welches die Behauptung enthält. (Vergl. „Kegelschn.“, Art. 118 und 312, 3.)

Die Gleichung des Hyperboloids selbst wird nach den Methoden des Art. 116 erhalten, z. B. indem man ausdrückt, dass die ersten drei unserer Geraden von einer geraden Linie

$$\frac{x_4 x_1' - x_4' x_1}{a} = \frac{x_4 x_2' - x_4' x_2}{b} = \frac{x_4 x_3' - x_4' x_3}{c}$$

geschnitten werden; denn dann folgen die Gleichungen

$$\frac{A_{12}x_4 - A_{14}x_2}{b} = \frac{A_{13}x_4 - A_{14}x_3}{c}, \quad \frac{A_{23}x_4 - A_{24}x_3}{c} = \frac{A_{12}x_4 - A_{24}x_1}{a},$$

$$\frac{A_{13}x_4 - A_{34}x_1}{a} = \frac{A_{23}x_4 - A_{34}x_2}{b},$$

aus denen man durch Multiplication die a, b, c eliminirt und die Gleichung des Hyperboloids erhält als

$$(A_{23}x_4 - A_{24}x_3)(A_{13}x_4 - A_{34}x_1)(A_{12}x_4 - A_{14}x_2)$$
$$= (A_{23}x_4 - A_{34}x_2)(A_{13}x_4 - A_{14}x_3)(A_{12}x_4 - A_{24}x_1)$$

oder

$$\begin{aligned}&(A_{12}A_{34} - A_{24}A_{13})(A_{23}x_1x_4 + A_{14}x_2x_3)\\ &+ (A_{13}A_{24} - A_{14}A_{23})(A_{12}x_3x_4 + A_{34}x_1x_2)\\ &+ (A_{14}A_{23} - A_{12}A_{34})(A_{13}x_2x_4 + A_{24}x_1x_3) = 0.\end{aligned}$$

156. Der zweite Theil des Satzes entspricht dem ersten nach dem Gesetze der Dualität; wir geben aber als eine Uebung einen besondern Beweis desselben. Für das Fundamentaltetraeder und sein polares sind die Gleichungen der vier geraden Linien des Satzes

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, \quad a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0;\\ x_2 &= 0, \quad a_{12}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0;\\ x_3 &= 0, \quad a_{13}x_2 + a_{23}x_2 + a_{34}x_4 = 0;\\ x_4 &= 0, \quad a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 = 0.\end{aligned}$$

Eine beliebige gerade Linie

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 + \xi_4x_4 = 0, \quad \xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3 + \xi_4'x_4 = 0$$

schneidet jede derselben, wenn sie die vier Bedingungen

$$\begin{aligned}a_{12}\pi_{34} - a_{13}\pi_{24} + a_{14}\pi_{23} &= 0,\\ -a_{12}\pi_{34} + a_{24}\pi_{31} + a_{23}\pi_{14} &= 0,\\ a_{13}\pi_{24} - a_{23}\pi_{14} + a_{34}\pi_{12} &= 0,\\ -a_{14}\pi_{23} - a_{24}\pi_{31} - a_{34}\pi_{12} &= 0\end{aligned}$$

erfüllt. Das Theorem ist wie vorher durch das Factum bewiesen, dass die Summe dieser vier Bedingungsgleichungen identisch verschwindet. Die Gleichung des Hyperboloids ist in diesem Falle

$$\begin{aligned}&a_{12}a_{13}a_{14}x_1^2 + a_{23}a_{12}a_{24}x_2^2 + a_{23}a_{13}a_{34}x_3^2 + a_{14}a_{24}a_{34}x_4^2\\ &+(a_{23}x_2x_3 + a_{14}x_1x_4)(a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34}) + (a_{13}x_1x_3 + a_{24}x_2x_4)(a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14})\\ &+ (a_{12}x_1x_2 + a_{34}x_3x_4)(a_{23}a_{14} + a_{13}a_{24}) = 0.\end{aligned}$$

Es ist ein specieller Fall dieser Theoreme, dass die geraden Linien, welche die Ecken eines einer Fläche

zweiten Grades umgeschriebenen Tetraeders mit den Berührungspunkten der Gegenflächen desselben verbinden, Erzeugende des nämlichen Hyperboloids sind; und ebenso die vier Geraden, in welchen die Flächen eines eingeschriebenen Tetraeders von den Tangentialebenen in den Gegenecken geschnitten werden.

157. Die folgenden geometrischen Erläuterungen über diese hyperboloidischen Relationen mögen nützlich sein, weil sie sie mit dem Satz von den perspectivischen Dreiecken verbinden. Zu drei Ebenen entsprechen in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades drei Pole, deren Verbindungsebene sie in einem Dreiseit schneidet, das zum Dreieck der Pole perspectivisch liegt in Bezug auf den in der Ebene enthaltenen Kegelschnitt der Fläche („Kegelschn.“ Art. 118; 320, 1; 361, 1); also gehen die Verbindungsebenen der Kanten des Dreiflachs der drei Ebenen je mit dem Pole der gegenüberliegenden Fläche derselben durch eine Gerade.

Sind also die Ecken von zwei polarconjugirten Tetraedern A_1, A_2, A_3, A_4 und A_1', A_2', A_3', A_4' mit A_i' als Gegenecke der Polarebene von A_i, so ergiebt sich von jeder der acht Ecken aus eine Gerade in der beschriebenen Art; und weil sie für A_1 den drei Ebenen $A_1A_2A_2'$, $A_1A_3A_3'$, $A_1A_4A_4'$ gemein ist, so schneidet sie die Geraden A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4' und weil sie durch A_1 geht auch A_1A_1'. So erhalten wir aus den acht Ecken acht gerade Linien, welche A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' A_4A_4' schneiden und dual entsprechend. Beide hyperboloidische Relationen sind bewiesen.[40])

Man sieht aus der Entwicklung, dass für alle die Flächen zweiten Grades, für welche zwei feste Ebenen gegebene Pole haben, der Pol einer beliebigen dritten Ebene auf einen gewissen ebenen Ort beschränkt ist. Insbesondere ist das Centrum der Flächen zu zwei gegebenen Paaren von Pol und Polarebene in einer festen Geraden gelegen.

B. 1. Die vier Höhenlinien eines beliebigen Tetraeders sind Mantellinien des einen Systems und die vier Normalen der Flächen, die man in ihren Höhenschnittpunkten errichtet, die zu ihnen parallelen des andern Systems von einem einfachen gleichseitigen Hyperboloid. Seien A_i die Ecken und A_i ihre Gegenflächen sowie h_i die zugehörigen Höhen und $A_1^*, \ldots$ ihre Fusspunkte, so denken wir aus jeder Ecke die Schnittgerade der durch ihre drei Kanten normal zu den respectiven Gegenflächen

gelegten Ebenen (die Höhen eines sphärischen Dreiecks schneiden sich ja auch in einem Punkte) und erkennen damit, dass diese Gerade die drei ungleichnamigen Höhen schneidet, während sie in der Ecke, von der sie ausgeht, auch die gleichnamige trifft. Somit gehören die Höhen des Tetraeders zu einer Regelschaar.

Sodann ist eine Ebene durch h_2 und parallel zu h_1 als normal zu A_1 und A_2 auch normal zu A_3A_4 und enthält also die zugehörige Höhe des Dreiecks $A_2A_3A_4$; die Ebene durch h_3 und parallel zu h_1 enthält ebenso die Höhe desselben Dreiecks aus A_3, die Durchschnittslinie beider ist also die im Höhenschnitt des Dreiecks $A_2A_3A_4$ auf seiner Ebene errichtete Normale und diese nach ihrer Construction die zu h_1 parallele Linie der andern Regelschaar desselben Hyperboloids. Die Ebene A_1 schneidet endlich das Hyperboloid in einem Kegelschnitte, der als durch die Ecken eines Dreiecks und seinen Höhenschnitt gehend eine gleichseitige Hyperbel sein muss, und das Hyperboloid enthält Tripel orthogonaler Mantellinien, weil die zu den Asymptoten dieser Hyperbel parallelen Mantellinien unter einander und auch auf h_1 rechtwinklig sind, d. h. es ist gleichseitig. (Art. 124.) Man zeige, wie dies ein Specialfall des allgemeinen Satzes ist.

B. 2. Die Normalebenen zu den Kanten eines Tetraeders, welche die Mittelpunkte der jeweiligen Gegenkante enthalten, schneiden sich im Mittelpunkte des obigen gleichseitigen Hyperboloids.

B. 3. In jedem Tetraeder liegen der Schwerpunkt, der Mittelpunkt der Kugel durch seine Ecken und der Mittelpunkt des Hyperboloids seiner Höhen in einer geraden Linie.

158. Man kann den Pascal'schen Satz für Kegelschnitte in dieser Form aussprechen: Die Seiten eines Dreiecks durchschneiden einen Kegelschnitt in sechs Punkten, welche paarweise in drei geraden Linien liegen, die mit den Gegenseiten des Dreiecks drei in gerader Linie liegende Punkte bestimmen. Der analoge Ausdruck des Theorems von Brianchon ist leicht zu finden. Auf Grund dieses Ausdrucks hat Chasles[41]) das folgende als das dem Pascal'schen analoge Theorem in der Geometrie des Raumes ausgesprochen: Die Kanten eines Tetraeders durchschneiden eine Fläche zweiten Grades in zwölf Punkten, durch welche, durch je drei in den von derselben Ecke des Tetraeders ausgehenden Kanten eine, vier Ebenen bestimmt sind, deren Durchschnittslinien mit der jedesmaligen Gegenfläche des Tetraeders Erzeugende des

nämlichen Systems eines gewissen Hyperboloids sind. Man bildet leicht das reciproke Theorem, welches keines besonderen Beweises bedarf, wenn das eben Ausgesprochene bewiesen ist. (Vergl. Art. 142, B. 5.)

Sind dazu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ die Flächen des Tetraeders, und ist

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ & - (a_{23} + a_{23}^{-1}) x_2 x_3 - (a_{13} + a_{13}^{-1}) x_3 x_1 - (a_{12} + a_{12}^{-1}) x_1 x_2 \\ & - (a_{14} + a_{14}^{-1}) x_1 x_4 - (a_{24} + a_{24}^{-1}) x_2 x_4 - (a_{34} + a_{34}^{-1}) x_3 x_4 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichung der Fläche zweiten Grades, so können die vier Ebenen in der Form

$$x_1 = a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4, \quad x_2 = a_{12} x_1 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4,$$

$$x_3 = a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{34} x_4, \quad x_4 = a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3$$

dargestellt werden, und ihre Durchschnittslinien mit den vier Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ bilden ein System von geraden Linien, von dem in den letzten Art. bewiesen ist, dass sie Erzeugende des nämlichen Systems eines Hyperboloids mit einem Mantel sind. Die Interpretation derselben Gleichungen nach den Ebenencoordinaten ξ_i giebt einen dualistisch entsprechenden Satz.

159. Drei Mantellinien der einen Regelschaar eines einfachen Hyperboloids, setzen wir g_1, g_2, g_3, bilden mit irgend dreien der andern Regelschaar l_1, l_2, l_3 desselben sechs windschiefe Sechsseite, für welche je sechs ihrer neun Schnittpunkte und Verbindungsebenen Ecken und Flächen sind; z. B. $g_1 l_2 g_3 l_1 g_2 l_3$ mit den Eckpunkten und zugehörigen Tangentialebenen des Hyperboloids als Flächen $g_1 l_2$, $l_2 g_3$, $g_3 l_1$, $l_1 g_2$, $g_2 l_3$ und $l_3 g_1$. Solche Sechsseite bieten Eigenschaften dar, nach denen man sie als Pascal'sche und Brianchon'sche bezeichnen kann. Denn erstens gehen die drei Verbindungsgeraden ihrer Gegeneckenpaare durch einen Punkt und zweitens liegen die drei Schnittlinien ihrer Gegenflächenpaare in einer Ebene. Nämlich die ersten d. h. die Linien von $g_1 l_2$ nach $l_1 g_2$, von $l_2 g_3$ nach $g_2 l_3$ und von $g_3 l_1$ nach $l_3 g_1$ gehen durch einen Punkt, weil sie paarweis in einerlei Ebene liegen, nämlich die erste und zweite offenbar in der Ebene $g_2 l_2$, die zweite und dritte in der Ebene $g_3 l_3$ und die dritte mit der ersten in der

Ebene $g_1 l_1$; und die letzten, d. h. die Schnittlinien der Ebenenpaare $g_1 l_2$, $l_1 g_2$ — $l_2 g_3$, $g_2 l_3$ und $g_3 l_1$, $l_3 g_1$ liegen in einer Ebene, weil sie sich paarweis schneiden, nämlich die erste und zweite im Punkte $g_2 l_2$, die zweite und dritte im Punkte $g_3 l_3$ und die dritte und erste im Punkte $g_1 l_1$. Man kann jenen Schnittpunkt der Gegeneckenverbindungslinien den Brianchonpunkt und diese Verbindungsebene der Gegenflächenschnittlinien die Pascal'sche Ebene des windschiefen Sechsseits nennen und sieht, dass diese Eigenschaften eines solchen daran hängen, dass auch seine Gegenseiten sich schneiden, womit ja auch die Zugehörigkeit seiner geradzahligen Seiten zur einen und seiner ungeradzahligen Seiten zur andern Regelschaar eines einfachen Hyperboloids bedingt ist. Brianchonpunkt und Pascalebene sind Pol und Polarebene in Bezug auf das Hyperboloid.[42])

Die Existenz des Brianchonpunktes giebt für den Tangentenkegel des durch das windschiefe Sechsseit bestimmten Hyperboloids die Eigenschaft von sechs seiner Tangentialebenen, dass die Verbindungsebenen der gegenüberliegenden Kanten der von ihnen gebildeten sechsflächigen Ecke sich in einer Geraden schneiden, nämlich der Verbindungslinie des Brianchonpunktes mit der Spitze des Kegels — für den Umriss oder Schattenkegelschnitt also die Eigenschaft des Brianchon'schen Satzes für sechs seiner Tangenten. Und wenn wir das Hyperboloid und die Pascalebene des auf jenem liegenden Sechsseits mit einer beliebigen Ebene schneiden, so liefern die Flächen des Sechsseits in ihr die Verbindungsgeraden der Schnitte mit je zwei aufeinander folgenden Seiten und den Satz von Pascal für die bezüglichen sechs Punkte des Schnittes und mit seiner Schnittlinie mit der Pascalebene als ihrer Pascal'schen Linie.

Endlich sehen wir sofort, dass aus einem beliebigen windschiefen Sechsseit $(abcdef)$ für irgend einen gegebenen Punkt P sich ein hyperboloidisches Sechsseit ergiebt, welches diesen Punkt zu seinem Brianchonpunkte hat; zieht man nämlich von dem Punkte P aus zu den drei Gegenseitenpaaren a, d; b, e und c, f des ersten Sechsseits die Transversalen, so sind ihre Schnitte mit den aufeinander folgenden Seiten $a, b \ldots$ die aufeinander folgenden Ecken eines hyperboloidischen Sechsseits mit P als Brianchonpunkt. Und das zugehörige Hyperboloid schneidet die Seiten $a, b \ldots$ in sechs weiteren Punkten, welche in derselben Ordnung die Ecken eines zweiten hyperboloidischen Sechsseits auf

demselben Hyperboloid (jedoch mit einem andern Brianchonpunkte) sind. Und dualistisch für das beliebige windschiefe Sechsseit *abcdef* und eine willkürliche Ebene als Pascalebene.[43])

B. Analytisch können wir die Fläche zweiten Grades

$$x_2 x_3 = x_1 x_4$$

durch den Einheitpunkt und das Vierseit der Fundamentallinien $A_1 A_3 A_4 A_2$ betrachten und die ungeraden resp. die geraden Seiten des windschiefen Sechsseits auf demselben durch

$$x_1 = \lambda_1 x_2,\ x_3 = \lambda_1 x_4;\quad x_1 = \lambda_2 x_3,\ x_2 = \lambda_2 x_4$$

darstellen. Die Coordinaten des Schnittpunktes solcher zwei Geraden sind proportional zu $\lambda_1 \lambda_2$, λ_2, λ_1, 1 und die Gleichung der zugehörigen Tangentialebene T_{12} ist

$$x_1 - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_3 + \lambda_1 \lambda_2 x_4 = 0.$$

Somit ist der Brianchonpunkt der Durchschnitt der Ebenen

$$x_1 - \lambda_1 x_2 - \lambda_4 x_3 + \lambda_1 \lambda_4 x_4 = 0,$$
$$x_1 - \lambda_5 x_2 - \lambda_2 x_3 + \lambda_2 \lambda_5 x_4 = 0,$$
$$x_1 - \lambda_3 x_2 - \lambda_6 x_3 + \lambda_3 \lambda_6 x_4 = 0;$$

seine Gleichung ist daher

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ 1, & -\lambda_1, & -\lambda_4, & \lambda_1 \lambda_4 \\ 1, & -\lambda_5, & -\lambda_2, & \lambda_2 \lambda_5 \\ 1, & -\lambda_3, & -\lambda_6, & \lambda_3 \lambda_6 \end{vmatrix} = 0,$$

und die Gleichung der Pascal'schen Ebene kann geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \lambda_1 \lambda_4, & \lambda_4, & \lambda_1, & 1 \\ \lambda_2 \lambda_5, & \lambda_2, & \lambda_5, & 1 \\ \lambda_3 \lambda_6, & \lambda_6, & \lambda_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man diese Determinante mit $\lambda_1 - \lambda_5$ in der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} 1, & -\lambda_1, & -\lambda_2, & \lambda_1 \lambda_2 \\ 1, & -\lambda_5, & -\lambda_4, & \lambda_5 \lambda_4 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix},$$

so erhält man

$$\begin{vmatrix} \mathsf{T}_{12}, & 0, & 0, & (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_2) \\ \mathsf{T}_{45}, & 0, & 0, & (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_4) \\ x_3, & \lambda_1, & \lambda_5, & \lambda_3 \\ x_4, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

d. i.

$$\mathsf{T}_{12}(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_4) - \mathsf{T}_{45}(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2) = 0;$$

man erhält analoge Formen für T_{23}, T_{56} und T_{34}, T_{61}, zum Zeichen, dass die Pascalebene die Schnittlinie dieser Ebenenpaare enthält.

Und weil für jede Gruppe unbestimmter Grössen x_1, x_2, x_3, x_4

$$\left\| \begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & 1 \\ \lambda_1\lambda_2, & \lambda_2, & \lambda_1, & 1 \\ \lambda_4\lambda_5, & \lambda_4, & \lambda_5, & 1 \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} 1, & -\lambda_1, & -\lambda_4, & \lambda_1\lambda_4 \\ 1, & -\lambda_5, & -\lambda_2, & \lambda_2\lambda_5 \\ 1, & -\lambda_3, & -\lambda_6, & \lambda_3\lambda_6 \end{matrix} \right\|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathsf{T}_{14}, & \mathsf{T}_{25}, & \mathsf{T}_{36} \\ 0, & 0, & (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6) \\ 0, & 0, & (\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_3) \end{vmatrix} = 0$$

ist, so liegt jeder Punkt x_i des Raumes mit den Punkten 1, 2; 4, 5 und dem Punkte in einer Ebene, dessen Coordinaten die Determinanten der zweiten Matrix sind — d. h. diese letzten drei Punkte sind in gerader Linie, womit bestätigt ist, dass die Gegeneckenverbindungslinien unseres Sechsseits sich durchschneiden.

X. Kapitel.

Focalpunkte und confocale Flächen zweiten Grades.

160. Wenn $U = 0$ eine Kugel repräsentirt, so drückt die Gleichung einer mit ihr sich doppelt berührenden Fläche zweiten Grades $U = LM$ (vergl. „Kegelschn.“, Art. 289) aus, dass das Quadrat der von irgend einem Punkte der Fläche zweiten Grades an die Kugel zu legenden Tangente zu dem Rechteck der Entfernungen desselben Punktes von zwei festen Ebenen in einem constanten Verhältnisse steht.

Die Ebenen $L = 0$, $M = 0$ sind Ebenen der Kreisschnitte der Fläche zweiten Grades, weil sie Ebenen ihres Durchschnitts mit einer Kugel sind; ihre Durchschnittslinie ist daher zu einer Axe der Fläche parallel. (Art. 105, 152.)

In der Theorie der Kegelschnitte ist gezeigt worden (Art. 289), dass der Brennpunkt eines Kegelschnitts als ein unendlich kleiner Kreis angesehen werden darf, welcher mit dem Kegelschnitt eine doppelte Berührung besitzt, und dass die Directrix die entsprechende Berührungssehne ist. In derselben Art können wir einen Focalpunkt (Focus, Brennpunkt) einer Fläche zweiten Grades als eine unendlich kleine Kugel definiren, welche mit der Fläche eine doppelte Berührung in den Punkten der entsprechenden Directrix hat, d. h. der Punkt (α, β, γ) ist ein Focalpunkt, wenn die Gleichung der Fläche zweiten Grades in der Form

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \Phi$$

dargestellt werden kann, in welcher Φ das Product der Gleichungen zweier Ebenen ist. Wir müssen aber die zwei Fälle einzeln untersuchen, in welchen diese Ebenen reell

und in welchen sie imaginär sind, denn in dem einen ist die Gleichung von der Form $U = LM$, in dem andern von der Form $U = L^2 + M^2$.

In dem ersten Falle ist die Directrix $L = 0$, $M = 0$ derjenigen Axe der Fläche parallel, durch welche die reellen Ebenen der Kreisschnitte gelegt werden können; z. B. der mittleren Axe des Ellipsoids. In dem zweiten Falle ist dagegen diese Linie parallel zu einer der andern Axen der Fläche.

In jedem Falle ist die Schnittcurve der Fläche zweiten Grades mit einer durch einen Focalpunkt und die entsprechende Directrix gehenden Ebene ein Kegelschnitt, welcher diesen Punkt und diese Linie zum Focalpunkte und zur Directrix hat.

Wir können direct zeigen, dass die Gerade $L = M = 0$ einer Axe der Fläche parallel ist, indem wir die Coordinatenebenen x und y als zwei durch sie gehende zu einander rechtwinklige Ebenen wählen. Dann sind L und M von der Form $\lambda x + \mu y$ und somit LM sowohl als $L^2 + M^2$ von der Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

und man zeigt wie in der analytischen Geometrie der Ebene, dass durch Drehung der Coordinatenebenen x, y diese Grösse in die Form $px^2 \pm qy^2$ übergeführt werden kann. Die Gleichungen $U = LM$, $U = L^2 + M^2$ sind also in entwickelter Form

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = px^2 \pm qy^2,$$

und da die Glieder yz, zx, xy derselben fehlen, so sind die Coordinatenaxen den Axen der Fläche parallel.

161. Ein Brennpunkt einer ebenen Curve ist (vergl. „Höhere Curven" Art. 139) als der Durchschnittspunkt von zwei ihrer Tangenten definirt worden, deren jede durch einen der Kreispunkte im Unendlichen geht. Die soeben gegebene Definition für einen Focalpunkt einer Fläche zweiten Grades kann in analoger Weise ausgesprochen werden. Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten ein Focalpunkt ist, sahen wir soeben, so lässt sich die Gleichung der Fläche in der Form $U = LM$ darstellen für U oder

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

als die linke Seite der Gleichung eines Kegels, der den Focalpunkt zum Scheitel hat und durch den imaginären Kreis im

Unendlichen geht. Die Form der Gleichung zeigt (Art. 148), dass dieser Kegel mit der Fläche zweiten Grades eine doppelte Berührung in den Punkten hat, wo die Gerade $L = M = 0$ sie schneidet.

Die Tangentialebenen der Fläche in diesen Berührungspunkten sind so zugleich Tangentialebenen des Kegels und also des imaginären Kreises im Unendlichen, oder sie gehen je durch eine seiner Tangenten. Wir können also einen Focalpunkt als einen Punkt erklären, durch welchen zwei Gerade σ gehen, welche die Fläche berühren und den nicht reellen Kreis im Unendlichen schneiden, während zugleich die entsprechenden Tangentialebenen der Fläche je die entsprechende Tangente dieses Kreises enthalten. Diese Definition gilt nicht nur für Flächen zweiten Grades, sondern für Flächen jeder Ordnung.

Von ihr ausgehend müssen wir, um die Focalpunkte einer Fläche zu finden, diejenigen Tangentialebenen der Fläche betrachten, welche durch die Tangenten des imaginären Kreises im Unendlichen gehen, Tangentialebenen, welche eine einfach unendliche Reihe bilden und daher eine *developpable* Fläche umhüllen. Wir wollen sagen die *Focaldeveloppable*. Die Durchschnittslinie solcher zwei benachbarten Tangentialebenen ist eine Gerade σ und eine Erzeugende der Developpabeln. Ein Focalpunkt als Durchschnittspunkt zweier Linien σ oder zweier Erzeugenden der developpabeln Fläche ist ein Doppelpunkt in derselben, und eine developpable Fläche enthält im Allgemeinen eine *Reihe* von Doppelpunkten, die eine Doppelcurve oder eine *Gruppe von Doppelcurven* bilden. Auch der unendlich ferne imaginäre Kreis ist eine mehrfache Curve der Focaldeveloppabeln. Die Focalpunkte einer Fläche sind daher im Allgemeinen nicht vereinzelte Punkte, sondern sie treten als *Reihen* in einer Curve oder in Curven auf. Wir werden im nächsten Art. direct zeigen, dass und wie dies bei einer Fläche zweiten Grades der Fall ist.[44])

Nach dieser Erklärung haben zwei Flächen dieselben Focalpunkte, wenn die besprochene developpable Fläche, welche der *einen* Fläche und dem imaginären Kreis im Unendlichen gemeinsam umgeschrieben ist, auch der *andern* umgeschrieben ist.

162. Wir untersuchen nun direct, ob *eine gegebene Fläche zweiten Grades nothwendig einen Focalpunkt und ob sie mehr als einen Focalpunkt besitzt.*

Zu grösserer Allgemeinheit nehmen wir die Directrix statt

zur Axe der z als eine Parallele derselben, so dass die Gleichung des letzten Art. wird

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=p(x-\alpha')^2+q(y-\beta')^2;$$

für entgegengesetzte Vorzeichen von p und q sind die Ebenen der Berührung zwischen dem Focalpunkte und der Fläche zweiten Grades reell und für gleiche Vorzeichen derselben Grössen sind sie imaginär.

Wir wünschen zu wissen, ob durch eine geeignete Wahl der Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', p, q$ die bezeichnete Form der Gleichung mit derjenigen einer gegebenen Fläche

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$$

identisch gemacht werden kann.

Dazu muss nun zuerst, damit der Anfangspunkt mit dem Centrum der Fläche zusammenfalle, $\gamma=0$, $\alpha=p\alpha'$, $\beta=q\beta'$ sein. Mit Hilfe dieser Relationen eliminiren wir die Grössen α' und β' aus der gegebenen Gleichung und erhalten als ihre neue Form

$$(1-p)x^2+(1-q)y^2+z^2=\frac{1-p}{p}\alpha^2+\frac{1-q}{q}\beta^2,$$

so dass die Identität stattfindet, wenn

$$1-p=\frac{C}{A},\ \text{d. i. } p=\frac{A-C}{A};\ 1-q=\frac{C}{B},\ \text{d. i. } q=\frac{B-C}{B},$$

und

$$\frac{1-p}{p}\alpha^2+\frac{1-q}{q}\beta^2=C$$

oder

$$\frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C}=1$$

ist. Für die gegebene Fläche sind somit die Constanten p und q bestimmt, der Focalpunkt ist aber irgend ein Punkt des Kegelschnitts

$$\frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C}=1,$$

den man deshalb als einen Focalkegelschnitt der Fläche benennt.

Wir haben weder über die Vorzeichen noch über die relativen Grössen der A, B, C etwas bestimmt und müssen daraus schliessen, dass in jeder der drei Hauptebenen ein Focal-

kegelschnitt existirt, sowie dass derselbe mit dem entsprechenden Hauptschnitte der Fläche confocal ist, denn die Kegelschnitte

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} = 1, \quad \frac{\alpha^2}{A-C} + \frac{\beta^2}{B-C} = 1$$

sind offenbar confocal.

Für irgend einen Punkt (α, β) eines Focalschnitts als Focalpunkt wird die entsprechende Directrix eine Normale zur Ebene des Kegelschnitts, welche durch den Punkt

$$\alpha' = \frac{\alpha}{p}, \quad \beta' = \frac{\beta}{q} \quad \text{oder} \quad \alpha' = \frac{A\alpha}{A-C}, \quad \beta' = \frac{B\beta}{B-C}$$

geht. Die geometrische Interpretation dieser Werthe sagt aus, dass der Fusspunkt der Directrix der Pol der Tangente des Focalkegelschnitts im Punkte (α, β) in Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche ist. Denn diese Tangente ist

$$\frac{\alpha x}{A-C} + \frac{\beta y}{B-C} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha' x}{A} + \frac{\beta' y}{B} = 1,$$

d. i. offenbar die Polare von (α', β') in Bezug auf den Hauptschnitt

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Nach der Theorie der confocalen Kegelschnitte in der analytischen Geometrie der Ebene folgt hieraus, dass die gerade Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Fusspunkte der entsprechenden Directrix eine Normale des Focalkegelschnitts ist.

Der Ort der Fusspunkte der Directrixen für einen gegebenen Focalkegelschnitt ist derjenige Kegelschnitt, welchen man als den Ort der Pole der Tangenten des Focalkegelschnitts in Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche erhält; d. h. seine Gleichung ist

$$x^2 \frac{A-C}{A^2} + y^2 \frac{B-C}{B^2} = 1,$$

wie man findet, wenn man mittelst der Relationen zwischen den Grössen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ die α, β aus der Gleichung des Focalkegelschnitts eliminirt. Die Directrixen selbst bilden einen geraden Cylinder, für welchen der soeben bestimmte Kegelschnitt die Basis ist.

163. Wir wollen nun speciell die verschiedenen Arten der centrischen Flächen zweiten Grades einzeln untersuchen, um die Natur ihrer Focalkegelschnitte zu studiren und namentlich zu erkennen, zu welcher von den zwei verschiedenen Arten von Focalpunkten die Punkte derselben gehören.

Die Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C}=1$$

repräsentirt offenbar eine Ellipse, wenn C unter den drei Grössen A, B, C die algebraisch kleinste, eine Hyperbel, wenn es die mittlere, und eine imaginäre Ellipse, wenn es die grösste unter ihnen ist.

Von den drei Focalkegelschnitten einer centrischen Fläche zweiten Grades ist daher immer der eine eine Ellipse, der andere eine Hyperbel und der dritte ist imaginär. Oder was dasselbe ist: Die Focaldeveloppable einer Fläche zweiten Grades besitzt vier Doppelcurven zweiten Grades, zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre. In dem Falle des Ellipsoids z. B. sind die Gleichungen der Focalellipse und der Focalhyperbel durch

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1$$

respective dargestellt; und man erhält aus ihnen die correspondirenden Gleichungen für das Hyperboloid mit einem Mantel durch die Veränderung des Vorzeichens von c^2, und diejenigen für das Hyperboloid mit zwei Mänteln durch die gleichzeitige Veränderung der Zeichen von b^2 und c^2.

Wir haben gesehen, dass den Focalpunkten imaginäre oder reelle Berührungsebenen entsprechen, je nachdem p und q, d. i. $(A-C):A$ und $(B-C):B$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Denken wir C als die kleinste der drei Grössen A, B, C, so sind die Zähler dieser Werthe gleichzeitig positiv, während ihre Nenner in den Fällen des Ellipsoids und des Hyperboloids mit einem Mantel ebenfalls positiv sind, und in dem Falle des Hyperboloids mit zwei Mänteln einer derselben negativ ist. Sonach sind in den Fällen des Ellipsoids und des Hyperboloids mit einem Mantel die Punkte der Focalellipse Focalpunkte von der Classe derer, welchen imaginäre

Berührungsebenen entsprechen; sie gehören aber zur Classe der Focalpunkte mit reellen Berührungsebenen in dem Falle des Hyperboloids mit zwei Mänteln.

Ist sodann C die mittlere unter den drei Grössen A, B, C, so haben die Zähler der betrachteten Werthe von p und q entgegengesetzte Zeichen, während die Nenner in dem Falle des Ellipsoids gleiche, in den beiden Fällen der Hyperboloide aber entgegengesetzte Zeichen besitzen. Demnach gehören in dem Falle des Ellipsoids die Punkte der Focalhyperbel zur Classe derjenigen Focalpunkte, deren Berührungsebenen reell sind und sie gehören zur entgegengesetzten Classe in den Fällen der Hyperboloide. Wir bemerken zusammenfassend, dass für das Hyperboloid mit einem Mantel alle Focalpunkte von der Classe derer sind, welchen imaginäre Berührungsebenen entsprechen; dass dagegen die Focalkegelschnitte der beiden andern Flächen Focalpunkte von beiden Classen enthalten, indem für das Ellipsoid die Focalellipse und für das Hyperboloid mit zwei Mänteln die Focalhyperbel diejenigen Focalpunkte enthalten, denen nur imaginäre Berührungsebenen entsprechen. Dies ist gleichbedeutend mit dem, was wir schon im Art. 160 erkannten, dass Focalpunkte mit reellen Berührungsebenen nur in den Normalebenen zu derjenigen Axe der Fläche liegen können, welche den reellen Ebenen der Kreisschnitte angehört.

164. Die Focalkegelschnitte mit reellen Berührungsebenen durchschneiden die Fläche reell, während die Focalkegelschnitte mit imaginären Berührungsebenen dies nicht thun.

Denn wenn die Gleichung der Fläche in die Form $U = L^2 + M^2$ gebracht werden kann, welche der imaginären Berührung entspricht, so entspricht dem Verschwinden des Werthes von U für die Coordinaten irgend eines Punktes der Fläche das gleichzeitige Verschwinden der Werthe von L und M, d. h. der Brennpunkt liegt in der Directrix. Dies findet aber nur in dem speciellen Falle statt, wo die Fläche eine Kegelfläche ist. Denn für den Brennpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten enthält die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2 + M^2,$$

in welcher $L = 0$, $M = 0$ Ebenen repräsentiren, die den Anfangspunkt enthalten, nur Glieder, die in den Veränderlichen x, y

vom zweiten Grade sind, und bezeichnet daher eine Kegelfläche. (Art. 68.)

Derjenige Focalkegelschnitt, welchem die reellen Berührungsebenen entsprechen, geht dagegen durch die Kreispunkte oder Umbilics der Fläche. Denn wenn die Gleichung der Fläche in die Form $U = LM$ gebracht werden kann, so entspricht dem Verschwinden des Polynoms U für die Coordinaten irgend eines Punktes der Pläche das gleichzeitige Verschwinden eines der beiden linearen Polynome L oder M.

Weil aber die Fläche durch den Durchschnitt von $U = 0$ und $L = 0$ hindurchgeht, so schneidet die Ebene $L = 0$, wenn jener Punkt $U = 0$ in $L = 0$ liegt, die Fläche in einem unendlich kleinen Kreise, d. h. sie ist die einem Kreispunkte entsprechende Tangentenebene. Nach dieser Eigenschaft sind die Focalkegelschnitte dieser Art von Mac-Cullagh als „umbilicar focal conics" bezeichnet worden; wir bezeichnen sie umschreibend als die Focalkegelschnitte, welche die Kreispunkte der Fläche enthalten.

165. Der Schnitt einer Fläche zweiten Grades mit einer durch einen Focalpunkt nach der entsprechenden Directrix gehenden Ebene ist ein Kegelschnitt, der jenen zum Brennpunkte und diese zur Directrix hat.

Denn für den Anfangspunkt als Brennpunkt ist die Gleichung der Fläche entweder

$$x^2 + y^2 + z^2 = LM \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 + z^2 = L^2 + M^2.$$

Und wir erhalten für $z = 0$ die Gleichung des Schnittes $x^2 + y^2 = lm$ oder $x^2 + y^2 = l^2 + m^2$, für $l = 0$, $m = 0$ als die Schnittlinien von $z = 0$ mit den Ebenen $L = 0$, $M = 0$. Geht aber die Ebene durch $L = M = 0$ selbst, so fallen die letzten beiden Geraden in eine Linie zusammen und die Gleichung wird $x^2 + y^2 = l^2$, d. h. der Schnitt ist ein Kegelschnitt, der den Anfangspunkt zum Brennpunkt und die Gerade $l = 0$ zur Directrix hat.

Da die Verbindungsebene von Focalpunkt und Directrix in jenem normal zum Focalkegelschnitt ist (Art. 160), so kann man den bewiesenen Satz auch so aussprechen: Die Schnittcurve einer Fläche zweiten Grades mit einer zu einem Focalkegelschnitt normalen Ebene hat den entsprechenden Fusspunkt in diesem zum Brennpunkte. (Art. 137.)

166. Wenn die gegebene Fläche zweiten Grades ein

Kegel, ihre Gleichung also von der Form

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0$$

ist, so geschieht die Reduction derselben auf die Form $U = L^2 + M^2$ genau wie vorher und es ergiebt sich, dass die Coordinaten des Focalpunktes die Relation

$$\frac{\alpha^2}{A - C} + \frac{\beta^2}{B - C} = 0$$

erfüllen müssen, welche zwei gerade Linien oder eine unendlich kleine Ellipse repräsentirt, je nachdem $(A - C)$ und $(B - C)$ entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben. Oder mit andern Worten: die Focalhyperbel degenerirt in zwei gerade Linien, die Focalellipse zieht sich in den Scheitel des Kegels zusammen. Für den durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dargestellten Kegel ist die Gleichung der Focallinien

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

Die Focallinien eines Kegels, welcher zu einem Hyperboloid asymptotisch ist, sind die Asymptoten der Focalhyperbel des Hyperboloids.

Die Focalpunkte in diesen Focallinien sind von der Classe derjenigen, welchen imaginäre Berührungsebenen entsprechen. Nur der Scheitel, welcher überdies in doppelter Weise Focalpunkt dieser Art ist, ist auch ein Focalpunkt der andern Art, denn die Gleichung des Kegels kann in jeder der drei Formen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + c^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 + c^2}{b^2} y^2,$$

oder $= \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 + c^2}{c^2} z^2$, oder $= \frac{b^2 - a^2}{b^2} y^2 + \frac{a^2 + c^2}{c^2} z^2$

geschrieben werden. Die Directrix, welche dem Scheitel als Focalpunkt entspricht, geht durch ihn selbst.

Die gerade Linie, welche einen Punkt der Focallinie mit dem Fusspunkte der entsprechenden Directrix verbindet, ist zur Focallinie normal. Dies ergiebt sich als ein specieller Fall des vorher von den Focalcurven allgemein bewiesenen Gesetzes, lässt sich

aber auch sehr einfach direct beweisen. Die Coordinaten des Fusspunktes der Directrix sind, wie wir sahen,

$$\alpha' = \frac{A\alpha}{A - C}, \quad \beta' = \frac{B\beta}{B - C};$$

die Gleichung der Verbindungslinie desselben mit dem Focalpunkte (α, β) ist somit

$$\frac{\beta}{B - C} x - \frac{\alpha}{A - C} y = \alpha\beta \left(\frac{1}{B - C} - \frac{1}{A - C}\right),$$

und die Bedingung, unter welcher diese zur Focallinie $\beta x = \alpha y$ normal ist,

$$\frac{\alpha^2}{A - C} + \frac{\beta^2}{B - C} = 0;$$

diese Bedingung ist aber nach dem Vorhergehenden erfüllt.

Ebenso ergiebt sich als ein specieller Fall des Art. 162, dass der in der Kegelfläche durch eine Normalebene zu einer seiner Focallinien bestimmte Schnitt den Fusspunkt in dieser letzteren zum Brennpunkte hat.

Die Focallinien dieses Art. sind somit identisch mit denen des Art. 137.

Die Focallinien eines Kegels sind normal zu den Kreisschnitten des Reciprocalkegels. (Vgl. Art. 137.)

Denn die Kreisschnitte des Kegels $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ sind nach Art. 105 parallel zu den Ebenen

$$(A - C)\, x^2 + (B - C)\, y^2 = 0,$$

und die entsprechenden Focallinien des Reciprocalkegels

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0$$

sind, wie wir eben gesehen haben, durch

$$\frac{x^2}{A - C} + \frac{y^2}{B - C} = 0$$

dargestellt, so dass sie nothwendig normal zu den durch erstere Gleichung bestimmten Ebenen sind.

167. Die Untersuchung der Focalpunkte bei andern Arten der Flächen zweiten Grades geschieht in der nämlichen Weise. So für die in der Gleichung

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 2z$$

enthaltenen Paraboloide, ausgehend von der Darstellbarkeit derselben in jeder der beiden Formen

$$(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2=\frac{A-B}{A}\left(x-\frac{A}{A-B}\alpha\right)^2+(z-\gamma+B)^2$$

mit

$$\frac{\alpha^2}{A-B}=2\gamma-B,$$

oder

$$x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\frac{B-A}{A}\left(y-\frac{B}{B-A}\beta\right)^2+(z-\gamma+A)^2,$$

mit

$$\frac{\beta^2}{B-A}=2\gamma-A.$$

Es erhellt daraus, dass ein Paraboloid zwei Focalparabeln besitzt, von denen jede, wie man leicht sieht, mit dem entsprechenden Hauptschnitte confocal ist; sowie dass der Focalpunkt zur einen oder zur andern der vorher discutirten Arten gehört, je nach dem Zeichen des Bruches $(A-B):A$.

In dem Falle des elliptischen Paraboloids, als in welchem A und B zugleich positiv sind, ist für A als die grössere der Grössen die Focalcurve in der Ebene xz von der Art derer, welchen imaginäre Berührungsebenen entsprechen, während die in der Ebene der yz der entgegengesetzten Art angehört.

Da für den Wechsel der Zeichen von A oder B der Werth $(A-B):A$ positiv bleibt, so gehören alle Focalpunkte des hyperbolischen Paraboloids zu denen der ersten Classe; wir haben dies vorher als eine Eigenschaft des Hyperboloids mit einem Mantel erkannt und mussten sie, da das hyperbolische Paraboloid als ein specieller Fall dieses Hyperboloids angesehen werden kann, hier wieder finden.

Es bleibt wahr, dass die Verbindungslinie eines Focalpunktes mit dem Fusspunkte der entsprechenden Directrix normal zur Focalcurve und dass der Fusspunkt der Directrix der Pol der Tangente des Focalkegelschnitts in Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche ist. Der Fusspunkt der Directrix gehört einer Parabel an und die Directrixen selbst erzeugen einen parabolischen Cylinder.

Zur Vervollständigung der Discussion bleibt übrig, die Focalpunkte der verschiedenen Arten von Cylindern zu bezeichnen; man findet ohne irgend eine Schwierigkeit, dass zwei

Focallinien existiren, so lange die Basis des Cylinders eine Ellipse oder Hyperbel ist, Linien, welche durch die Brennpunkte der Basis parallel den Erzeugenden des Cylinders gehen; während, wenn die Basis des Cylinders eine parabolische ist, nur eine durch den Brennpunkt dieser Parabel gehende Focallinie existirt.

168. Die geometrische Interpretation der Gleichung $U = LM$ ist schon gegeben worden. Sie drückt die folgende Eigenschaft der Focalpunkte mit reellen Berührungsebenen aus: Das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes einer Fläche zweiten Grades von einem solchen Focalpunkte ist in einem constanten Verhältnisse zu dem Product der normalen Abstände desselben Punktes von zwei durch die entsprechende Directrix gehenden und den Ebenen der Kreisschnitte parallelen Ebenen.

Die entsprechende Eigenschaft der Focalpunkte der andern Art, welche weniger offen vorliegt, ward von Mac-Cullagh entdeckt und ist in folgendem Satze ausgesprochen: Die Entfernung eines Punktes einer Fläche zweiten Grades von einem Focalpunkte dieser Art ist in einem constanten Verhältnisse zu seiner Entfernung von der entsprechenden Directrix, vorausgesetzt, dass sie parallel zu einer der Ebenen der Kreisschnitte gemessen wird.

In der That, setzen wir voraus, dass die Entfernung eines Punktes (x', y', z') von einer der Axe der z parallelen Directrix durch den Punkt zu bestimmen sei, dessen Coordinaten x und y die Werthe α', β' haben, gemessen überdies parallel einer Ebene $z = mx$; so schneidet eine Parallelebene durch den Punkt (x', y', z'), also $z - z' = m(x - x')$, die Directrix in einem Punkte, dessen x und y jene Werthe α' und β' haben, während sein z durch die Gleichung $z - z' = m(\alpha' - x')$ bestimmt wird. Das Quadrat der fraglichen Entfernung ist daher

$$(x'-\alpha')^2+(y'-\beta')^2+m^2(x'-\alpha')^2=(y'-\beta')^2+(1+m^2)(x'-\alpha')^2.$$

In der Gleichung des Art. 160

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = p(x - \alpha')^2 + q(y - \beta')^2,$$

in welcher p und q beide positiv und p grösser als q vorausgesetzt sind, bezeichnet somit die rechte Seite das q-fache des Quadrats der Entfernung eines Punktes der Fläche zweiten Grades von der Directrix, gemessen parallel der Ebene $z = mx$ für $m^2 = (p - q) : q$.

Die im Art. 162 gegebenen Werthe von p und q beweisen, dass diese Ebene eine Ebene kreisförmigen Schnittes ist, wie solches auch geometrisch aus folgender Betrachtung sich ergiebt. Wir betrachten den Schnitt der Fläche zweiten Grades mit einer Ebene, die der bezeichneten parallel ist. Da die Entfernungen aller Punkte eines solchen Schnittes aus dem nämlichen Punkte der Directrix gemessen werden, so ist die Entfernung jedes Punktes desselben von diesem festen Punkte in einem constanten Verhältnisse zu seiner Entfernung vom Focalpunkte. Wenn aber die Entfernungen eines veränderlichen Punktes von zwei festen Punkten ein constantes Verhältniss behalten, so ist der Ort desselben eine Kugel, d. h. der fragliche Schnitt ist ein Kreis.

Wir begegnen einer scheinbaren Ausnahme in dem einzigen Falle, wo die Entfernung vom Focalpunkte der Entfernung von der Directrix gleich ist. Weil der Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten einander gleich sind, eine Ebene ist, so müssen in diesem Falle die Schnitte der Fläche mit den der betrachteten Ebene parallelen Ebenen gerade Linien sein. Die Erinnerung an die vorhergehenden Artikel zeigt aber (vergl. Art. 163), dass das betrachtete Verhältniss nur in dem Falle des hyperbolischen Paraboloids den Werth Eins hat ($q = 1$), d. i. in dem Falle einer Fläche, welche jene Ebene nicht in Kreisschnitten durchschneidet, weil sie solche gar nicht besitzt.

Mac-Cullagh hat das Verhältniss der Focaldistanz zur Entfernung von der Directrix den Modulus der Fläche und die Focalpunkte mit imaginären Berührungsebenen Modular-Focalpunkte genannt.[45]).

169. Es ist im Art. 150 bemerkt worden, dass alle Flächen zweiten Grades von der Form $U - LM = 0$ von zwei Kegeln umhüllt sind; wenn insbesondere $U = 0$ eine Kugel bezeichnet, so müssen diese Kegel Umdrehungskegel sein, wie alle eine Kugel umhüllenden Kegel; wenn sich diese Kugel endlich auf einen Punkt reducirt, so fallen beide Kegel nothwendig in einen einzigen zusammen, welcher jenen Punkt zum Scheitel hat. Somit ist ein eine Fläche zweiten Grades umhüllender Kegel ein Umdrehungskegel, wenn sein Scheitel ein Focalpunkt der Fläche ist.

Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes geben wir einen directen algebraischen Beweis desselben. Wir bemerken zuerst, dass jede

Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)^2$$

einen geraden Kegel darstellt. Denn wenn die Axen, indem sie rectangulär bleiben, so transformirt werden, dass die durch

$$ax + by + cz = 0$$

dargestellte Ebene eine der Coordinatenebenen wird, so wird die Gleichung des Kegels in die Form

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda X^2$$

übergeführt, die wegen der Gleichheit der Coefficienten von Y^2 und Z^2 einen Umdrehungskegel bezeichnet.

Wenn wir aber nach der Regel des Art. 79 die Gleichung des Kegels bilden, der aus dem Anfangspunkte der Coordinaten der Fläche $x^2 + y^2 + z^2 - L^2 - M^2 = 0$ für

$$L \equiv ax + by + cz + d, \quad M \equiv a'x + b'y + c'z + d'$$

umgeschrieben ist, so erhalten wir

$$(d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2 - L^2 - M^2) + (dL + d'M)^2 = 0$$

oder

$$(d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (d'L - dM)^2 = 0,$$

welche nach dem Vorigen die Gleichung eines geraden Kegels ist.

Zusatz. Weil bei der Bildung der Reciprocalfläche der der Originalfläche aus dem Anfangspunkte umgeschriebene Kegel dem Asymptotenkegel der Reciprocalfläche entspricht, so folgt aus diesem Art., dass die Reciproke einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Focalpunkt eine Umdrehungsfläche zweiten Grades ist.

Eine Reihe weiterer Eigenschaften der Focalpunkte, welche aus den vorgetragenen Grundsätzen leicht abgeleitet werden können, empfehlen wir dem Leser als Beispiele zur Uebung.

B. 1. Die Polare einer Directrix ist die Tangente des Focalkegelschnitts im entsprechenden Focalpunkte.

B. 2. Die Polarebene eines Punktes einer Directrix ist zu der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem entsprechenden Focalpunkte normal.

B. 3. Wenn eine durch den festen Punkt O gezogene gerade Linie irgend eine Directrix schneidet und in der Fläche zweiten Grades die Punkte A und B bestimmt,

so ist für den entsprechenden Focalpunkt F

$$\tan \tfrac{1}{2} AFO \cdot \tan \tfrac{1}{2} BFO = \text{const.}$$

Man beweist diesen Satz ganz analog dem in der Theorie der Kegelschnitte gegebenen entsprechenden Theorem. (Vergl. „Kegelschn.“ Art. 208, 7.)

B. 4. Die Constanz des bezeichneten Products bleibt bestehen, wenn der Punkt O sich auf einer Fläche zweiten Grades bewegt, die mit der gegebenen die Ebenen der Kreisschnitte, den Focalpunkt und die Directrix gemeinschaftlich hat.

B. 5. Wenn zwei derartige Flächen zweiten Grades von einer durch die gemeinschaftliche Directrix gehenden Geraden geschnitten werden, so bestimmen die auf ihr in beiden Flächen begrenzten Sehnen am Focalpunkte gleiche Winkel.

B. 6. Wenn eine gerade durch eine Directrix gehende Linie eine der beiden Flächen zweiten Grades berührt, so bestimmt die durch die andere begrenzte Sehne am Focalpunkte einen Winkel von constanter Grösse.

170. Offenbar ist das Product der Normalen constant, die von den Focalpunkten einer Umdrehungsfläche um die transversale Axe auf irgend eine ihrer Tangentenebenen gefällt werden. Wenn wir nach der Methode des Art. 138 von dieser Eigenschaft zu ihrer reciproken übergehen, so erkennen wir, das das Quadrat der Entfernung des Ursprungs von einem beliebigen Punkte der Reciprocalfläche in einem constanten Verhältnisse ist zu dem Producte der Entfernungen des Punktes von zwei festen Ebenen.

Aus Art. 138, 5 erhellt, dass diese Ebenen die Ebenen der Kreisschnitte für den Asymptotenkegel der Fläche, d. i. dass sie auch die Ebenen der Kreisschnitte der neuen Fläche selbst sind. Die Durchschnittslinie dieser Ebenen ist die reciproke Linie derjenigen Geraden, welche die beiden Focalpunkte verbindet, d. h. von der Axe der Umdrehungsfläche. Wir wissen aus Art. 168, dass die eben bewiesene Eigenschaft jedem Punkte des Focalkegelschnitts angehört, welcher durch die Kreispunkte der Fläche geht*) und erkennen nun, dass die Reciproke einer be-

*) Es geschah auf diesem Wege, dass zuerst diese Eigenschaft und die Unterscheidung der beiden Arten von Focalpunkten vom Verfasser gefunden wurde.

liebigen Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Punkt des durch die Kreispunkte gehenden Focalkegelschnitts eine Umdrehungsfläche ist, welche die transversale Axe zur Drehungsaxe hat; dass sie aber in Bezug auf einen Punkt des andern Focalkegelschnitts, oder, wie man sagen kann, in Bezug auf einen modularen Focalpunkt eine Umdrehungsfläche ist, welche die conjugirte Axe zu ihrer Axe hat.

Man geht daher von Eigenschaften der Umdrehungsflächen nach den Gesetzen der Reciprocität zu entsprechenden Eigenschaften irgend einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Focalpunkt und die entsprechende Directrix über, und in jedem Falle ist die Axe der Umdrehungsfläche die Reciproke der dem gegebenen Focalpunkte entsprechenden Directrix und parallel zu der Tangente des Focalkegelschnitts in dem betrachteten Focalpunkte. (Vergl. Art. 162.)

In den folgenden Beispielen stehen links die Eigenschaften der Umdrehungsflächen, rechts die entsprechenden Eigenschaften der Flächen zweiten Grades im Allgemeinen.

B. 1. Der Tangentenkegel einer Umdrehungsfläche aus einem Punkte der Axe ist ein gerader Kegel, dessen Tangentenebenen mit der zur Axe normalen Ebene seiner Berührungscurve gleiche Winkel bilden.

Jeder Kegel, der einen Focalpunkt zum Scheitel und einen die entsprechende Directrix enthaltenden ebenen Schnitt einer Fläche zweiten Grades zur Basis hat, ist ein gerader Kegel, welcher die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Pol der Schnittebene zur Axe hat; diese letztere Gerade ist normal zu der durch den Focalpunkt und die Directrix bestimmten Ebene.

B. 2. Jede Tangentenebene ist normal zu der durch ihren Berührungspunkt und die Axe bestimmten Ebene.

Die Gerade, welche einen Focalpunkt mit einem beliebigen Punkte der Fläche verbindet, ist normal zu der Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Durchschnittspunkte der entsprechenden Tangentenebene und der Directrix.

B. 3. Die Polarebene eines

Die gerade Linie, welche einen

Punktes ist zu der durch ihn mit der Axe bestimmten Ebene normal.

B. 4. Die durch einen Focalpunkt mit irgend zwei polaren Geraden bestimmten Ebenen sind zu einander normal. (Art. 138, 7.)

B. 5. Wenn ein Kegel einer Umdrehungsfläche umgeschrieben ist, so ist eine seiner Hauptebenen durch den Scheitel und die Axe bestimmt.

B. 6. Jeder aus einem Focalpunkte über einem ebenen Schnitt der Umdrehungsfläche beschriebene Kegel ist gerade. (Art. 138, 2.)

beliebigen Punkt mit einem Focalpunkte verbindet, ist normal zu der geraden Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Durchschnittspunkte seiner Directrix mit der Polarebene des Punktes.

Eine den Kreisschnitten parallele und durch eine Directrix gehende Ebene wird von zwei einander polaren Geraden in Punkten geschnitten, welche an dem entsprechenden Focalpunkte einen rechten Winkel bestimmen.

Der aus einem Focalpunkte über einen ebenen Schnitt einer Fläche zweiten Grades beschriebene Kegel hat zur einen Axe die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Durchschnittspunkte der entsprechenden Directrix und der Schnittebene.

Der aus einem Focalpunkte über der Durchschnittscurve einer durch die entsprechende Directrix gehenden und zu Kreisschnitten parallelen Ebene mit einem beliebigen Tangentenkegel der Fläche beschriebene Kegel ist gerade.

Eine Untersuchung der Kugeln von endlichem Radius, welche eine auf die Hauptaxen bezogene Fläche zweiten Grades doppelt berühren (Art. 160), kann in ähnlicher Weise durchgeführt werden.[16])

Focalkegelschnitte und confocale Flächen.

171. Im vorhergehenden Abschnitte haben wir eine Uebersicht der Beziehungen gegeben, welche jeder Focalpunkt einer Fläche zweiten Grades für sich betrachtet zur Fläche hat. Im Folgenden wollen wir dagegen eine Uebersicht von den Eigenschaften der Kegelschnitte geben, welche die Reihen der Focalpunkte bilden und von den Eigenschaften der confocalen Flächen.

Wir nehmen dazu unsern Ausgang von einer von derjenigen der Art. 158 f. unabhängigen Methode, durch welche wir direct zur Betrachtung der Focalkegelschnitte gelangen.

Concentrische und coaxiale Kegelschnitte werden als confocal bezeichnet, wenn die Differenz der Quadrate ihrer Halbaxen die nämliche ist; d. h. die mit der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a > b),$$

confocalen Kegelschnitte sind durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 \pm \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 \pm \lambda^2} = 1$$

gegeben. So lange λ^2 das positive Zeichen erhält und so lange bei negativem Zeichen λ^2 numerisch kleiner als b^2 ist, ist der confocale Kegelschnitt eine Ellipse; wenn λ^2 negativ und zwischen b^2 und a^2 enthalten ist, so ist der confocale Kegelschnitt eine Hyperbel und für $\lambda^2 > a^2$ ist er imaginär.

Für $\lambda^2 = b^2$ reducirt sich die Gleichung auf $y^2 = 0$, d. h. die Axe der x ist die Grenze, welche die confocalen Ellipsen von den confocalen Hyperbeln trennt. Aber die beiden Brennpunkte gehören noch in einem besonderen Sinne zu ihr. Denn man kann durch einen gegebenen Punkt (x', y') im Allgemeinen zwei Kegelschnitte legen, welche zu einem gegebenen confocal sind, weil man zur Bestimmung von λ^2 eine quadratische Gleichung

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y'^2}{b^2 - \lambda^2} = 1$$

erhält, d. i.

$$\lambda^4 - \lambda^2 (a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2) + a^2 b^2 - b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = 0.$$

Für $y' = 0$ wird sie auf $(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - a^2 + x'^2) = 0$ reducirt, so dass $\lambda^2 = b^2$ eine ihrer Wurzeln ist, und für $x'^2 = a^2 - b^2$ auch die zweite Wurzel diesen Werth $\lambda^2 = b^2$ erhält, zur Bestätigung des speciellen Sinnes, in welchem die Brennpunkte dem Werthe $\lambda^2 = b^2$ entsprechen. Wenn wir in der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 1, \ \lambda^2 = b^2, \ \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 0$$

machen, so erhalten wir die Gleichung der beiden Brennpunkte

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

172. In derselben Art nennen wir zwei concentrische und coaxiale Flächen zweiten Grades confocal, wenn die Differenzen der Quadrate der Axen für beide Flächen dieselben sind; so dass für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(mit $a > b > c$) die allgemeine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 \pm \lambda^2}+\frac{y^2}{b^2 \pm \lambda^2}+\frac{z^2}{c^2 \pm \lambda^2}=1$$

alle confocalen Flächen repräsentirt.

Für das positive Zeichen von λ^2 und für negative Werthe desselben, welche kleiner sind als c^2, ist die Fläche ein Ellipsoid. Eine Kugel von unendlichem Halbmesser ist die Grenze der Ellipsoide des Systems, denn sie entspricht dem speciellen Werthe $\lambda^2 = \infty$.

Für negative Werthe von λ^2 zwischen den Grenzen c^2 und b^2 repräsentirt die Gleichung ein Hyperboloid mit einem Mantel und für Werthe zwischen den Grenzen b^2 und a^2 ein Hyperboloid mit zwei Mänteln. Dem Grenzwerthe $\lambda^2 = c^2$ entspricht die Ebene $z = 0$ als Grenze zwischen den Ellipsoiden und den einfachen Hyperboloiden des Systems; wenn wir aber in der allgemeinen Gleichung die Substitutionen

$$\lambda^2 = c^2, \quad \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 0$$

vollziehen, so entsprechen die Punkte des so erhaltenen Kegelschnitts

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2}+\frac{y^2}{b^2 - c^2}=1$$

in einem speciellen Sinne jener Grenze zwischen den Ellipsoiden und Hyperboloiden, welcher wir eben gedacht haben. Denn durch einen Punkt (x', y', z') lassen sich im Allgemeinen drei einer gegebenen Fläche zweiten Grades confocale Flächen legen, weil für λ^2 als die unbekannte Grösse eine cubische Bedingungsgleichung

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda^2}+\frac{y'^2}{b^2 - \lambda^2}+\frac{z'^2}{c^2 - \lambda^2}=1$$

oder

$$x'^2(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)+y'^2(c^2-\lambda^2)(a^2-\lambda^2)+z'^2(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)$$
$$= (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)$$

gefunden wird. Für $z = 0$ ist eine der Wurzeln dieser Gleichung $\lambda^2 = c^2$ und die beiden andern bestimmen sich aus der reducirten Gleichung

$$x'^2 (b^2 - \lambda^2) + y'^2 (a^2 - \lambda^2) = (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2).$$

Wenn

$$\frac{x'^2}{a^2 - c^2} + \frac{y'^2}{b^2 - c^2} = 1$$

ist, so wird eine Wurzel dieser Gleichung $\lambda^2 = c^2$, und dies bezeichnet den speciellen Sinn, in welchem die Punkte der Focalellipse diesem Grenzwerthe entsprechen.

In analoger Weise trennt die Ebene $y = 0$ die Hyperboloide mit einem Mantel von denen mit zwei Mänteln, und die Focalhyperbel in dieser Ebene

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

ist diesem Grenzwerthe in der nämlichen speciellen Art verbunden.

Der Focalkegelschnitt in der dritten Hauptebene, welchen die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} = 1$$

bezeichnen würde, ist imaginär*).

173. Die drei durch einen Punkt gehenden mit einer gegebenen Fläche zweiten Grades confocalen Flächen sind respective ein Ellipsoid, ein einfaches Hyperboloid und ein zweifaches Hyperboloid.

Denn wenn wir in die zur Bestimmung von λ^2 dienende cubische Gleichung des letzten Artikels die successiven Substitutionen

$$\lambda^2 = a^2, \quad \lambda^2 = b^2, \quad \lambda^2 = c^2, \quad \lambda^2 = -\infty$$

vollziehen, so erhalten wir Resultate von den respectiven Vorzeichen $+$, $-$, $+$, $-$, welches beweist, dass diese Gleichung stets drei reelle Wurzeln hat, von denen eine kleiner als c^2, eine

*) Dieselbe Sache spricht sich auch folgendermassen aus: In jedem Punkte einer Hauptebene treffen ausser dem Focalkegelschnitt derselben zwei confocale Flächen zusammen. Durch jeden Punkt einer Hauptaxe geht eine einzige confocale Fläche; die beiden in ihr sich schneidenden Focalkegelschnitte repräsentiren die andern. Im Centrum der Flächen schneiden sich die Ebenen der drei Focalkegelschnitte.

zweite zwischen c^2 und b^2, und eine dritte zwischen b^2 und a^2 enthalten ist. Wie im letzten Artikel erhellt, dass die diesen Werthen entsprechenden Flächen respective ein Ellipsoid, ein einfaches und ein zweifaches Hyperboloid sind.

174. Ein anderer passender Weg zur Auflösung des Problems, durch einen gegebenen Punkt die zu einer gegebenen Fläche zweiten Grades confocalen Flächen zu beschreiben, besteht darin, die primäre Axe der gesuchten Fläche als unbekannte Grösse zu wählen, weil dann $a'^2 - b'^2$ und $a'^2 - c'^2$ gegeben sind, welche wir durch h^2 und k^2 respective bezeichnen wollen, so haben wir die in a'^2 cubische Gleichung

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{a'^2 - h^2} + \frac{z'^2}{a'^2 - k^2} = 1,$$

oder
$$a'^6 - a'^4 (h^2 + k^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$+ a'^2 \{h^2k^2 + x'^2 (h^2 + k^2) + y'^2k^2 + z'^2h^2\} - x'^2h^2k^2 = 0.$$

Wir können auf Grund dieser Gleichung die Coordinaten des Durchschnittspunktes von drei confocalen Flächen in Function ihrer Axen bestimmen; denn wenn a'^2, a''^2, a'''^2 die Wurzeln der obigen Gleichung sind, so giebt ihr letztes Glied

$$x'^2h^2k^2 = a'^2a''^2a'''^2,$$

d. h.
$$x'^2 = \frac{a'^2a''^2a'''^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}.$$

Und da wir ebensowohl b^2 oder c^2 als unsere unbekannte Grösse ansehen konnten, so erhalten wir die entsprechenden Ausdrücke

$$y'^2 = \frac{b'^2b''^2b'''^2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}, \quad z'^2 = \frac{c'^2c''^2c'''^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \text{*)}.$$

NB. Wir haben in dem Vorigen b'^2, b''^2, etc. als algebraische Grössen d. h. mit Einschluss ihrer Zeichen vorausgesetzt, so dass

*) Diese Ausdrücke erlauben eine einfache Bestimmung der Coordinaten der Kreispunkte; denn diese sind die Durchschnittspunkte der Focalhyperbel mit der Fläche (Art. 164); da nun für die Focalhyperbel

$$a''^2 = a'''^2 = a^2 - b^2$$

ist, so sind die Coordinaten der Kreispunkte

$$x^2 = a^2\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = c^2\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

z. B. c''^2, als zu einem Hyperboloid mit einem Mantel gehörend, wesentlich negativ ist, wie auch b'''^2 und c'''^2 es sind.

175. Dieselbe cubische Gleichung erlaubt uns auch, den Radius vector des Durchschnittspunktes confocaler Flächen in Function der Axen auszudrücken.

Denn das zweite Glied derselben giebt uns

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + (a^2 - b^2) + (a^2 - c^2) = a'^2 + a''^2 + a'''^2$$

oder

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a'^2 + b''^2 + c'''^2.$$

Dieser Ausdruck hätte auch direct abgeleitet werden können mittelst der für x'^2, y'^2, z'^2 im letzten Art. gegebenen Werthe; es geschieht durch ein Verfahren, welches auch zur Reduction anderer symmetrischer Functionen dieser Coordinaten angewendet werden kann. Denn indem man die vorigen Werthe substituirt und auf gemeinschaftliche Benennung reducirt, wird $x'^2 + y'^2 + z'^2$ zu

$$\frac{a'^2 a''^2 a'''^2 (b^2 - c^2) + b'^2 b''^2 b'''^2 (c^2 - a^2) + c'^2 c''^2 c'''^2 (a^2 - b^2)}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}.$$

Da der Zähler für jede der Voraussetzungen $b^2 = c^2, c^2 = a^2, a^2 = b^2$ mit Null identisch wird, so muss er durch den Nenner ohne Rest theilbar sein. Diese Division kann dann in folgender Weise vollzogen werden: Irgend ein Glied, z. B. $a'^2 a''^2 a'''^2 c^2$ giebt, durch $(a^2 - b^2)$ oder das diesem gleiche $(a'^2 - b'^2)$ dividirt, einen Quotienten $a''^2 a'''^2 c^2$ und einen Rest $b'^2 a''^2 a'''^2 c^2$; dieser Rest giebt, durch $(a''^2 - b''^2)$ dividirt, einen Quotienten $b'^2 a'''^2 c^2$ und einen Rest $b'^2 b''^2 a'''^2 c^2$, welcher in derselben Weise durch $(a'''^2 - b'''^2)$ dividirt einen Quotienten $b'^2 b''^2 c^2$ und einen Rest $b'^2 b''^2 b'''^2 c^2$ giebt, der durch ein anderes Glied des Dividenden aufgehoben wird. Indem man in dieser Weise fortfährt, erhält man das früher gegebene Resultat.

176. Zwei confocale Flächen schneiden einander überall rechtwinklig.

Wenn (x', y', z') ein gemeinschaftlicher Punkt beider Flächen ist und p' und p'' die Längen der Normalen bezeichnen, welche vom Centrum auf die Tangentenebenen beider in diesem Punkte gefällt werden, so sind nach Art. 91 die Richtungscosinus dieser zwei Normalen

$$\frac{p'x'}{a'^2}, \frac{p'y'}{b'^2}, \frac{p'z'}{c'^2}; \quad \frac{p''x'}{a''^2}, \frac{p''y'}{b''^2}, \frac{p''z'}{c''^2}.$$

Sie sind zu einander rechtwinklig, wenn die Bedingung (Art. 13)

$$p'p''\left\{\frac{x'^2}{a'^2a''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c''^2}\right\}=0$$

erfüllt ist. Da aber die Coordinaten x', y', z' den Gleichungen beider Flächen genügen müssen, so haben wir

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1,\quad \frac{x'^2}{a''^2}+\frac{y'^2}{b''^2}+\frac{z'^2}{c''^2}=1,$$

und erhalten durch Subtraction dieser Gleichungen und wegen $a''^2-a'^2=b''^2-b'^2=c''^2-c'^2$ als Rest

$$(a''^2-a'^2)\left\{\frac{x'^2}{a'^2a''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c''^2}\right\}=0,$$

welche die behauptete Rechtwinkligkeit bestätigt.

Im Durchschnittspunkte von drei confocalen Flächen schneidet daher jede Tangentenebene der einen die beiden Tangentenebenen der andern rechtwinklig, oder die Tangentenebene der einen Fläche enthält die Normalen der beiden andern Flächen.

177. Wenn eine Ebene durch das Centrum zu einer Tangentenebene einer Fläche zweiten Grades parallel geht, so sind die Axen des von ihr gebildeten Schnittes den Normalen der beiden confocalen Flächen parallel, welche durch den Berührungspunkt gehen.

Da bereits bewiesen worden ist, dass die Parallelen zu den genannten Normalen rechtwinklig zu einander sind, so bleibt nur zu beweisen übrig, dass sie conjugirte Durchmesser ihrer Schnittcurve sind. Nun ist nach Art. 96 die Bedingung, unter welcher zwei Linien conjugirte Durchmesser sind, durch

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{a'^2}+\frac{\cos\beta\cos\beta'}{b'^2}+\frac{\cos\gamma\cos\gamma'}{c'^2}=1$$

dargestellt und wir haben also für die Richtungscosinus der Normalen

$$\frac{p''x'}{a''^2},\ \frac{p''y'}{b''^2},\ \frac{p''z'}{c''^2};\quad \frac{p'''x'}{a'''^2},\ \frac{p'''y'}{b'''^2},\ \frac{p'''z'}{c'''^2}$$

zu beweisen, dass

$$p''p'''\left\{\frac{x'^2}{a'^2a''^2a'''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b''^2b'''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c''^2c'''^2}\right\}=0$$

ist. Aber die Wahrheit dieser Gleichung ergiebt sich ohne Weiteres aus der Subtraction der zwei Gleichungen des letzten Artikels

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^2} = 0,$$

$$\frac{x'^2}{a'^2 a'''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b'''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c'''^2} = 0.$$

178. Man soll die Längen der Axen des Centralschnittes einer Fläche zweiten Grades durch eine der Tangentenebene im Punkte (x', y', z') parallele Ebene bestimmen.

Aus der Gleichung der Fläche ergiebt sich die Länge eines centralen Radius vector von den Richtungscosinus α, β, γ durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a'^2} + \frac{\cos^2\beta}{b'^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c'^2},$$

und mittelst der für α, β, γ im letzten Artikel gegebenen Werthe finden wir für die Länge einer dieser Axen

$$\frac{1}{\varrho^2} = p''^2 \left\{ \frac{x'^2}{a'^2 a''^4} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^4} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^4} \right\}.$$

Nun gelten die Gleichungen

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^2} = 0,$$

$$\frac{x'^2}{a''^4} + \frac{y'^2}{b''^4} + \frac{z'^2}{c''^4} = \frac{1}{p''^2},$$

und wir erhalten durch ihre Subtraction

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^4} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^4} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^4} = \frac{1}{p''^2 (a'^2 - a''^2)},$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks in den vorher für ϱ^2 bestimmten Werth $\varrho^2 = a'^2 - a''^2$. In derselben Art finden wir für das Quadrat der andern Halbaxe $\varrho^2 = a'^2 - a'''^2$.

Wenn also zwei confocale Flächen zweiten Grades sich durchschneiden, so ist ein Radius der einen, welcher der Normale der andern in einem Punkte ihrer Durchschnittscurve parallel ist, von constanter Länge.

179. Da das Product der Axen eines Centralschnittes mit der Normalen einer parallelen Tangentenebene dem Producte der Axen abc gleich ist (Art. 98), so erhalten wir unmittelbar Ausdrücke für die Längen p', p'', p'''. Wir haben

$$p'^2 = \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{(a'^2 - a''^2)(a'^2 - a'''^2)}, \quad p''^2 = \frac{a''^2 b''^2 c''^2}{(a''^2 - a'^2)(a''^2 - a'''^2)},$$

$$p'''^2 = \frac{a'''^2 b'''^2 c'''^2}{(a'''^2 - a'^2)(a'''^2 - a''^2)}.$$

Diese Werthe hätten auch durch Substitution der früher für x'^2, y'^2, z'^2 gegebenen Ausdrücke in die Gleichung

$$\frac{1}{p'^2} = \frac{x'^2}{a'^4} + \frac{y'^2}{b'^4} + \frac{z'^2}{c'^4}$$

erhalten werden können, indem man den erhaltenen Werth von p'^2 durch die Methode des Art. 175 reducirt.

Der Leser wird die Symmetrie bemerken, welche zwischen diesen Werthen von p'^2, p''^2, p'''^2 und den für x'^2, y'^2, z'^2 gefundenen stattfindet.

Wenn wir die drei Tangentenebenen als Coordinatenebenen betrachten, so werden die Normalen p', p'', p''' die Coordinaten des Centrums der Fläche. Die Analogie zwischen den Werthen für p', p'', p''' und denen für x', y', z' kann daher folgendermassen ausgedrückt werden: Mit dem Punkte (x', y, z') als Centrum können drei confocale Flächen beschrieben werden, welche die drei Tangentenebenen zu Hauptebenen haben und sich in dem Centrum des Originalsystems durchschneiden. Die Axen des neuen Systems von Confocalen sind

$$a', a'', a'''; \quad b', b'', b'''; \quad c', c'', c'''.$$

Die drei Tangentenebenen des neuen Systems sind die drei Hauptebenen des Originalsystems.

Wenn ein Centralschnitt durch x', y', z' zu einer dieser Hauptebenen z. B. der Ebene yz parallel ist, so bestimmt er in der Fläche, zu welcher sie eine Tangentenebene ist, einen Kegelschnitt, für welchen nach Art. 178 die Quadrate der Axen sind $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$. Es ergiebt sich also, dass Richtungen und Grössen der Axen von der Lage des Punktes x', y', z' unabhängig sind. Die Quadrate der Axen sind gleich und entgegengesetzt den Quadraten der Axen des entsprechenden Focalkegelschnitts.

180. Wenn D die Länge des Durchmessers einer Fläche zweiten Grades bezeichnet, welcher der Tangente in einem Punkte ihres Durchschnitts mit einer confocalen Fläche parallel ist und wenn p die Normale auf

ihre Tangentenebene in diesem Punkte darstellt, so ist für alle Punkte der Durchschnittscurve $pD =$ const.

Denn die Tangente in irgend einem Punkte der Durchschnittscurve zweier Flächen ist die Durchschnittslinie ihrer Tangentenebenen in diesem Punkte, und sie ist in diesem Falle normal zu der dritten durch denselben Punkt gehenden confocalen Fläche. (Art. 176.) Nach Art. 178 ist daher $D^2 = a'^2 - a'''^2$ und somit nach Art. 179

$$p^2 D^2 = \frac{a'^2\, b'^2\, c'^2}{a'^2 - a''^2},$$

welches für gegebene a', a'' eine Constante ist.

181. Man soll den Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf ein System confocaler Flächen bestimmen.

Sei $Ax + By + Cz = 1$ die betrachtete Ebene und (X, Y, Z) ihr Pol, so muss die Gleichung

$$\frac{xX}{a^2 - \lambda^2} + \frac{yY}{b^2 - \lambda^2} + \frac{zZ}{c^2 - \lambda^2} = 1$$

mit der ersten identisch werden, d. h. man muss haben

$$\frac{X}{a^2 - \lambda^2} = A, \quad \frac{Y}{b^2 - \lambda^2} = B, \quad \frac{Z}{c^2 - \lambda^2} = C.$$

Die Elimination von λ^2 zwischen diesen Gleichungen liefert für die Gleichungen des Ortes

$$\frac{x}{A} - a^2 = \frac{y}{B} - b^2 = \frac{z}{C} - c^2.$$

Der fragliche Ort ist daher eine zur gegebenen Ebene normale Gerade.

Dies Theorem enthält implicite die Auflösung der Aufgabe: Man soll eine Fläche zweiten Grades bestimmen, die einer gegebenen confocal ist und eine gegebene Ebene berührt; denn da der Pol der Tangentenebene einer Fläche der Berührungspunkt derselben ist, so erhellt zunächst, dass nur eine Fläche der verlangten Art existirt, und dass ihr Berührungspunkt mit der Ebene durch den Durchschnitt des gefundenen Ortes mit ihr bestimmt wird.

Das Theorem dieses Art. sagt: Der Ort des Pols der Tangentenebene einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf eine zu ihr confocale Fläche ist die Normale der ersten Fläche.

182. Man soll die Entfernung zwischen dem Be-

rührungspunkte einer Tangentenebene und ihrem in Bezug auf eine confocale Fläche genommenen Pol bestimmen.

Seien x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes einer Tangentenebene der Fläche von den Axen a, b, c, und X, Y, Z die des Pols derselben Ebene in Bezug auf die confocale Fläche von den Axen a', b', c'; so gelten wie im letzten Artikel die Gleichungen

$$\frac{x'}{a^2} = \frac{X}{a'^2}, \quad \frac{y'}{b^2} = \frac{Y}{b'^2}, \quad \frac{z'}{c^2} = \frac{Z}{c'^2},$$

also

$$X - x' = \frac{a'^2 - a^2}{a^2} x', \quad Y - y' = \frac{b'^2 - b^2}{b^2} y', \quad Z - z' = \frac{c'^2 - c^2}{c^2} z',$$

und durch Quadriren und nachherige Addition erhält man

$$D^2 = (a'^2 - a^2)^2 \left\{ \frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} \right\},$$

oder für p als die vom Centrum auf die Ebene gefällte Normale

$$D = \frac{a'^2 - a^2}{p}.$$

183. **Die Axen des Tangentenkegels einer Fläche zweiten Grades sind die Normalen der drei confocalen Flächen, welche durch den Scheitel des Kegels hindurchgehen.**

Betrachten wir die Tangentenebene einer von diesen durch den Scheitel (x', y', z') gehenden Flächen, so liegt der Pol dieser Ebene in Bezug auf die Originalfläche nach Art. 66 in der Polarebene von (x', y', z') und nach Art. 181 in der Normale der confocalen Fläche; es ist daher der Punkt, in welchem diese Normale die Polarebene von (x', y', z') d. h. die Ebene der Berührungscurve des Kegels durchschneidet.

Aus Art. 65 folgt dann, dass die drei Normalen die Ebene der Berührung in drei Punkten schneiden, von denen jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf die von ihrer Ebene bestimmte Schnittcurve ist; da dieselbe aber zugleich ein Schnitt des Kegels ist, so sind nach Art. 72 die bezeichneten Normalen ein System conjugirter Durchmesser der Kegelfläche, und insbesondere, weil jede von ihnen zu den beiden andern rechtwinklig ist, die Axen derselben.

184. **Wenn durch eine beliebige Tangente einer Fläche zweiten Grades zwei Tangentenebenen an eine zu ihr confocale Fläche gelegt werden, so bilden die-**

selben mit der Tangentenebene der ersten Fläche in dem gegebenen Punkte gleiche Winkel.

Denn diese Tangentenebene ist nach dem letzten Artikel eine Hauptebene des Kegels, welcher den gegebenen Punkt zum Scheitel hat und die confocale Fläche berührt, während die beiden Tangentenebenen des Satzes Tangentenebenen dieses Kegels sind; und zwei Tangentenebenen eines Kegels vom zweiten Grade, welche durch eine in einer Hauptebene enthaltene Gerade hindurchgehen, machen mit dieser Ebene gleiche Winkel.

Die Focalkegel, d. h. diejenigen Kegel, welche aus beliebigen Scheitelpunkten über den Focalkegelschnitten einer Fläche zweiten Grades beschrieben werden, sind die Grenzfälle von Kegeln, welche die confocalen Flächen umhüllen, und die zwei Tangentenebenen eines Focalkegels, welche durch eine beliebige Tangente einer Fläche zweiten Grades gelegt werden können, machen daher gleiche Winkel mit der Tangentenebene der Fläche, welcher jene Tangente angehört.

Wenn die Fläche zweiten Grades selbst ein Kegel ist, so reducirt sich ihr Focalkegelschnitt auf zwei gerade Linien und das eben ausgesprochene Theorem lautet in diesem Falle dahin, dass jede Tangentenebene eines Kegels mit denjenigen Ebenen gleiche Winkel bildet, welche die Berührungsseite mit je einer der Focallinien bestimmt. Wir werden diesen Satz im XII. Kapitel unabhängig beweisen.

185. Aus Art. 183 folgt, dass die Gleichung des Tangentenkegels einer Fläche zweiten Grades die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

annehmen muss, wenn die Normalen der durch seinen Scheitel gehenden confocalen Flächen als Coordinatenaxen gewählt werden. Indem wir dies durch eine wirkliche Transformation bestätigen, erhalten wir zugleich einen unabhängigen Beweis des Satzes des Art. 183 und die Kenntniss der wirklichen Werthe von A, B, C, welche uns später mehrfach von Nutzen sein wird.

Die Art. 79 gegebene Gleichung des Tangentenkegels ist

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1\right)^2,$$

und sie wird, zu parallelen Axen durch den Scheitelpunkt des Kegels transformirt, in die Form

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}\right)^2$$

übergeführt. Um sie nun auf die drei bezeichneten Normalen als Axen zu beziehen, haben wir die Richtungscosinus dieser Linien in die Formeln des Art. 17 einzusetzen und erkennen, dass wir

$$\text{für } x \quad \frac{p'x'}{a'^2}x+\frac{p''x'}{a''^2}y+\frac{p'''x'}{a'''^2}z,$$
$$\text{für } y \quad \frac{p'y'}{b'^2}x+\frac{p''y'}{b''^2}y+\frac{p'''y'}{b'''^2}z,$$
$$\text{für } z \quad \frac{p'z'}{c'^2}x+\frac{p''z'}{c''^2}y+\frac{p'''z'}{c'''^2}z$$

zu substituiren haben.

186. Um das Resultat dieser Substitution leichter zu erkennen, werden die folgenden Formeln nützlich sein. Ist

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1=S,\text{*)}$$

so haben wir wegen

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-1=0,$$
$$\frac{x'^2}{a^2a'^2}+\frac{y'^2}{b^2b'^2}+\frac{z'^2}{c^2c'^2}=\frac{S}{a'^2-a^2};$$

wir finden in gleicher Art

$$\frac{x'^2}{a^2a''^2}+\frac{y'^2}{b^2b''^2}+\frac{z'^2}{c^2c''^2}=\frac{S}{a''^2-a^2},$$

und aus beiden

$$\frac{x'^2}{a^2a'^2a''^2}+\frac{y'^2}{b^2b'^2b''^2}+\frac{z'^2}{c^2c'^2c''^2}=\frac{S}{(a'^2-a^2)(a''^2-a^2)}.$$

*) Wir bemerken, dass diese Grösse S gleich

$$\frac{(a'^2-a^2)(a''^2-a^2)(a'''^2-a^2)}{a^2b^2c^2}$$

ist, weil a'^2-a^2, a''^2-a^2, a'''^2-a^2 die Wurzeln der cubischen Gleichung des Art. 172 sind, deren absolutes Glied $=a^2b^2c^2S$ ist.

Ueberdies erhalten wir aus

$$\frac{x'^2}{a'^4} + \frac{y'^2}{b'^4} + \frac{z'^2}{c'^4} = \frac{1}{p'^2}$$

und

$$\frac{x'^2}{a'^2 a^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c^2} = \frac{S}{a'^2 - a^2},$$

$$\frac{x'^2}{a'^4 a^2} + \frac{y'^2}{b'^4 b^2} + \frac{z'^2}{c'^4 c^2} = \frac{S}{(a'^2 - a^2)^2} - \frac{1}{p'^2 (a'^2 - a^2)}.$$

187. Wenn wir nun die verlangte Transformation ausführen, so erhalten wir auf der linken Seite der Gleichung des Art. 185 den Coefficienten von x^2 in der Form

$$p'^2 S \left\{ \frac{x'^2}{a'^4 a^2} + \frac{y'^2}{b'^4 b^2} + \frac{z'^2}{c'^4 c^2} \right\}$$

und den Coefficienten von xy in der Form

$$2p'p''S \left\{ \frac{x'^2}{a^2 a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2 c''^2} \right\};$$

die linke Seite der transformirten Gleichung wird daher

$$S^2 \left(\frac{p'x}{a'^2 - a^2} + \frac{p''y}{a''^2 - a^2} + \frac{p'''z}{a'''^2 - a^2} \right)^2$$

$$- S \left\{ \frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2} \right\}.$$

Wenn wir aber die Grösse

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}$$

in der nämlichen Weise behandeln, so erhalten wir

$$S \left(\frac{p'x}{a'^2 - a^2} + \frac{p''y}{a''^2 - a^2} + \frac{p'''z}{a'''^2 - a^2} \right),$$

und erkennen, dass ihr Quadrat gegen die erste Gruppe der Glieder der linken Seite verschwindet, so dass die Gleichung des Kegels in die Form

$$\frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

d. i. die erwartete transformirte Form, übergeht.

188. Als specielle Fälle des Vorigen ergeben sich die Gleichungen der Focalkegel (Art. 184), d. h. der Kegel, welche aus dem beliebigen Punkte (x', y', z') über der Focalellipse und der Focalhyperbel beschrieben werden.

Sie entsprechen den Werthen $a^2 - c^2$, $a^2 - b^2$ für das Quadrat der primären Axe, ihre Gleichungen sind daher

$$\frac{x^2}{c'^2} + \frac{y^2}{c''^2} + \frac{z^2}{c'''^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{b'^2} + \frac{y^2}{b''^2} + \frac{z^2}{b'''^2} = 0.$$

Wir hätten diese Gleichungen auch direct erhalten können, wenn wir die Gleichungen der Focalkegel wie in Beisp. 11 des Art. 124 gebildet und sie dann wie in den letzten Art. transformirt hätten.

Man erkennt ohne Schwierigkeit, dass irgend eine Normale und die entsprechende Tangentenebene mit jeder der Hauptebenen einen Punkt und eine Gerade bestimmen, welche in Bezug auf den Focalkegelschnitt derselben Pol und Polare sind. Es ist ein specieller Fall des Art. 183.

Wenn also eine reelle Fläche zweiten Grades durch ihre Hauptebenen, einen ihrer Punkte P und die zugehörige Tangentialebene P bestimmt ist, so ergeben sich wie nach Art. 134 ihre Hauptschnitte auch sofort ihre Focalkegelschnitte (und damit auch ihre Directrixencylinder nach Art. 162) constructiv: In jeder Hauptebene bestimmen die zugehörigen Axen der Fläche als Axen und die Spur der Tangentialebene P mit dem Durchstosspunkte ihrer Normale in P als Paar das Polarsystem, dessen Directrix der zugehörige Focalkegelschnitt ist. Nach Art. 181 bleibt diese Construction gültig für P und P als Pol und Polarebene im Polarsystem der Fläche zweiten Grades, d. h. auch für ein imaginäres Ellipsoid. (Art. 172, λ^2 negativ und grösser als a^2.)[47])

Die in dem vorhergehenden Art. angewendeten Formeln erlauben auch die Transformation einiger andern Gleichungen zu denselben neuen Axen.

B. 1. Man transformire die Gleichung der Fläche zweiten Grades selbst zu den drei Normalen der Confocalen durch den Punkt x', y', z' als Axen.

Die zu parallelen Axen durch den Punkt (x', y', z') transformirte Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + S + 2\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right) = 0;$$

da nun die Transformation der Polynome

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}$$

zu den drei durch jenen Punkt gehenden Normalen der entsprechenden confocalen Flächen als Axen im Art. 187 gegeben worden ist, so wird die fragliche transformirte Gleichung ebenso wie durch Drehung der Axen sofort in der Form

$$S\left(\frac{p'x}{a'^2-a^2}+\frac{p''y}{a''^2-a^2}+\frac{p'''z}{a'''^2-a^2}+1\right)^2$$

$$=\frac{x^2}{a'^2-a^2}+\frac{y^2}{a''^2-a^2}+\frac{z^2}{a'''^2-a^2}$$

gefunden. Die auf der linken Seite derselben zwischen den Klammern stehende Grösse giebt überdies, gleich Null gesetzt, die transformirte Gleichung der Polarebene des Punktes.

B. 2. Wenn der Punkt (x', y', z') in der Fläche selbst liegt, so erfährt diese Gleichung eine Veränderung, die wir angeben wollen. Die zu parallelen Axen transformirte Gleichung ist dann

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}\right)=0;$$

und bei der Transformation wird der Coefficient von x^2

$$p^2\left\{\frac{x'^2}{a^6}+\frac{y'^2}{b^6}+\frac{z'^2}{c^6}\right\}$$

— wir wollen ihn durch $\frac{1}{\gamma^2}$ kurz bezeichnen —, der von y^2

$$p'^2\left(\frac{x'^2}{a'^4a^2}+\frac{y'^2}{b'^4b^2}+\frac{z'^2}{c'^4c^2}\right)=\frac{1}{a^2-a'^2},$$

der von xy

$$2pp'\left(\frac{x'^2}{a^4a'^2}+\frac{y'^2}{b^4b'^2}+\frac{z'^2}{c^4c'^2}\right)=\frac{p'}{p(a'^2-a^2)};$$

der Coefficient von yz verschwindet identisch und die Glieder vom ersten Grade reduciren sich auf $\frac{2x}{p}$; die transformirte Gleichung ist daher

$$\frac{x^2}{\gamma^2}+\frac{y^2}{a^2-a'^2}+\frac{z^2}{a^2-a''^2}-\frac{2p'xy}{p(a^2-a'^2)}-\frac{2p''xz}{p(a^2-a''^2)}+\frac{2x}{p}=0.$$

Wir bemerken, dass γ der zur Normale im Punkte $x'y'z'$ parallele Durchmesser ist und dass wir haben

$$\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{a^2-a'^2}+\frac{1}{a^2-a''^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2};$$

so dass die transformirte Gleichung überdies in der Form geschrieben werden kann

$$\frac{(p'x-py)^2}{a^2-a'^2}+\frac{(p''x-pz)^2}{a^2-a''^2}+(x+p)^2=p^2.$$

B. 3. Wir geben endlich die Transformation der Gleichung der Reciprocalfläche in Bezug auf irgend einen Punkt für die drei Normalen des confocalen Systems durch diesen Punkt als Axen.

Die Gleichung der Reciprocalfläche ist nach Art. 139

$$(xx' + yy' + zz' + k^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

Durch Transformation geht nach den Formeln des Art. 185 die Grösse

$$(xx' + yy' + zz') \text{ in } (p'x + p''y + p'''z + k^2)$$

über; für die Transformation von

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

findet man den Coefficienten von x^2

$$p'^2\left(\frac{a^2x'^2}{a'^4} + \frac{b^2y'^2}{b'^4} + \frac{c^2z'^2}{c'^2}\right)$$

$$= (a^2 - a'^2)p'^2\left(\frac{x'^2}{a'^4} + \frac{y'^2}{b'^4} + \frac{z'^2}{c'^4}\right) + p'^2\left(\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2}\right)$$

$$= a^2 - a'^2 + p^2;$$

der Coefficient von xy ist

$$2p'p''\left\{\frac{a^2x'^2}{a'^2a''^2} + \frac{b^2y'^2}{b'^2b''^2} + \frac{c^2z'^2}{c'^2c''^2}\right\},$$

und weil

$$(a^2 - a'^2)\left\{\frac{x'^2}{a'^2a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2b''^2} + \frac{z'^2}{c'^2c''^2}\right\} = 0$$

und

$$\frac{x'^2}{a''^2} + \frac{y'^2}{b''^2} + \frac{z'^2}{c''^2} = 1$$

ist, so haben wir

$$\frac{a^2x'^2}{a'^2a''^2} + \frac{b^2y'^2}{b'^2b''^2} + \frac{c^2z'^2}{c'^2c''^2} = 1,$$

und die transformirte Gleichung erhält die Form

$$(a'^2 - a^2)x^2 + (a''^2 - a^2)y^2 + (a'''^2 - a^2)z^2$$
$$+ 2k^2(p'x + p''y + p'''z) + k^4 = 0.$$

189. Wenn wir nun zu der im Art. 187 gegebenen Gleichung des Tangentenkegels zurückkehren, so beweist ihre Form, dass alle concentrischen Kegel, welche einem System von confocalen Flächen umschrieben sind, coaxial und confocal sind. Denn die drei Normalen, welche durch den gemein-

schaftlichen Scheitel gehen, sind für jeden Kegel des Systems die Axen, und die Form der Gleichung zeigt, dass die Differenzen der Quadrate der Axen von a^2 unabhängig sind.

Die Gleichungen der gemeinschaftlichen Focallinien dieser Kegel sind nach Art. 166

$$\frac{x^2}{a'^2 - a''^2} = \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2}, \quad y^2 = 0;$$

Wenn nun im Art. 178 bewiesen wurde, dass der Centralschnitt des Hyperboloids mit einem Mantel, welches durch (x', y', z') geht, durch

$$\frac{x^2}{a''^2 - a'^2} + \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2} = 1$$

dargestellt wird, so folgt aus der Wahrheit, dass der Schnitt des Hyperboloids mit der Tangentenebene dem Centralschnitte ähnlich oder auch durch

$$\frac{x^2}{a'^2 - a''^2} - \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2} = 0$$

gegeben ist, der Satz von Chasles und Jacobi:[48]) Die Focallinien des Systems von Kegeln, welche aus einem beliebigen Punkte den Flächen eines confocalen Systems umgeschrieben sind, sind die Erzeugenden des einfachen Hyperboloids unter ihnen, welches durch diesen Punkt geht.

Man kann denselben auch so beweisen: Wenn man durch eine beliebige Seite eines unter diesen Kegeln die Tangentenebene desselben und Ebenen durch die erzeugenden Linien jenes Hyperboloids hindurchlegt, so sind diese letzteren Tangentenebenen des Hyperboloids und bilden daher nach Art. 184 mit der Tangentenebene des Kegels gleiche Winkel. Diese zwei Erzeugenden haben also die Eigenschaft, dass die durch sie und eine beliebige Seite des Kegels gelegten Ebenen mit der entsprechenden Tangentenebene desselben gleiche Winkel einschliessen, eine Eigenschaft, welche nach Art. 184 den Focallinien angehört.

Zusatz 1. Die Reciproken eines Systems von confocalen Flächen in Bezug auf irgend einen Punkt haben die nämlichen Kreisschnitte. (System concyklischer Flächen.) Denn die Reciprokalflächen der diesem Punkte entsprechenden Tangentenkegel haben nach Art. 166 dieselben Kreisschnitte, und sie sind die Asymptotenkegel der Reciprokalflächen.

Zusatz 2. Die Umrisse der orthogonalen Projectionen eines Systems von confocalen Flächen auf eine Ebene sind confocale Kegelschnitte. Diese Projectionen sind die Durchschnitte der gedachten Ebene mit den zu ihr normalen die Flächen des Systems umhüllenden Cylindern, und man kann diese letzteren als ein System von Tangentenkegeln betrachten, welche den unendlich entfernten gemeinschaftlichen Punkt ihrer Erzeugenden zum Scheitel haben.

190. Unter den Flächen eines confocalen Systems existiren im Allgemeinen zwei, welche eine gegebene gerade Linie berühren.

Sei (x', y', z') ein Punkt der betrachteten Linie und sind a', a'', a''' die Axen der drei Flächen des Systems, welche durch ihn hindurchgehen, α, β, γ die Winkel, welche diese Linie mit den drei Normalen bildet; so erhellt aus Art. 187, dass das a der gesuchten Fläche durch die quadratische Gleichung

$$\frac{\cos^2\alpha}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a'''^2 - a^2} = 0$$

bestimmt wird. Sind nun a, a' die Wurzeln dieser Gleichung, so haben die beiden Kegel

$$\frac{x^2}{a'^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{y^2}{a''^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - \mathrm{a}^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a'^2 - \mathrm{a}'^2} + \frac{y^2}{a''^2 - \mathrm{a}'^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - \mathrm{a}'^2} = 0$$

die gegebene Gerade zur gemeinschaftlichen Seite, und man beweist genau wie im Art. 176, dass die Tangentenebenen der Kegel, welche durch diese Linie gehen, zu einander rechtwinklig sind. Da aber die Tangentenebenen des Tangentenkegels einer Fläche auch Tangentenebenen dieser letzteren sind, so ergiebt sich daraus, dass die durch eine gerade Linie gehenden Tangentenebenen der beiden sie berührenden Flächen eines confocalen Systems zu einander rechtwinklig sind.

Zuweilen findet man die Eigenschaft, dass die von einem Punkte ausgehenden Tangentenkegel von zwei sich durchschneidenden confocalen Flächen zweiten Grades einander rechtwinklig durchschneiden, dahin ausgesprochen, dass zwei confocale Flächen, von einem beliebigen Punkte aus gesehen, einander rechtwinklig zu durchschneiden scheinen.

191. Die Normalen der Flächen eines confocalen Systems, welche den durch eine gegebene gerade Linie gehenden Tangentenebenen derselben entsprechen, sind die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids.

Sie sind offenbar einer Ebene parallel, nämlich der zur gegebenen Linie normalen Ebene; und wenn wir irgend eine der confocalen Flächen betrachten, so enthält nach Art. 181 die Normale, welche einer durch jene Gerade gehenden Ebene entspricht, den Pol dieser Ebene in Bezug auf die angenommene confocale Fläche, einen Punkt also, welcher ein Punkt der Polarlinie der gegebenen Geraden in Bezug auf diese confocale Fläche ist; in Folge dessen schneidet jede Normale die Polarlinie der gegebenen Geraden in Bezug auf irgend eine der confocalen Flächen und die durch die Normalen erzeugte Fläche ist daher ein hyperbolisches Paraboloid. (Art. 118.) Die Polarlinien der eben angestellten Erörterung sind für das nämliche Paraboloid die Erzeugenden des andern Systems.

Die beiden Punkte, in denen dies Paraboloid die gegebene gerade Linie schneidet, sind die zwei Punkte, wo dieselbe die beiden confocalen Flächen berührt.

Wenn die gegebene gerade Linie selbst für eine der Flächen des Systems (U) eine Normale ist, so erhalten wir einen bemerkenswerthen speciellen Fall. Die Normale, welche irgend einer der durch sie gehenden Ebenen entspricht, wird nach Art. 181 gefunden, indem man von dem in Bezug auf jene Fläche U genommenen Pol dieser Ebene auf dieselbe eine Normale fällt; es ist aber offenbar, dass jener Pol und diese Normale in der Tangentenebene von U liegen müssen, zu welcher die gegebene Gerade normal ist. In diesem Falle liegen somit die Normalen in einer und derselben Ebene.

Aus dem Princip, dass das Doppelverhältniss von vier durch eine gerade Linie gehenden Ebenen mit dem Doppelverhältnisse ihrer in Bezug auf irgend eine Fläche zweiten Grades genommenen Pole übereinstimmt, wird sogleich erkannt, dass irgend vier Normalen alle die der gegebenen Linie in Bezug auf die Flächen eines confocalen Systems entsprechenden Polarlinien projectivisch theilen; daher umhüllen in dem betrachteten speciellen Falle die sämmtlichen Normalen nothwendig einen Kegelschnitt, und zwar eine Parabel, weil die Normale in einer ihrer Lagen ganz in unendlicher Entfernung liegt, nämlich in dem

Falle der unendlich grossen Kugel, welche dem System der confocalen Flächen nach Art. 172 angehört.

Der Fusspunkt der gegebenen Linie in derjenigen Fläche des Systems, für welche sie eine Normale ist, liegt in der Directrix der Parabel.

192. Wenn α, β, γ die auf die Normalen durch den Scheitel bezogenen Richtungswinkel der Normale zu einer Tangentenebene des Kegels der Art. 185, etc. bezeichnen, so müssen dieselben, weil die bezeichnete Normale dem reciproken Kegel angehört, die Relation

$$(a'^2 - a^2) \cos^2\alpha + (a''^2 - a^2) \cos^2\beta + (a'''^2 - a^2) \cos^2\gamma = 0$$

oder

$$a'^2 \cos^2\alpha + a''^2 \cos^2\beta + a'''^2 \cos^2\gamma = a^2$$

erfüllen. Dieselbe erlaubt uns, die Axe der Fläche des Systems zu bestimmen, welche irgend eine Ebene berührt; denn für einen beliebigen Punkt dieser Ebene kennen wir die ihm entsprechenden a', a'', a''', sowie die Winkel, welche die drei durch ihn gehenden Normalen mit der Ebene einschliessen, so dass die Grösse a^2 ebenfalls bekannt ist.

193. Wenn die Relation des letzten Art. unabhängig bewiesen wäre, so würde durch Umkehrung der Schlussordnung aus ihr ein Beweis für die Gleichung des Tangentenkegels im Art. 187 ohne Transformation der Coordinaten hervorgehen.

Der folgende Beweis der Relation rührt von Chasles her. Die Grösse

$$a'^2 \cos^2\alpha + a''^2 \cos^2\beta + a'''^2 \cos^2\gamma$$

ist die Summe der Quadrate der Projectionen der Linien a', a'', a''' auf eine Normale zur gegebenen Ebene. Wir haben im Art. 179 gesehen, dass diese Linien die Axen einer durch das ursprüngliche Centrum gehenden Fläche sind, welche den Punkt (x', y', z') zu ihrem Centrum hat. Und es ist in demselben Art. bewiesen worden, dass der Radius vector vom Centrum nach (x', y', z') mit zwei Geraden, welche den Axen der Focalellipse parallel und gleich sind, ein System von drei conjugirten Durchmessern bildet. Wir wissen ferner aus Art. 100, dass die Summe der Quadrate der Projectionen von drei conjugirten Durchmessern einer Fläche zweiten Grades auf eine beliebige Gerade eine Constante, d. i. der Summe der Quadrate von drei andern conjugirten Durch-

messern derselben Fläche gleich ist. Daraus folgt dann, dass die Grösse

$$a'^2 \cos^2\alpha + a''^2 \cos^2\beta + a'''^2 \cos^2\gamma$$

gleich ist der Summe der Quadrate der Projectionen des Radius vector und zweier den Axen der Focalellipse paralleler und gleicher Linien auf die vom Centrum auf die gegebene Ebene gefällte Normale. Nun sind die beiden letzten Geraden nach Grösse und Richtung constant, also auch die bezeichneten Projectionen derselben, und die Projection des Radius vector ist, weil die Normale selbst, so lange constant, als der Punkt (x', y', z') der gegebenen Ebene angehört; also ist bewiesen, dass die betrachtete Grösse

$$a'^2 \cos^2\alpha + a''^2 \cos^2\beta + a'''^2 \cos^2\gamma$$

constant ist für alle Lagen des Punktes (x', y', z') in einer festen Ebene und man erkennt, dass dieser constante Werth das a^2 der die Ebene berührenden Fläche des Systems ist, weil dieser Werth sich für $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$ ergiebt.

194. Der Ort des Durchschnittspunktes von drei zu einander rechtwinkligen Ebenen, von denen jede eine von drei confocalen Flächen tangirt, ist eine Kugel.

Man gelangt zum Beweise dieses Satzes ganz wie im Art. 95; man addirt

$$p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma\,,$$
$$p'^2 = a'^2 \cos^2\alpha' + b'^2 \cos^2\beta' + c'^2 \cos^2\gamma'\,,$$
$$p''^2 = a''^2 \cos^2\alpha'' + b''^2 \cos^2\beta'' + c''^2 \cos^2\gamma''\,,$$

und erhält

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a'^2 - a^2) + (a''^2 - a^2),$$

wenn ϱ die Entfernung des Centrums vom Durchschnittspunkte der Ebenen bezeichnet. Durch die Subtraction der beiden Gleichungen

$$p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma,$$
$$p'^2 = a'^2 \cos^2\alpha + b'^2 \cos^2\beta + c'^2 \cos^2\gamma$$

erkennen wir ferner, dass die Differenz der Quadrate der auf zwei parallele Tangentenebenen von zwei confocalen Flächen gefällten Normalen constant und gleich $a^2 - a'^2$ ist.

Wir wollen bemerken, dass dem Theorem des Art. 95 reciprok das andere entspricht: Wenn durch einen Punkt O drei zu ein-

ander rechtwinklige Radien vectoren zu einer Fläche zweiter Ordnung gehen, so umhüllt die Verbindungsebene ihrer Endpunkte eine Rotationsfläche zweiten Grades. O ist ein Focalpunkt derselben mit seiner Polarebene in Bezug auf die gegebene Fläche als Directrixebene. Wenn O in der Fläche zweiten Grades selbst liegt, so geht die Ebene durch einen festen Punkt.

195. Zwei Kegel von gemeinschaftlichem Centrum umhüllen zwei confocale Flächen; man soll die Länge des Abschnittes bestimmen, der in einer ihrer gemeinschaftlichen Erzeugenden durch eine das Centrum enthaltende Ebene bestimmt wird, welche der Tangentenebene von einer der durch den Scheitel gehenden confocalen Flächen in diesem parallel ist.

Die in den vier gemeinschaftlichen Kanten gebildeten Abschnitte sind von gleicher Grösse, weil dieselben gegen die Schnittebene gleich geneigt sind, als welche einer gemeinschaftlichen Hauptebene beider Kegel parallel ist.

Für die Durchschnitte von zwei confocalen Kegeln

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=0, \quad \frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}+\frac{z^2}{\gamma'^2}=0$$

gelten die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\alpha^2\alpha'^2(\beta^2-\gamma^2)}=\frac{y^2}{\beta^2\beta'^2(\gamma^2-\alpha^2)}=\frac{z^2}{\gamma^2\gamma'^2(\alpha^2-\beta^2)},$$

und wenn wir den gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten durch λ^2 bezeichnen, so ist

$$x^2+y^2+z^2=\lambda^2(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\alpha^2-\gamma^2).$$

Indem wir dann die Werthe von α^2, β^2, γ^2 aus den Gleichungen der Tangentenkegel (Art. 190) einsetzen und λ^2 durch die Gleichung des Art. 179 bestimmen

$$x^2=\frac{a'^2b'^2c'^2}{(a'^2-a''^2)(a'^2-a'''^2)},$$

erhalten wir für das Quadrat des fraglichen Abschnitts den Werth

$$\frac{a'^2b'^2c'^2}{(a'^2-\mathfrak{a}^2)(a'^2-\mathfrak{a}'^2)}.$$

Wenn die Flächen sämmtlich von verschiedenen Arten sind, so zeigt dieser Werth, dass der bezeichnete Abschnitt der Normale gleich ist, welche vom Centrum

auf die Tangentenebene in ihrem Durchschnittspunkte gefällt wird.

Wenn wir speciell voraussetzen, dass die betrachteten Kegel über der Focalellipse und der Focalhyperbel des Systems beschrieben sind, so ist

$$\mathfrak{a}^2 = a^2 - c^2, \quad \mathfrak{a}'^2 = a^2 - b^2,$$

und der Werth des Abschnitts reducirt sich auf a'; d. h. wenn durch irgend einen Punkt eines Ellipsoids eine Sehne gezogen wird, welche beide Focalkegelschnitte schneidet, so ist der in ihr durch eine der Tangentenebene des Punktes parallel durch das Centrum gehende Ebene bestimmte Abschnitt der grossen Axe der Fläche gleich.

Dies von Mac-Cullagh gefundene Theorem ist das Analogon des Satzes für ebene Curven, nach welchem eine durch das Centrum parallel zu einer Tangente einer Ellipse gezogene Parallele in den Focalstrahlen des Berührungspunktes Abschnitte bestimmt, welche der halben Hauptaxe gleich sind.

196. Auf Grund der eben entwickelten Principien hat Chasles die Lösung des Problems gegeben, die Grösse und Richtung der Axen einer centralen Fläche zweiten Grades aus einem gegebenen System begrenzter conjugirter Durchmesser zu bestimmen.

Wenn wir die Ebene von zweien derselben betrachten, so können wir nach den Gesetzen der ebenen Geometrie die Grösse und Richtung der Axen des ihr entsprechenden Schnittes bestimmen. Seiner Ebene ist die dem Punkte P, dem Endpunkte des dritten Durchmessers, entsprechende Tangentenebene der Fläche parallel. Nun ward im Art. 179 bewiesen, dass das Centrum der gegebenen Fläche zweiten Grades der Durchschnittspunkt von drei confocalen Flächen ist, die in P ihr Centrum haben. Wenn wir die Focalkegelschnitte dieses neuen Systems confocaler Flächen bestimmen, so schneiden sich die beiden aus dem Centrum der gegebenen Fläche über diesen beschriebenen Focalkegel in vier geraden Linien, welche mit einander sechs Ebenen bestimmen, deren Durchschnittslinien die Richtungen der fraglichen Axen bezeichnen, während nach Art. 195 die durch den Punkt gehenden Tangentenebenen in ihnen die den Längen der Axen gleichen Stücke abschneiden.

Die verlangten Focalkegelschnitte werden aus der Kenntniss

ihrer Ebenen und der Richtung ihrer Axen leicht construirt, da die Längen derselben überdies durch

$$a^2 - a''^2,\ a'^2 - a''^2;\ a^2 - a'^2,\ a'^2 - a''^2$$

ausgedrückt sind und die Axenlängen des gegebenen Schnittes $a^2 - a'^2$, $a^2 - a''^2$ (Art. 178), welche bekannt sind, jene der Focalkegelschnitte direct bestimmen.

197. Wenn durch einen Punkt P in einer Fläche zweiten Grades eine Sehne gezogen wird, welche wie im Art. 195 zwei confocale Flächen berührt, so können wir einen Ausdruck für die Länge derselben finden.

Wir ziehen einen ihr parallelen Halbdurchmesser durch das Centrum und bezeichnen seine Länge durch R; wenn wir dann durch P eine zu diesem Durchmesser conjugirte Ebene und eine Tangentenebene legen, so bestimmen beide in jenem Durchmesser, vom Centrum aus gemessen, Abschnitte, deren Product $= R^2$ ist. Nun ist aber der durch die conjugirte Ebene bestimmte Abschnitt die Hälfte der fraglichen Sehne und der der Tangentenebene entsprechende ist derselbe, dessen Werth wir im Art. 195 gefunden haben. Daher ist

$$C = \frac{2R^2 \sqrt{(a'^2 - \mathrm{a}^2)(a'^2 - \mathrm{a}'^2)}}{a'b'c'}.$$

Wenn die betrachtete Sehne insbesondere diejenige ist, welche die beiden Focalkegelschnitte schneidet, so haben wir

$$\mathrm{a}^2 = a'^2 - c'^2,\quad \mathrm{a}'^2 = a'^2 - b'^2,\quad \text{und}\quad C = \frac{2R^2}{a'}.$$

198. Man soll den Ort der Scheitel aller der geraden Kegel bestimmen, welche eine gegebene Fläche zweiten Grades umhüllen.

Damit die Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2} = 0$$

einen geraden Kegel darstellt, müssen zwei ihrer Coefficienten einander gleich sein, d. h. man muss entweder $a'' = a'$, oder $a'' = a'''$ haben, oder in andern Worten, die Gleichung des Art. 172 muss für den fraglichen Punkt (x', y', z') zwei gleiche Wurzeln haben. Da nun nach der Untersuchung der Grenzen der Wurzeln gleiche Wurzeln nur unter der Voraussetzung möglich sind, dass λ einer der Hauptaxen gleich ist, so erkennen wir als den frag-

lichen Ort die Focalkegelschnitte der Fläche. Dies stimmt mit dem, das im Art. 169 bewiesen ist, überein.

Wir erkennen daraus, wie es schon bemerkt ist, dass die Reciproke einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen ihrer Focalpunkte eine Umdrehungsfläche ist, und dass insbesondere als Reciprokalfläche in Bezug auf einen Kreispunkt ein Umdrehungsparaboloid erhalten wird. Denn ein Kreispunkt gehört zugleich einem Focalkegelschnitte (Art. 164) und der Fläche selbst an, und aus dem letzteren Grunde bekanntlich ist die entsprechende Reciprokalfläche ein Paraboloid.

Als ein anderer specieller Fall unseres Satzes ergiebt sich, dass einer centralen Fläche zweiten Grades zwei gerade Kreiscylinder umschrieben werden können, deren Erzeugende den Asymptoten der Focalhyperbel parallel sind. Endlich ergiebt sich, dass der über der Focalellipse stehende Kegel nur dann ein gerader Kegel ist, wenn sein Scheitel der Focalhyperbel angehört, und umgekehrt; ein Ergebniss, welches ohne allen Bezug auf die confocalen Systeme dahin ausgesprochen werden kann, dass der Ort der Scheitel derjenigen geraden Kegel, welche über einem gegebenen Kegelschnitte stehen, ein zweiter Kegelschnitt ist, der die Brennpunkte des ersten zu Scheiteln und seine Scheitel zu Brennpunkten hat und dessen Ebene normal zur Ebene des ersten steht. (Vergl. Art. 124, 11.) Wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung des einen Kegelschnitts ist, so erhält man die des andern in der Form

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Es ward im Art. 126, 8 bewiesen, dass der aus einem Focalpunkte einer Umdrehungsfläche an eine sie umhüllende Fläche zweiten Grades gehende Tangentenkegel ein Umdrehungskegel sei, und im Zusammenhange dieses Artikels erkennen wir nun, dass die Focalkegelschnitte einer Fläche zweiten Grades den Ort der Focalpunkte aller der Umdrehungsflächen bezeichnen, welche derselben umgeschrieben werden können.

199. Aus dem vorher Gesagten geht hervor, dass die Focal-Ellipse und -Hyperbel in zu einander rechtwinkligen Ebenen so liegen, dass die Scheitel der einen die Brennpunkte der andern bilden. Von zwei solchen Kegelschnitten bildet so zu sagen der eine den Ort der Focalpunkte des andern, so, dass jedes Paar fester Punkte F, G des einen Kegelschnitts als Brennpunkte des andern betrachtet werden können, insofern die Summe oder Differenz die Entfernungen FP, GP nach einem veränderlichen Punkte P des andern constant ist.

Wenn wir in die Gleichungen der Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

die Parameter θ, φ wie in „Kegelschn.", Art. 173, 180 einführen, so können die Coordinaten eines Punktes in dem einen und andern Kegelschnitte durch

$$a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0;\quad \sec\varphi\sqrt{a^2-b^2},\ 0,\ b\tan\varphi$$

ausgedrückt werden, und das Quadrat der Entfernung zwischen diesen Punkten ist

$$a^2\cos^2\theta-2a\cos\theta\sec\varphi\sqrt{a^2-b^2}+(a^2-b^2)\sec^2\varphi+b^2\sin^2\theta+b^2\tan^2\varphi,$$

oder

$$a^2\sec^2\varphi-2a\cos\theta\sec\varphi\sqrt{a^2-b^2}+(a^2-b^2)\cos^2\theta \quad \text{d. h.}$$
$$=\{a\sec\varphi-\cos\theta\sqrt{a^2-b^2}\}^2.$$

Daher ist die Summe oder Differenz der beiden Entfernungen

$$\pm\{a\sec\varphi-\cos\theta\sqrt{a^2-b^2}\},\quad \pm\{a\sec\varphi-\cos\theta'\sqrt{a^2-b^2}\}$$

von φ unabhängig; und die der beiden andern

$$\pm\{a\sec\varphi-\cos\theta\sqrt{a^2-b^2}\},\quad \pm\{a\sec\varphi'-\cos\theta\sqrt{a^2-b^2}\}$$

ebenso unabhängig von θ.

Mit Berücksichtigung der Zeichen lautet der Satz dahin, dass für zwei feste Punkte F, G der Ellipse die Differenz $FP-GP$ constant und wenn $=+\alpha$ für P als einen Punkt im einen Ast der Hyperbel, so gleich $-\alpha$ ist für P als einen Punkt im andern Ast derselben. Für F und G als Scheitel der Ellipse erhalten wir die bekannte Brennpunkts-Eigenschaft der Hyperbel.

Sind sodann F, G zwei Punkte in verschiedenen Aesten der Hyperbel, so ist die Summe $FP+GP$ constant, und wenn sie

die Scheitel der Hyperbel sind, so entsteht die elementare Brennpunkts-Eigenschaft der Ellipse. Liegen aber F, G endlich in demselben Hyperbelast, so ist die Differenz zwischen FP und GP constant, und für das Zusammenfallen im betreffenden Scheitel entspringt einfach die Identität $FP - FP = 0$ und nicht eine neue planimetrische Eigenschaft der Ellipse.

200. Die folgenden Beispiele mögen zur ferneren Erläuterung der entwickelten Principien dienen.

B. 1. Welches ist der Ort des Durchschnittspunktes derjenigen Erzeugenden eines Hyperboloids, welche sich rechtwinklig durchschneiden?

Da der Durchschnitt einer mit der Ebene solcher Erzeugenden — einer Tangentenebene — parallelen Ebene mit der Fläche eine gleichseitige Hyperbel ist, so gilt nach Art. 178 die Relation

$$(a''^2 - a'^2) + (a''^2 - a'''^2) = 0;$$

und da nach Art. 175 das Quadrat des Radius vector für den betrachteten Punkt durch

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 - (a''^2 - a'^2) - (a''^2 - a'''^2)$$

ausgedrückt ist, so erkennen wir als den fraglichen Ort den Durchschnitt des Hyperboloids mit einer Kugel, für welche das Quadrat des Halbmessers gleich $a''^2 + b''^2 + c''^2$ ist. Wir gelangten durch andere Schlüsse zu diesem Resultate im Beisp. des Art. 112.

Die Frage kann allgemeiner aufgefasst werden als die Frage nach den Tangentenebenen, deren parallele Centralschnitte einem gegebenen Kegelschnitte ähnlich sind; sie überträgt sich damit auf alle Flächen zweiten Grades, während sie zunächst nur auf die geradlinigen sich zu beziehen scheint.

B. 2. Man soll den Ort des Durchschnitts von drei Tangenten einer Fläche zweiten Grades bestimmen, welche rechtwinklig zu einander sind. (Vergl. Art. 124, 8 und Art. 236.)

Wenn wir durch α, β, γ die von einer dieser Tangenten mit den Normalen des fraglichen Punktes gebildeten Winkel bezeichnen, so gelten, weil jede dieser Tangenten dem durch den Punkt gehenden Tangentenkegel angehört, die drei Gleichungen

$$\frac{\cos^2\alpha}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2\alpha'}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2\alpha''}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta''}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma''}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

und wir finden durch Addition derselben

$$\frac{1}{a'^2-a^2}+\frac{1}{a''^2-a^2}+\frac{1}{a'''^2-a^2}=0.$$

Nun sind die Grössen a'^2-a^2, a''^2-a^2, a'''^2-a^2 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung des Art. 172, welche nach Potenzen von λ^2 geordnet die Form

$$\lambda^6+\lambda^4(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2)$$
$$-\lambda^2\{(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2\}$$
$$+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2-a^2b^2c^2=0$$

erhält. Die Bedingung für das Verschwinden der Summe der reciproken Werthe der Wurzeln dieser Gleichung ist das Verschwinden des Coefficienten von λ^2; somit ist durch ihn die Gleichung des fraglichen Ortes gegeben.

B. 3. Der Schnitt eines Ellipsoids durch die Tangentenebene des Asymptotenkegels eines confocalen Hyperboloids ist von constanter Fläche.

Nach Art. 98 ist der Inhalt des Querschnitts umgekehrt proportional zu der auf die Tangentenebene gefällten Normalen p und wir haben

$$p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma.$$

Da aber die Normale eine Seite des dem Asymptotenkegel des Hyperboloids reciproken Kegels ist, so gilt auch die Relation

$$0=a'^2\cos^2\beta+b'^2\cos^2\alpha+c'^2\cos^2\gamma,$$

und es ergiebt sich also $p^2=a^2-a'^2$.

B. 4. Man soll die Länge der vom Centrum auf die Polarebene des Punktes (x', y', z') gefällten Normalen in Function der Axen der confocalen Flächen ausdrücken, welche durch diesen Punkt gehen.

Man findet für $a'^2-a^2=h^2$, $a''^2-a^2=k^2$, $a'''^2-a^2=l^2$

$$\frac{1}{p^2}=\frac{h^2k^2l^2}{a^2b^2c^2}\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{l^2}\right\}.$$

201. Zwei Punkte, von denen je einer einem von zwei confocalen Ellipsoiden angehört, werden als correspondirende bezeichnet, wenn die Relationen

$$\frac{x}{a}=\frac{X}{A},\quad \frac{y}{b}=\frac{Y}{B},\quad \frac{z}{c}=\frac{Z}{C}$$

durch ihre Coordinaten erfüllt sind.

Da nach dem im Art. 174 gefundenen Werthe

$$x^2 = \frac{a^2 a'^2 a''^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

die Grösse $x^2 : a^2$ constant bleibt, so lange a'^2, a''^2 unverändert sind, d. h. so lange der Punkt der Durchschnittslinie von zwei confocalen Hyperboloiden angehört, so erkennen wir, dass die Durchschnittscurve von zwei confocalen Hyperboloiden ein System von confocalen Ellipsoiden in correspondirenden Punkten schneidet.

Und da die Hauptebenen als Grenzen dem System der confocalen Flächen angehören, so entsprechen Punkte der Hauptebenen, welche durch Gleichungen von der Form

$$\frac{x'^2}{a^2} = \frac{X^2}{a^2 - c^2}, \quad \frac{y'^2}{b^2} = \frac{Y^2}{b^2 - c^2}, \quad Z = 0$$

bestimmt sind, einem Punkte (x', y', z') der Fläche; und wenn speciell dieser Punkt selbst einer Hauptebene angehört, ist der entsprechende Punkt ein Punkt des in ihr gelegenen Focalkegelschnitts.

202. Die Punkte der Ebene xy, welche den Durchschnitten eines Ellipsoids mit einer Schaar von confocalen Flächen entsprechen, bilden eine Schaar von confocalen Kegelschnitten (Art. 161; vergl. „Kegelschn.“ Art. 250, 313), für welche die den Kreispunkten entsprechenden Punkte die gemeinschaftlichen Brennpunkte sind.

Wenn wir zwischen den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

die Grösse z^2 eliminiren, so erhalten wir

$$\frac{(a^2 - c^2)\,x^2}{a^2 a'^2} + \frac{(b^2 - c^2)\,y^2}{b^2 b'^2} = 1,$$

so dass die correspondirenden Punkte durch die Relation

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1$$

verbunden sind. Sie repräsentirt eine Ellipse für die Durchschnitte mit einfachen Hyperboloiden und eine Hyperbel für die Durchschnitte mit zweifachen Hyperboloiden.

Die Coordinaten der Kreispunkte sind

$$x^2 = a^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad x^2 = 0,$$

und die der ihnen entsprechenden Punkte daher

$$X^2 = a^2 - b^2, \quad Y^2 = 0;$$

sie sind also die Brennpunkte des Systems confocaler Kegelschnitte.

Man repräsentirt zuweilen Curven, welche auf einem Ellipsoid verzeichnet sind, durch sogenannte elliptische Coordinaten, d. h. durch Gleichungen von der Form $\Phi(a', a'') = 0$, welche eine Relation zwischen den Axen der confocalen Hyperboloide ausdrücken, welche durch irgend einen Punkt der Curve hindurchgehen. (Vergl. „Kegelschn." Art. 248.) Wir werden im zweiten Bande Gelegenheiten ihrer Anwendung finden.

Da nun aus dem eben Entwickelten erkannt wird, dass a' die halbe Summe und a'' die halbe Differenz der Entfernungen der den Punkten des Ortes correspondirenden Punkte von denjenigen Punkten darstellen, welche den Kreispunkten correspondiren, so können wir aus der Gleichung $\Phi(a', a'') = 0)$ eine Gleichung von der Form $\Phi(\varrho + \varrho', \varrho - \varrho') = 0$ bilden, und von ihr dann zu der Gleichung der Curve übergehen, welche in der Hauptebene dem gegebenen Orte auf der Fläche selbst entspricht.

203. Wenn der Durchschnitt einer Kugel und eines Ellipsoids durch projicirende Gerade, welche der kleinsten oder grössten Axe parallel sind, auf eine Ebene der Kreisschnitte projicirt wird, so ist die Projection ein Kreis.

Man erkennt diesen Satz leicht als eine Folge des allgemeinen Satzes: Wenn zwei Flächen zweiten Grades gemeinschaftliche Kreisschnitte haben, so hat jede durch ihre Schnittcurve gehende Fläche zweiten Grades dieselben Kreisschnitte. Und dieser Satz geht aus der einfachen Bemerkung hervor, dass das Resultat der Substitution $z = 0$ in die Gleichung $U + kV = 0$ einen Kreis repräsentiren muss, sobald dieselbe Substitution die beiden Gleichungen $U = 0$, $V = 0$ auf Kreisgleichungen reducirt.

Wir halten es aber für nützlich, den hier ausgesprochenen speciellen Satz direct zu beweisen. Wir wählen als Axen die Axe der y, welche eine Gerade in der Ebene des Kreisschnittes

ist, und eine Normale zu ihr in dieser Ebene und behalten daher die y unverändert, während das neue x^2 gleich dem alten $x^2 + z^2$ wird. Aus der Gleichung der Ebene des Kreisschnittes

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} x^2$$

folgt das neue x^2 gleich $\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} x^2$.

Da nun für die Durchschnittspunkte der Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 = r^2 - c^2$$

gilt, so folgt durch Substitution des Werthes $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \frac{a^2}{b^2} x^2$ für x^2

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} (x^2 + y^2) = r^2 - c^2,$$

was den Satz beweist.

Man wird bemerken, dass wir, um die Projection auf die Ebenen der Kreisschnitte zu erhalten, y unverändert gelassen und für x^2 den Werth $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \cdot \frac{a^3}{b^2} x^2$ substituirt haben.

Um aber wie im Art. 201 den irgend einem Punkte der Fläche entsprechenden Punkt zu finden, war die Substitution $\frac{a^2}{a^2 - c^2} x^2$, $\frac{b^2}{b^2 - c^2} y^2$ respective für x^2 und y^2 zu vollziehen. Man sieht aber, dass die Quadrate der ersteren Coordinaten zu denen der letzteren das constante Verhältniss $(b^2 - c^2) : b^2$ besitzen. Daher können wir aus den Ergebnissen des letzten Artikels unmittelbar schliessen, dass die Projection des Durchschnittes von zwei confocalen Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschnittebene der einen von ihnen ein Kegelschnitt ist, der die entsprechenden Projectionen der Kreispunkte zu Brennpunkten hat; und ferner, dass für jede durch ihre Gleichung $\Phi(a', a'') = 0$ gegebene Curve auf dem Ellipsoid die algebraische Gleichung ihrer Projection auf die Ebene der Kreisschnitte abgeleitet werden kann.

204. Die Entfernung zweier Punkte, von denen je einer auf einem von zwei confocalen Ellipsoiden liegt,

ist der Entfernung der ihnen entsprechenden Punkte gleich.

Wir haben

$$(x - X)^2 + (y - Y^2) + (z - Z)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2(xX + yY + zZ),$$

und da nach Art. 175

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b'^2 + c''^2,\ X^2 + Y^2 + Z^2 = A^2 + B'^2 + C''^2$$

und für die entsprechenden Punkte

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = A^2 + b'^2 + c''^2,\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + B'^2 + C''^2$$

ist, so ist die Summe der Quadrate der Centralstrahlen nach beiden Punkten für die zwei entsprechenden Punkte dieselbe Grösse; und das Theorem ist bewiesen durch die weitere Bemerkung, dass die Grössen xX, yY, zZ respective gleich sind den andern $x'X'$, $y'Y'$, $z'Z'$, weil man hat $aX' = Ax$, $Ax' = aX$, etc. Dies von J. Ivory herrührende Theorem ist von Wichtigkeit in der Theorie der Attractionen.

B. In den confocalen einfachen Hyperboloiden entsprechen einander die geraden Erzeugenden, d. h. den Punkten einer Erzeugenden des einen entsprechen äquidistante Punkte einer Erzeugenden des andern; oder die Deformation eines Fadenmodelles von einem einfachen Hyperboloid unter Unveränderlichkeit der Schnittpunkte seiner Erzeugenden von beiden Schaaren führt dasselbe in ein confocales Hyperboloid über; die Trajectorien seiner Punkte sind orthogonal zu dem System der confocalen einfachen Hyperboloide.[49])

Sind (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) zwei Punkte P_1, P_2 in einer Erzeugenden des Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und (x_1', y_1', z_1'), (x_2', y_2', z_2') zwei Punkte P_1', P_2' in einer Erzeugenden von

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{c^2}{z'^2} = 1,$$

so gelten diese und die Bedingungen harmonischer Pole für sie.

Die Correspondenz von (x_1, y_1, z_1) und (x_1', y_1', z_1') und die von (x_2, y_2, z_2) mit (x_2', y_2', z_2') bedingen sodann, dass die $x_i : a$, $y_i : b$, $z_i : c$ mit den $x_i' : a'$ etc. die gleichen Werthe p_i, q_i, r_i haben und dass somit jene Bedingungen übergehen in

$$p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 = 1,\ p_2^2 + q_2^2 - r_2^2 = 1,\ p_1p_2 + q_1q_2 - r_1r_2 = 1,$$

aus deren Verbindung sich ergiebt

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 0.$$

Schreibt man aber diese Gleichung in der Form

$$a^2(p_1 - p_2)^2 + b^2(q_1 - q_2)^2 + c^2(r_1 - r_2)^2$$
$$= a'^2(p_1 - p_2)^2 + b'^2(q_1 - q_2)^2 + c'^2(r_1 - r_2)^2,$$

die ihr für a^2, b^2, $-c^2$ und a'^2, b'^2, $-c'^2$ als die Halbaxenquadrate confocaler einfacher Hyperboloide äquivalent ist, weil die letzten drei respective gleich sind mit $a^2 + h^2$, $b^2 + h^2$, $-c^2 + h^2$, so geht sie über in

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$
$$= (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2.$$

Für zwei Punkte P_1, P_2 auf einer Geraden des ersten Hyperboloids und P_1', P_2' als die entsprechenden eines zu ihm confocalen liegen diese nicht nur wieder in einer seiner Geraden, sondern haben dieselbe Distanz von einander wie jene. Und einem windschiefen Vierseit $P_1P_2P_3P_4$ der ersten Fläche entspricht ebenso eines der zweiten.

205. Um eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades zu erhalten, welche der Eigenschaft der Kegelschnitte analog wäre, nach der die Summe der Focaldistanzen constant ist, gab Jacobi[50]) dieser letzteren Eigenschaft den folgenden Ausdruck: Wenn man die beiden Endpunkte C, C' der grossen Axe der Ellipse betrachtet, so vereinigt dieselbe Relation $\varrho + \varrho' = 2a$, welche die Entfernungen von C und C' von irgend einem Punkte ihrer Verbindungslinie verknüpft, auch die Entfernungen der Brennpunkte von irgend einem Punkte der Ellipse.

Wenn wir nun in analoger Weise im Hauptschnitte des Ellipsoids die drei Punkte nehmen, welche in dem vorher (Art. 201) auseinandergesetzten Sinne dreien Punkten der Focalellipse entsprechen, so vereinigt dieselbe Relation, welche zwischen den Entfernungen jener Punkte von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene stattfindet, auch die Entfernungen der letztern Punkte von irgend einem Punkte der Fläche. In der That sind nach Art. 204 die Entfernungen der Punkte eines confocalen Kegelschnitts von einem Punkte der Fläche gleich den Entfernungen

des diesem letzten entsprechenden Punktes der Hauptebene von den drei Punkten des Hauptschnittes*).

206. Wenn umgekehrt der Ort eines Punktes P zu bestimmen wäre, dessen Entfernungen von drei festen Punkten A', B', C' nur durch dieselbe Relation vereinigt sind, welche die Entfernungen der Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c von irgend einem Punkte D seiner Ebene verbindet, so erhält man, wenn ϱ, ϱ', ϱ'' jene drei Entfernungen bezeichnen, nach Art. 36

$$a^2(\varrho^2-\varrho'^2)(\varrho^2-\varrho''^2)+b^2(\varrho'^2-\varrho^2)(\varrho'^2-\varrho''^2)+c^2(\varrho''^2-\varrho^2)(\varrho''^2-\varrho'^2)$$
$$-a^2(b^2+c^2-a^2)\varrho^2-b^2(c^2+a^2-b^2)\varrho'^2-c^2(a^2+b^2-c^2)\varrho''^2+a^2b^2c^2$$
$$=0;$$

und da $(\varrho^2-\varrho'^2)$, etc. als Functionen der Coordinaten nur vom ersten Grade sind, so ist der gesuchte Ort vom zweiten Grade.

Bildet man also eine Pyramide $PA'B'C'$ so, dass $PA'=DA$, $PB'=DB$, $PC'=DC$ ist, so beschreibt P eine Fläche zweiter Ordnung bei der Bewegung von D in der Ebene ABC.

Indem man zeigt, dass diese Gleichung von der Form $U+LM=0$ ist, wo $U=0$ eine unendlich kleine Kugel bezeichnet, welche einen solchen Punkt zum Centrum hat, weist man nach, dass jene drei Punkte, von denen die Entfernungen gemessen werden, Focalpunkte der Fläche zweiten Grades sind. Jener Nachweis ist geführt, wenn das Resultat der Substitution $\varrho^2=0$

*) Durch geometrische Betrachtungen hat Townsend gezeigt,[45]) dass diese Eigenschaft nur den Punkten der modularen Focalkegelschnitte angehört. In der That sind, wie aus der Formel des Art. 203 erhellt, die Punkte der Ebene y, welche irgend einem Punkte (x', y', z') des Ellipsoids entsprechen, imaginär.

Townsend leitet Jacobi's Methode der Generation aus MacCullagh's Modular-Eigenschaft ab. Denn wenn man durch irgend einen Punkt der Fläche eine zu einem Kreisschnitte parallele Ebene legt, so schneidet dieselbe die den drei festen Focalpunkten entsprechenden Directrixen in einem Dreieck von unveränderlicher Grösse und Gestalt, und die Entfernungen des Punktes der Fläche von den Brennpunkten sind in einem constanten Verhältniss zu seinen Entfernungen von den Ecken dieses Dreiecks. Und man kann ein ähnliches Dreieck bilden, dessen Seiten in bestimmtem Verhältniss verkleinert oder vergrössert sind, für welches die Entfernungen der Ecken vom Punkte (x', y', z') ihren Entfernungen von den Brennpunkten gleich sind.

in die vorige Gleichung als in lineare Factoren zerfallend erkannt ist. Dasselbe ist

$$a^2(\varrho'^2 - c^2)(\varrho''^2 - b^2) + (b^2\varrho'^2 - c^2\varrho'')(\varrho'^2 - \varrho''^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

und wenn wir $\varrho'^2 - \varrho^2 - c^2$ durch L, $\varrho''^2 - \varrho^2 - b^2$ durch M ersetzen, so geht es in die Gestalt

$$a^2LM + (b^2L - c^2M)(L - M) = 0$$

oder

$$b^2L^2 - 2bcLM\cos A + c^2M^2 = 0$$

über, wo A den Winkel des aus a, b, c gebildeten Dreiecks bezeichnet, welcher a gegenüberliegt. Diese Gleichung zerfällt in zwei imaginäre Factoren und beweist somit, dass der betrachtete Punkt zu den Focalpunkten der modularen Gattung gehört.

So wie die Normale des Kegelschnitts den Winkel der Radien vectoren halbirt, so bestimmt sich die Normale im Punkte P der Fläche im Anschluss an die vorige Erzeugung wie folgt: Wenn DA^*, DB^*, DC^* die Repräsentanten dreier Gleichgewicht haltender Kräfte in der Ebene sind und in PA', PB', PC' die respectiven gleichen Kräfte wirken, so fällt die Normale in die Resultante derselben.[51])

B. Der Ort der Centra derjenigen Kugeln, welche drei feste Kugeln unter Winkeln von bekannten Differenzen schneiden, ist eine Fläche zweiten Grades, für welche die Centra der gegebenen Kugeln derselben Focalcurve angehören.

Für d_1, d_2, d_3 als die Centraldistanzen und r_1, r_2, r_3 als die Radien der gegebenen Kugeln, r als Radius einer der gesuchten Kugeln und $\alpha_1 + \omega$, $\alpha_2 + \omega$, $\alpha_3 + \omega$ als die Winkel von jenen mit dieser ist

$$\frac{d_i^2 - r_i^2 - r^2}{2r_ir} = \cos(\alpha_i + \omega),$$

und man hat r und ω zu eliminiren. Schreibt man aber

$$-r\cos\omega = X, \quad r\sin\omega = Y,$$

so werden diese Gleichungen

$$d_i^2 = (X - r_i\cos\alpha_i)^2 + (Y - r_i\sin\alpha_i)^2$$

und drücken aus, dass die Distanzen des beweglichen Punktes von den festen Mittelpunkten den Distanzen des Punktes X, Y in der Ebene der Centra der festen Kugeln von den festen Punkten $(r_i\cos\alpha_i, r_i\sin\alpha_i)$ gleich sind.

207. Der Ort der Berührungspunkte paralleler Tangentenebenen zu einer Reihe von confocalen Flächen zweiten Grades ist eine gleichseitige Hyperbel.

Wir nehmen an, dass α, β, γ die Richtungswinkel der gemeinschaftlichen Normalen dieser Ebenen bezeichnen und erkennen dann nach der Formel

$$a^2 \cos\alpha = px' \text{ (Art. 91)}$$

durch Substitution von $r \cos\alpha'$ für x', etc. und Auflösung für $\cos\alpha'$, dass die Richtungscosinus des Radius vector irgend eines Berührungspunktes durch

$$\frac{a^2 \cos\alpha}{rp}, \quad \frac{b^2 \cos\beta}{rp}, \quad \frac{c^2 \cos\gamma}{rp}$$

dargestellt sind. Wenn wir dann nach Art. 15 die Richtungscosinus der Normale der Ebene des Radius vector und der Normale zur Tangentenebene bilden, so erhalten wir für φ, als den vom Radius vector mit dieser Normale gebildeten Winkel, dieselben in der Form

$$\frac{(b^2 - c^2)\cos\beta\cos\gamma}{rp\sin\varphi}, \quad \frac{(c^2 - a^2)\cos\gamma\cos\alpha}{rp\sin\varphi}, \quad \frac{(a^2 - b^2)\cos\alpha\cos\beta}{rp\sin\varphi}.$$

Der gemeinschaftliche Nenner dieser Ausdrücke repräsentirt aber das Doppelte vom Inhalte des Dreiecks, welches vom Radius vector und jener Normale bestimmt wird; die doppelten Inhalte der Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinatenebenen sind daher durch

$$(b^2 - c^2)\cos\beta\cos\gamma, \; (c^2 - a^2)\cos\gamma\cos\alpha, \; (a^2 - b^2)\cos\alpha\cos\beta$$

ausgedrückt, und da diese Projectionen für ein System von confocalen Flächen constant sind, so ist für ein solches System sowohl die Ebene dieses Dreiecks, als auch seine Grösse constant. Wenn also CM die Normale der betrachteten Reihe von Tangentenebenen und PM das auf diese Linie von einem Berührungspunkte P gefällte Perpendikel bezeichnen, so ist die Ebene und die Grösse des Dreiecks CMP unveränderlich und der Ort von P daher eine gleichseitige Hyperbel, für welche CM eine Asymptote ist.

B. Man bilde ihre Gleichung und zeige, dass sie beide Focalcurven schneidet.

208. Wir schliessen endlich diesen Theorien die auf die Lehre von der Krümmung der Flächen zweiten Grades

bezüglichen Hauptsätze an, als welche mit dem Gegenstand dieses Kapitels in vielseitigem Zusammenhange stehen. Die weitere Untersuchung der Krümmung der Flächen behalten wir der allgemeinen Theorie der Flächen im zweiten Bande vor.

Der Krümmungsradius eines Normalschnittes in einem Punkte einer Fläche zweiten Grades ist durch $\beta^2 : p$ ausgedrückt, wenn β den der Spur des Schnittes in der Tangentenebene parallelen Halbdurchmesser und p die Normale vom Centrum auf die Tangentenebene bezeichnet.

Der Beweis des Satzes lässt sich durch die Methode des unendlich Kleinen analog dem von dem entsprechenden Satze in der Theorie der Kegelschnitte führen. (Vergl. „Kegelschn.“ Art. 263.)

Seien P und Q zwei Punkte einer Fläche zweiten Grades und schneide eine durch Q gehende und der Tangentenebene in P parallele Ebene den Centralradius CP in R und die Normale in P in S, so ist der Radius eines durch P und Q gehenden Kreises, der sein Centrum in PS hat, gleich $\overline{PQ}^2 : 2\,PS$.

Wenn nun der Punkt Q sich dem Punkte P unbegrenzt nähert, so nähert sich QP stetig der Grenze QR, und wenn wir CP und den zu QR parallelen Centralradius durch a' und β bezeichnen und P' der andere Endpunkt des Durchmessers CP ist, so wird nach Art. 75

$$\beta^2 : a'^2 = \overline{QR}^2 : PR \cdot RP' \; (= 2a' \cdot PR),$$

also

$$\overline{QR}^2 = \frac{2\beta^2 \cdot PR}{a'}, \text{ und der Krümmungsradius } = \frac{\beta^2}{a'} \cdot \frac{PR}{PS}.$$

Wenn aber vom Centrum die Normale CM auf die Tangentenebene gefällt ist, so ist das rechtwinklige Dreieck CMP dem Dreieck PRS ähnlich und man hat $PR : PS = a' : p$; der Krümmungsradius ist also $= \frac{\beta^2}{a'} \cdot \frac{a'}{p} = \frac{\beta^2}{p}$, wie zu beweisen war.

Wenn der durch P und Q gehende Kreis sein Centrum nicht in PS, sondern in einer andern Linie PS' hat, welche mit PS einen Winkel θ bildet, so findet die einzige Veränderung statt, dass der Radius des Kreises gleich $\frac{\overline{PQ}^2}{2PS'}$ ist, wo S' noch der durch Q gehenden zur Tangentenebene in P parallelen Ebene angehört. Da nun $PS = PS' \cdot \cos\theta$ ist, so ist der Radius der

Krümmung $= \frac{\overline{PQ}^2}{2\,PS'} \cos\theta$, oder der Werth für den Krümmungsradius eines schiefen Schnittes ist das Product aus dem Krümmungsradius des durch PQ gehenden Normalschnittes in den Cosinus von θ.

209. Man kann diese Sätze auch analytisch leicht beweisen. Man weiss aus der Theorie der Kegelschnitte (Art. 233), dass für den Kegelschnitt $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$ der Krümmungsradius im Anfangspunkte der Coordinaten $= a_{13} : a_{22}$ ist. Wenn daher für die Ebene xy als Tangentenebene die Gleichung einer Fläche zweiten Grades durch

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{34}z = 0$$

gegeben ist, so sind die Krümmungsradien der den Ebenen $y = 0$, $x = 0$ entsprechenden Schnitte respective $= a_{34} : a_{11}$ und $a_{34} : a_{22}$. Und wenn die Gleichung zu parallelen Axen durch das Centrum transformirt wird, wobei die Glieder vom höchsten Grade unverändert bleiben, so wird sie

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = A_{44},$$

und die Quadrate der in den Axen der x und y gebildeten Abschnitte sind $A_{44} : a_{11}$, $A_{44} : a_{22}$; die Krümmungsradien sind somit den Quadraten der parallelen Halbdurchmesser eines Centralschnittes proportional. Und da nach der Theorie der Kegelschnitte der Krümmungsradius dieses Schnittes, welcher die Normale der Tangentenebene enthält, $= \beta^2 : p$ ist, so ist dies auch die Form des Ausdrucks für den Krümmungsradius jedes andern Schnittes.

Man kann das nämliche Ergebniss aus der im B. 2 des Art. 188 gegebenen Gleichung der Fläche zweiten Grades ableiten, welche auf die Normale der Fläche und die Normalen der beiden durch den betrachteten Punkt gehenden confocalen Flächen bezogen ist, nämlich

$$\frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{a^2 - a'^2} + \frac{z^2}{a^2 - a''^2} - \frac{2p'xy}{p(a^2 - a'^2)} - \frac{2p''xz}{p(a^2 - a''^2)} + \frac{2x}{p} = 0.$$

Die Krümmungsradien der den Ebenen $z = 0$, $y = 0$ respective entsprechenden Schnitte sind durch die Ausdrücke

$$\frac{a^2 - a'^2}{p}, \quad \frac{a^2 - a''^2}{p}$$

gegeben; ihre Zähler sind die Quadrate der Halbaxen des

Schnittes, den eine der Tangentenebene parallele Ebene bestimmt (Art. 178).

Die Gleichung des Schnittes, welcher einer unter dem Winkel θ gegen die Ebene der y geneigten Ebene entspricht, wird gebildet, indem man der Drehung der Coordinatenaxen um den Winkel θ entsprechend für y und z respective $y\cos\theta - z\sin\theta$, $y\sin\theta + z\cos\theta$ substituirt, und dann $z = 0$ setzt. Man findet den Coefficienten $\frac{1}{\beta^2}$ von y^2 in der Form

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2 - a'^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2 - a''^2},$$

und also den Krümmungsradius $\frac{\beta^2}{p}$; und kommt auf das vorige Ergebniss zurück durch die Bemerkung, dass jener Coefficient von y^2 das Quadrat des unter dem Winkel θ gegen die Axe der y geneigten Durchmessers des Centralschnittes ist.

210. Aus dem im Art. 208 ausgesprochenen Gesetze ergiebt sich, dass für jeden Punkt einer centralen Fläche zweiten Grades der Krümmungsradius eines Normalschnittes ein Maximum und ein Minimum seines Werthes für Richtungen des Schnittes erhält, welche der grossen und kleinen Axe des Centralschnittes parallel sind, den die der Tangentenebene parallele Ebene bestimmt.

Man nennt diesen Maximal- und Minimalwerth die Hauptkrümmungsradien für diesen Punkt, und die Schnitte, zu welchen sie gehören, die Hauptschnitte der Fläche in ihm.

Es ergiebt sich aus Art. 177, dass jeder der Hauptschnitte die Normale einer der beiden durch den Punkt gehenden confocalen Flächen enthält.

In Folge dessen ist der Durchschnitt einer Fläche zweiten Grades mit einer ihr confocalen Fläche eine Curve, für welche die Tangente immer eine der Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche für den Berührungspunkt ist. Eine solche Curve nennt man eine Krümmungslinie der Fläche. Mit dieser Definition ist gleichbedeutend die andere, dass sie die Reihen von Punkten der Fläche sind, von deren Normalen je zwei benachbarte sich schneiden. (Siehe das B.)

In dem Falle des Hyperboloids mit einem Mantel ist der

der Tangentenebene parallele Centralschnitt eine Hyperbel, und die Schnitte, deren Spuren in der Tangentenebene den Asymptoten dieser Hyperbel parallel sind, haben unendlich grosse Krümmungsradien, d. h. sie sind, wie wir schon wissen, gerade Linien. Beim Hindurchgehen durch einen dieser Schnitte wechselt der Krümmungsradius das Zeichen, d. h. die Richtung der Convexität von Normalschnitten auf der einen Seite von einer dieser Linien ist derjenigen der Schnitte auf der andern Seite entgegengesetzt.

B. Wenn man für zwei Punkte (x', y', z') und (x'', y'', z'') der Fläche

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

nach Art. 93 die Coordinaten p_{ik} der Normalen mit

$$p_{12} = \frac{x'}{A},\ p_{31} = -\frac{y'}{B},\ p_{14} = \frac{z'}{C},\ p_{23} = \frac{x'\,y'(A-B)}{AB},\ \text{etc.}$$

bildet, so liefert die Bedingung ihres Durchschneidens in Art. 57 die Gleichung

$$A(x'-x'')(y'z''-y''z')+B(y'-y'')(z'x''-z''x')+C(z'-z'')(x'y''-x''y')=0,$$

die durch Einführung der Richtungswinkel α, β, γ ihrer Verbindungsgeraden und derjenigen α_1, β_1, γ_1 der Normalen zu der durch sie gehenden Centralebene die Form annimmt

$$A \cos\alpha \cos\alpha_1 + B \cos\beta \cos\beta_1 + C \cos\gamma \cos\gamma_1 = 0.$$

Damit erhellt, dass dieselbe fortbesteht, wenn A, B, C durch $KA + l$, $KB + l$, $KC + l$ resp. ersetzt werden; und wir erkennen also die Fortdauer der Eigenschaft vom Schnitt der Normalen einer Fläche zweiten Grades in ihren Schnittpunkten mit einer Geraden für jede andere Fläche zweiten Grades, die zu der gegebenen confocal oder ähnlich, ähnlich gelegen und concentrisch ist.[52])

Betrachten wir speciell die drei Flächen U, V, W eines confocalen Systems, welche durch irgend einen Punkt P gehen. Die Normale in P zu U schneidet U noch in P^* und schneidet also die Normale von U in P^*; errichtet man also Normalen zu V resp. W in den Punkten, wo sie resp. durch die Gerade PP^* geschnitten werden, so müssen sich diese ebenfalls schneiden; aber PP^* berührt nach Art. 176 sowohl V als W und es schneiden sich somit die Normalen beider Flächen in aufeinander folgenden Punkten längs ihrer ganzen Durchdringungscurve.

211. Die zwei Hauptkrümmungscentra sind die Pole der Tangentenebene in Bezug auf die beiden durch den

Berührungspunkt gehenden confocalen Flächen. (Vergl. „Kegelschn." Art. 263.)

Denn diese Pole liegen nach Art. 181 in der Normale der Ebene und ihre Entfernungen von derselben

$$\frac{a^2 - a'^2}{p} \text{ und } \frac{a^2 - a''^2}{p} \text{ (Art. 182)}$$

sind nach Art. 209 die Längen der Hauptkrümmungsradien.

Nach Art. 182 ergeben sich daher auch die Coordinaten der Centra der beiden Hauptkrümmungskreise, nämlich respective

$$x = \frac{a'^2 x'}{a^2}, \quad y = \frac{b'^2 y'}{b^2}, \quad z = \frac{c'^2 z'}{c^2};$$

$$x = \frac{a''^2 x'}{a^2}, \quad y = \frac{b''^2 y'}{b^2}, \quad z = \frac{c''^2 z'}{c^2}.$$

212. Wenn man für jeden Punkt einer Fläche zweiten Grades die beiden Hauptkrümmungscentra bestimmt, so ist der Ort aller dieser Centra eine Fläche mit zwei Mänteln, welche wir als die Fläche der Centra bezeichnen wollen. Ihre Gleichung entwickeln wir im nächsten Kapitel.

Die Natur ihrer Durchschnitte mit den Hauptebenen ist aber a priori leicht zu erkennen. Denn der eine der Hauptkrümmungsradien in einem Punkte des Hauptschnittes einer Fläche zweiten Grades ist der Krümmungsradius des Schnittes selbst und der Ort der entsprechenden Centra ist offenbar die Evolute dieses Hauptschnittes.

Der andere Krümmungsradius, welcher einem Punkte des Hauptschnittes der xy entspricht, ist, wie sich aus der Formel des Art. 208 ergiebt, $= c^2 : p$, weil c in jedem durch die Axe der z gehenden Schnitte eine Axe ist. Dann sind nach den Formeln des Art. 211 die Coordinaten des entsprechenden Centrums

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x', \quad \frac{b^2 - c^2}{b^2} y',$$

d. h. sie sind die Pole der Tangente des Hauptschnittes im Punkte x', y' in Bezug auf den entsprechenden Focalkegelschnitt der Fläche. Der Ort dieser Centra ist somit die Reciproke des Hauptschnittes in Bezug auf den Focalkegelschnitt, d. i.

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - c^2)^2} = 1.$$

Und der Schnitt der Fläche durch eine Hauptebene, welcher nothwendig von der zwölften Ordnung ist, be-

steht daher aus der Evolute eines Kegelschnittes, welche von der sechsten Ordnung ist, und einem, wie wir finden werden, dreifach zu zählenden Kegelschnitte, welcher eine Cuspidallinie der Fläche ist. Der Schnitt, welcher der unendlich fernen Ebene entspricht, ist von derselben Natur wie die Schnitte in den Hauptebenen.

Es mag hinzugefügt werden, dass der Kegelschnitt die Evolute in vier Punkten berührt und sie überdies in vier Punkten schneidet; sowie dass jene ersten reell sind in der Ebene der grössten und kleinsten Axe oder der Hauptebene der Kreispunkte.

213. Die reciproke der Fläche der Centra ist eine Fläche vierter Ordnung.

Die allgemeine Theorie der Krümmung der Flächen in Bd. 2 lehrt, dass die Tangentenebene zu jeder der durch (x', y', z') gehenden confocalen Flächen auch eine Tangentenebene der Fläche der Centra ist. Die reciproken Werthe der von der Tangentenebene in den Axen bestimmten Abschnitte sind

$$\xi = \frac{x'}{a'^2}, \quad \eta = \frac{y'}{b'^2}, \quad \zeta = \frac{z'}{c'^2};$$

die Relation

$$\frac{x'^2}{a^2 a'^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2} = 0$$

begründet dann zwischen ξ, η, ζ die Relation

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = (a^2 - a'^2)\left(\frac{\xi^2}{a^3} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right),$$

und die Relation

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

giebt ebenso

$$(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1) = (a^2 - a'^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2);$$

man erhält somit durch die Elimination von $(a^2 - a'^2)$ die Gleichung[53])

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right)(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1),$$

welche die Behauptung bestätigt, indem man bemerkt, dass ξ, η, ζ die Coordinaten der Tangentialebene der Reciprocalfläche sind; denn wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des in Bezug auf die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ genommenen Pols der Tangentenebene bezeichnen, so ist $x\xi + y\eta + z\zeta = 1$ identisch mit der Gleichung

der Tangentenebene und ξ, η, ζ sind die reciproken Werthe der von der Tangentenebene in den Axen gebildeten Abschnitte.

214. Im Anschluss an die Betrachtung der Krümmungslinien lässt sich aus der Theorie der confocalen Flächen eine Gruppe von Sätzen ableiten, welche in anderer Weise als Jacobi's von uns schon angeführter Satz die Gesetze von der Summe und Differenz der Radien vectoren und verwandte aus der Theorie der Kegelschnitte auf die Flächen zweiten Grades übertragen.[54])

Die Beweise dieser Sätze von Heilermann bilden leichte Anwendungen zu den vorigen Entwickelungen; sie werden hier nur geordnet angeführt.

Die beiden Hauptnormalebenen in einem beliebigen Punkte einer Fläche zweiten Grades bestimmen in den Axen der Fläche Punktepaare einer Involution, deren Doppelpunkte gleichweit vom Centrum und für alle Lagen jenes Punktes dieselben sind, und die Normalen der Fläche in ihren Kreispunkten gehen durch diese letzteren. Sie werden Focalcentra der Fläche genannt und sind in der mittleren Axe imaginär, in der grossen und kleinen reell.

Man sieht, dass je zwei in einer Axe gelegene unter ihnen mit der Normale eines Punktes der Fläche zwei Ebenen bestimmen, welche mit den Hauptnormalebenen dieses Punktes ein harmonisches Büschel bilden. Bei den nicht centrischen Flächen geht die Ebene des zweiten Focalcentrums der Axe der Fläche parallel.

Da die Hauptnormalebenen eines Punktes auf einander senkrecht sind, so halbiren sie die von den beiden andern Ebenen des Büschels (d. h. den von der Normale mit den Focalcentren bestimmten) gebildeten Winkel.

Für alle Punkte einer Krümmungslinie ist das Product aus den Abständen einer Hauptnormalebene von zwei zusammengehörigen Focalcentren constant.

Die aus den Focalcentren beschriebenen Kugeln, welche durch die entsprechenden Kreispunkte der Fläche gehen und dieselbe in diesen berühren, werden als ihre Focalkugeln und speciell als conjugirt bezeichnet, wenn ihre Centra derselben Axe angehören. Sie sind für das Ellipsoid und für das zweifache Hyperboloid reell. Die Längen der Tangenten, die von einem beliebigen

Punkte der Fläche an eine solche Kugel gezogen werden, hat man als die Focalstrahlen des bezüglichen Punktes benannt.

Jeder Focalstrahl eines Punktes einer Fläche zweiten Grades ist gleich der Summe oder Differenz der zugehörigen Halbaxen der Flächen, welche mit ihr confocal sind und jenen Punkt enthalten. Und weiter: Für alle Punkte einer Krümmungslinie einer centrischen Fläche zweiten Grades ist die Summe oder die Differenz der Längen der von ihnen an zwei conjugirte Focalkugeln der Fläche gehenden Focalstrahlen constant und der durch die Focalcentra gehenden Axe der Fläche gleich, welche die Krümmungslinie bestimmt, je nachdem sie dem einen oder andern Systeme der Krümmungslinien angehört. Und zwar ist speciell für die Punkte der von einem Ellipsoid mit einem zweifachen Hyperboloid bestimmten Krümmungslinie

die Differenz der zu den innern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen der reellen Axe des Hyperboloids,

die Summe der zu den äussern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen der grossen imaginären Axe des Hyperboloids gleich;

und es ist die Summe der zu den innern Focalkugeln des Hyperboloids gehörigen Focalstrahlen gleich der grossen Axe des Ellipsoids,

die Summe der zu den äussern Focalkugeln des Hyperboloids gehörigen Focalstrahlen gleich der mittlern Axe des Ellipsoids.

Ebenso ist für die vom einfachen Hyperboloid mit dem Ellipsoid bestimmte Krümmungslinie die Summe der zu den innern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen gleich der grossen reellen Axe des Hyperboloids; etc.

Nennen wir ferner die Polarebene eines Focalcentrums in Bezug auf die confocale Fläche, welche eine gegebene Krümmungslinie bestimmt, die Directorebene der letzteren, und den Quotienten aus der Entfernung der Focalcentra vom Centrum durch die entsprechende Halbaxe der confocalen Fläche ihre Excentricität, so gilt der weitere Satz: Die Focalstrahlen der Punkte einer Krümmungslinie stehen zu ihren Entfernungen von der zugehörigen Directorebene in einem constanten, der Excentricität der Krümmungslinie gleichen Verhältnisse.

Kurz: Je zwei sich schneidende Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades verhalten sich in Bezug auf drei Paare in den Axen symmetrisch gegen den Mittelpunkt gelegene reelle oder imaginäre Punkte ganz ähnlich, wie zwei sich schneidende confocale Kegelschnitte in Bezug auf ihre Brennpunkte.

215. Neuestens sind durch Staude[55]) die Focalcurven als Quelle einfacher Distanzrelationen erkannt worden, die der Absicht von Jacobi (Art. 205) andersartig entsprechen; wir geben eine Einführung im Anschluss an Art. 174.

Für die Focalellipse mit der linearen Excentricität h und der grossen Halbaxe k (die kleine werde gelegentlich kürzend l genannt), also

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 - h^2} = 1,$$

sind für den laufenden Punkt $P_1(x_1, y_1, 0)$ nach Art. 170 der „Kegelschn." $x_1 = k \cos\theta$, $y_1 = l \sin\theta$ und die Radien vectoren gleich $k \mp h \cos\theta$. Nun hat ein beliebiger Punkt $P(x, y, z)$ von P_1 die Entfernung

$$\varrho = \sqrt{(x - k\cos\theta)^2 + (y - l\sin\theta)^2 + z^2}$$

und die Summe r, r' der Entfernungen von P über P_1 auf der Ellipse bis zu ihrem ersten resp. zweiten Brennpunkte wird im Maximum resp. Minimum mit Erfüllung der ersten oder zweiten der Bedingungen

$$kx\sin\theta - ly\cos\theta - h^2\sin\theta\cos\theta \pm \varrho h\sin\theta = 0;$$

und durch Elimination von ϱ aus $r = \varrho + k - h\cos\theta$ mittelst der ersten ergiebt sich

$$\{kx + h(r - k)\}\sin\theta - ly\cos\theta = 0;$$

ebenso aus $r' = \varrho + k + h\cos\theta$ mit der zweiten

$$\{kx + h(k - r')\}\sin\theta - ly\cos\theta = 0,$$

zwei Gleichungen, welche durch die Einführung des Zeichens δ für die Differenzen $r - k$ und $k - r'$ dieselbe Form annehmen

$$(1) \qquad (kx + 4h\delta)\sin\theta - ly\cos\theta = 0.$$

Zugleich liefern die Ausdrücke für r und r' resp. $(4\delta + h\cos\theta) \mp \varrho = 0$ und durch Multiplication beider $(4\delta + h\cos\theta)^2 - \varrho^2 = 0$, oder

mit Einführung des Werthes von ϱ

$$(2)\quad ly \sin\theta + (kx + 4h\delta)\cos\theta = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + l^2}{2} - 8\delta^2.$$

Berechnet man aus (1) und (2) $\sin\theta$ und $\cos\theta$ und bildet die Summe ihrer Quadrate, so erhält man

$$(kx + 4h\delta)^2 + (k^2 - h^2)y^2 = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + k^2 - h^2}{2} - 8\,\delta^2\right)^2,$$

und nach Potenzen von δ geordnet

$$(3)\ \delta^4 - \frac{1}{8}(x^2 + y^2 + z^2 + h^2 + k^2)\,\delta^2 - \frac{1}{8}\,hkx\delta$$
$$+ \frac{1}{256}\{(x^2+y^2+z^2+k^2-h^2)^2 - 4k^2x^2 - 4(k^2-h^2)y^2\} = 0.$$

Die Wurzeln δ_1, δ_2, δ_1', δ_2' dieser biquadratischen Gleichung sind die Viertel der Differenzen $r_1 - k$, $r_2 - k$, $k - r_1'$, $k - r_2'$ resp., wenn r_1, r_2, r_1', r_2' die vier gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P bezeichnen; es giebt nur je eine maximale und eine minimale über die Focalellipse gebrochene Distanz von P zu ihrem ersten resp. zweiten Brennpunkte. Ihre Realität wird die Bildung der Resolvente der Gleichung (3) zeigen. Zunächst entspringt aus dem Fehlen des Gliedes mit δ^3 in dieser die Relation zwischen ihnen

$$r_1 + r_2 - r_1' - r_2' = 0.$$

Für $\varDelta$ gleich dem Quadrat der sechswerthigen Summe ihrer vier Wurzeln ist nach Serret die cubische Resolvente der biquadratischen Gleichung

$$\delta^4 + q\delta^2 + r\delta + s = 0 \quad \varDelta^3 + 8q\varDelta^2 + 16(q^2 - 4s)\varDelta - 64r^2 = 0$$

(unabhängig wie man sieht vom Zeichen der ersten Potenz von δ) und wird somit in unserm Falle $0 =$

$$\varDelta^3 - (x^2+y^2+z^2+h^2+k^2)\varDelta^2 + \{(h^2+k^2)x^2 + k^2y^2 + h^2z^2 + h^2k^2\}\varDelta - h^2k^2x^2.$$

Ersetzen wir hier $\varDelta$ durch a^2 — Quadrat der primären Halbaxe eines Ellipsoids oder Hyperboloids mit unserer Focalellipse — und ordnen wir nach den x^2, y^2, z^2, so wird sie zu $0 =$

$$-(a^2-h^2)(a^2-k^2)x^2 - a^2(a^2-k^2)y^2 - a^2(a^2-h^2)z^2 + a^2(a^2-h^2)(a^2-k^2)$$

oder
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - h^2} + \frac{z^2}{a^2 - k^2} = 1 \quad \text{(vergl. Art. 174);}$$

d. h. die Gleichung der confocalen Ellipsoide und Hyperboloide ist als Gleichung sechsten Grades in a die Resolvente der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen. Ihre Wurzeln und folglich die der biquadratischen Gleichung oder die gebrochenen Focaldistanzen von $P(x, y, z)$ sind sämmtlich reell.

Ersetzen wir endlich die Wurzeln der Resolvente durch ihre Werthe in den δ, also

$$\pm(\delta_1+\delta_2-\delta_1'-\delta_2'),\ \pm(\delta_1-\delta_2-\delta_1'+\delta_2'),\ \pm(\delta_1-\delta_2+\delta_1'-\delta_2'),$$

so folgt nach ihren Relationen zu den r und r' die Identität von

$$-a^2(a-h^2)(a^2-k^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-h^2}+\frac{z^2}{a^2-k^2}-1\right\}$$

mit dem Producte der drei Paare von Factoren

$$\left(a-\frac{r_1+r_2+r_1'+r_2'-4k}{4}\right)\left(a+\frac{r_1+r_2+r_1'+r_2'-4k}{4}\right),$$
$$\left(a-\frac{r_1-r_2+r_1'-r_2'}{4}\right)\left(a+\frac{r_1-r_2+r_1'-r_2'}{4}\right),$$
$$\left(a-\frac{r_1-r_2-r_1'+r_2'}{4}\right)\left(a+\frac{r_1-r_2-r_1'+r_2'}{4}\right);$$

oder die Fläche des confocalen Systems hat für jeden ihrer Punkte eine der drei Distanzeigenschaften, die das Verschwinden eines der Paare dieser Factoren ausspricht. Mittelst der Relation zwischen den r und den r' gehen sie in die einfachere Form über

$$r_1+r_2-2k=\pm 2a,\quad r_1-r_2'=\pm 2a,\quad r_1-r_1'=\pm 2a$$

oder die äquivalenten

$$r_1'+r_2'-2k=\pm 2a,\quad r_2-r_1'=\pm 2a,\quad r_2-r_2'=\pm 2a.$$

Ihre Analogie zu den Eigenschaften der Kegelschnitte erhellt aus Clebsch's Identität für die Ellipsen und Hyperbeln

$$-a^2(a^2-h^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-h^2}-1\right)$$
$$=\left(a-\frac{r+r'}{2}\right)\left(a+\frac{r+r'}{2}\right)\left(a-\frac{r-r'}{2}\right)\left(a+\frac{r-r'}{2}\right).$$

Sie liefern Fädenconstructionen der Flächen zweiten Grades zunächst aus den Focalkegelschnitten, unter Vertretung der Focalhyperbel durch ihre Scheitel d. h. die Brennpunkte der

Focalellipse. Aber die Eigenschaften der Confocalen führen zur Erweiterung. Wie nach dem Satze von Graves in Art. 265 der „Kegelschn.“ eine Ellipse aus einer zu ihr confocalen mittelst eines sie umschlingenden Fadens von constanter Länge durch einen Punkt derselben beschrieben wird, so entspringen allgemein Fadenconstructionen einer Fläche zweiten Grades aus zwei gegebenen Confocalen.

Natürlich umfasst die Analogie auch den Fall der Paraboloide. (B.) Die weitere Entwickelung des allgemeinen Falles gehört zu den Anwendungen der elliptischen Coordinaten (vergl. Art. 202); der des speciellen entsprechen analoge parabolische Coordinaten.

B. Für die Paraboloide (Art. 167) hat die Summe der Strecken, die von einem Punkte P über eine Focalparabel $x^2 + 2ez - e^2 = 0$ zu ihrem Brennpunkte führen, ein Minimum δ_1 und ihre Differenz ein Maximum δ_2 und ein Minimum δ_3 — die gebrochenen Focaldistanzen von P. Man findet sie durch die cubische Gleichung verbunden

$$\delta^3 + (z-e)\delta^2 - (x^2+y^2+z^2)\delta + (e-z)(x^2+z^2) - zy^2 = 0,$$

sodass ihre Summe gleich $e - z$ ist. Daraus folgt als die cubische Gleichung, die die Summen Δ ihrer Wurzelpaare zu Wurzeln hat

$$\Delta^3 + 2(z-e)\Delta^2 + (e^2 - 2ez - x^2 - y^2)\Delta + ey^2 = 0,$$

sodass man identisch hat

$$-\Delta(e-\Delta)\left\{\frac{x^2}{e-\Delta} + \frac{y^2}{-\Delta} + 2z + \Delta - e\right\}$$
$$= (\Delta - \delta_2 - \delta_3)(\Delta - \delta_3 - \delta_1)(\Delta - \delta_1 - \delta_2),$$

oder mit $\Delta = e - p$

$$-p(p-e)\left\{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p-e} + 2z - p\right\}$$
$$= (p-e+\delta_2+\delta_3)(p-e+\delta_3+\delta_1)(p-e+\delta_1+\delta_2).$$

Die Summen der δ in Paaren und damit diese selbst sind also reell, wie die p aus der cubischen Gleichung der confocalen Paraboloide; und ein Paraboloid besitzt, je nachdem p zwischen $-\infty$ und 0, oder 0 und e resp. e und $+\infty$ liegt, eine der drei Distanzeigenschaften

$$\delta_2 + \delta_3 - e + p = 0, \text{ etc. } \quad \text{oder} \quad \delta_1 + z - p = 0, \text{ etc.}$$

XI. Kapitel.

Von den Invarianten und Covarianten der einfachsten Systeme von Flächen zweiten Grades.

216. Weil nach Art. 125 f. der Uebergang von einem geometrischen System zu einem ihm projectivischen d. h. collinearen oder reciproken System durch die allgemeine lineare Substitution vollzogen wird, so kann die Entdeckung projectivischer Eigenschaften der geometrischen Figuren, d. h. solcher Eigenschaften, welche allen projectivischen Abbildern einer gegebenen Figur gemeinschaftlich sind, auf die Entdeckung solcher Functionen der Coefficienten und der Veränderlichen ihrer Gleichungen gegründet werden, welche bei einer allgemeinen linearen Substitution unverändert bleiben oder doch nur durch das Hinzutreten eines constanten Factors verändert werden, d. h. auf die Theorie der Invarianten, Covarianten und Contravarianten im Sinne der neuern Algebra. Denken wir die Substitution als eine solche, welche einer Coordinatentransformation entspricht (Art. 128), so liefern die bezüglichen Invarianten der Gleichung einer geometrischen Figur individuelle Eigenschaften derselben. Wird eine Fläche zweiten Grades als fest oder absolut angesehen, so liefern die invarianten Beziehungen der Raumformen zu ihr die Theorie der räumlichen Maassbestimmungen. (Vergl. Art. 246 und „Kegelschn.“, Art. 383 f.)

Die projectivischen Eigenschaften der Flächen zweiten Grades, die Beziehungen der Tangentialebene und Tangente, der harmonischen Pole, Polarebenen und Polarlinien (Art. 72—82; früher 62, 64 f.) fanden wir alle in ihrer analytischen Ausdrucksform auf eine Function bezogen, die wir Discriminante nannten und die gleich Null gesetzt die Bedingung dafür gab, dass die Fläche zweiter Ordnung ein Kegel wird, oder für die Gleichung in den

Variabelen ξ_i dafür, dass die Fläche zweiter Klasse in eine ebene Curve degenerirt. Es ist aus dieser ihrer Bedeutung evident, dass sie eine Invariante ist, man kann aber in Art. 355 der „Kegelschnitte" direct bewiesen finden, dass die Discriminante der transformirten Gleichung zweiten Grades aus der Discriminante der ursprünglichen erhalten wird, indem man sie mit dem Quadrate der Determinante der Substitution multiplicirt. An die nämliche Function lässt sich die Entwickelung der Invarianten und Covarianten der Systeme von Flächen zweiten Grades knüpfen. (Vergl. Art. 149.)

Für $\lambda U + U' = 0$ als Gleichung eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung und mit

$$U \equiv a_{11} x_1^2 + \cdots + 2 a_{12} x_1 x_2 + \cdots\cdots = 0,$$
$$\Delta \equiv \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44},$$
$$U' \equiv a'_{11} x_1^2 + \cdots + 2 a'_{12} x_1 x_2 + \cdots\cdots = 0,$$
$$\Delta' \equiv \Sigma \pm a'_{11} a'_{22} a'_{33} a'_{44}$$

ist die Discriminante des Büschels

$$= \Sigma \pm (\lambda a_{11} + a'_{11})(\lambda a_{22} + a'_{22})(\lambda a_{33} + a'_{33})(\lambda a_{44} + a'_{44})$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + a'_{11}, & \lambda a_{12} + a'_{12}, & \lambda a_{13} + a'_{13}, & \lambda a_{14} + a'_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{41} + a'_{41}, & \lambda a_{42} + a'_{42}, & \lambda a_{43} + a'_{43}, & \lambda a_{44} + a'_{44} \end{vmatrix}$$

mit $a_{ij} = a_{ji}$, $a'_{ij} = a'_{ji}$.

Ihr Verschwinden liefert eine in λ biquadratische Gleichung zur Bestimmung der vier Werthe von λ, denen die Kegelflächen des Büschels entsprechen, eine Gleichung, welche wir in der Form

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Phi + \lambda \Theta' + \Delta' = 0$$

schreiben; durch Zerlegung der obigen Determinante findet man ausser den schon in Art. 68 gegebenen Werthen von Δ, Δ'

$$\Theta \equiv \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a'_{44} + \Sigma \pm a'_{11} a_{22} a_{33} a_{44} + \Sigma \pm a_{11} a'_{22} a_{33} a_{44} + \Sigma \pm a_{11} a_{22} a'_{33} a_{44},$$

$$\Theta' \equiv \Sigma \pm a'_{11} a'_{22} a'_{33} a_{44} + \Sigma \pm a_{11} a'_{22} a'_{33} a'_{44} + \Sigma \pm a'_{11} a_{22} a'_{33} a'_{44} + \Sigma \pm a'_{11} a'_{22} a_{33} a'_{44},$$

$$\Phi \equiv \Sigma \pm a'_{11} a'_{22} a_{33} a_{44} + \Sigma \pm a'_{11} a_{22} a'_{33} a_{44} + \Sigma \pm a'_{11} a_{22} a_{33} a'_{44} + \Sigma \pm a_{11} a'_{22} a'_{33} a_{44} + \Sigma \pm a_{11} a'_{22} a_{33} a'_{44} + \Sigma \pm a_{11} a_{22} a'_{33} a'_{44}.$$

Da die Werthe von λ, welche die Gleichung $\lambda U + U' = 0$ zur Gleichung einer Kegelfläche machen, von dem Coordinatensystem unabhängig sind, auf welches U und U' sich beziehen und sich auch beim Uebergange zu einem projectivischen System nicht ändern, so sind auch diese Coefficienten der Gleichung in λ ebenso wie Δ, Δ' Invarianten. Sie sind die simultanen Invarianten von U und U' oder die Invarianten des Büschels. Die folgenden Beispiele ihrer Berechnung schliessen einige der am häufigsten vorkommenden Fälle ein.

B. 1. Durch geeignete Wahl des Einheitpunktes können die auf das gemeinschaftliche Polquadrupel zweier Flächen zweiten Grades bezogenen Gleichungen des Art. 152 in die Form

$$U \equiv \mathrm{a}_1 x_1^2 + \mathrm{a}_2 x_2^2 + \mathrm{a}_3 x_3^2 + \mathrm{a}_4 x_4^2 = 0,$$

$$U' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

gebracht werden. Man erhält durch Verschwinden aller a_{ij} und a'_{ji} für verschiedene i, j und die Gleichheit der a'_{ii} mit Eins

$$\Delta \equiv \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2 \mathrm{a}_3 \mathrm{a}_4, \quad \Delta' \equiv 1,$$

$$\Theta \equiv \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2 \mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_2 \mathrm{a}_3 \mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_3 \mathrm{a}_4 \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_4 \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2,$$

$$\Theta' \equiv \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_4,$$

$$\Phi \equiv \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_2 \mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_3 \mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_2 \mathrm{a}_4,$$

die einfachen symmetrischen Functionen der Coefficienten a_i, sodass die Parameter der vier Kegel im Büschel der Flächen die $-\mathrm{a}_i$ sind.

B. 2. Sei wie vorher $U' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, $U = 0$ aber die allgemeine Gleichung, also

$$\Delta' \equiv 1, \quad \Delta \equiv \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

Wenn dann A_{11}, A_{22}, ... die den Elementen a_{11}, a_{22}, ... der Determinante Δ entsprechenden Minoren (vgl. Art. 68) oder die Elemente des adjungirten Systems sind, so hat man $\Theta \equiv A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$, $\Theta' \equiv a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$.

Im allgemeinen Falle, wenn A_{11}, A_{12}, ... die Elemente des adjungirten Systems von Δ und A'_{11}, A'_{12}, ... die Elemente des adjungirten Systems von Δ' sind, haben diese Invarianten die Werthe

$$\Theta \equiv a'_{11} A_{11} + a'_{22} A_{22} + a'_{33} A_{33} + a'_{44} A_{44} + 2 a'_{12} A_{12} + 2 a'_{13} A_{13}$$
$$+ 2 a'_{14} A_{14} + 2 a'_{23} A_{23} + 2 a'_{24} A_{24} + 2 a'_{34} A_{34},$$

$$\Theta' \equiv a_{11} A'_{11} + a_{22} A'_{22} + \text{etc.}$$

In dem Specialfalle reduciren sich diese Ausdrücke wegen der Relationen $a_{ii}' = 1$, $a_{ij}' = 0$, $A_{ii}' = 1$, $A_{ij}' = 0$ in der angegebenen Art. Die Determinanten von Φ reduciren sich gleichfalls zu

$$\Phi \equiv (a_{33}a_{44} - a_{34}^2) + (a_{44}a_{11} - a_{14}^2) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + (a_{22}a_{44} - a_{24}^2).$$

Wäre $U \equiv \mathfrak{a}_1 x_1{}^2 + \mathfrak{a}_2 x_2{}^2 + \mathfrak{a}_3 x_3{}^2 + \mathfrak{a}_4 x_4{}^2 = 0$ und $U' = 0$ die allgemeine Gleichung, so erfahren die vorigen Werthe nur durch Eintreten der gestrichenen Coefficienten an Stelle der ungestrichenen und durch Hinzutreten der Factoren $\mathfrak{a}_1, \ldots; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \ldots$ etc. Veränderungen. Es ist

$$\Delta \equiv \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \Delta' \equiv \Sigma \pm a_{11}'a_{22}'a_{33}'a_{44}',$$
$$\Theta \equiv a_{11}'\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 + \cdots, \quad \Theta' \equiv \mathfrak{a}_1 A_{11}' + \mathfrak{a}_2 A_{22}' + \cdot\cdot,$$
$$\Phi \equiv \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2(a_{33}'a_{44}' - a_{34}'^2) + \cdots\cdot\cdot$$

B. 3. Sind $U = 0$ und $U' = 0$ die Gleichungen zweier Kugeln, also respective

$$x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0, \ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \varrho'^2 = 0,$$

so erhält man für $D^2 \equiv (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ als das Quadrat ihrer Centraldistanz

$$\Delta = -\varrho^2, \ \Delta' = -\varrho'^2, \ \Theta = D^2 - 3\varrho^2 - \varrho'^2, \ \Theta' = D^2 - \varrho^2 - 3\varrho'^2,$$
$$\Phi = 2D^2 - 3\varrho^2 - 3\varrho'^2.$$

Die biquadratische Gleichung zur Bestimmung von λ wird

$$(\lambda + 1)^2 \{-\varrho^2\lambda^2 + (D^2 - \varrho^2 - \varrho'^2)\lambda - \varrho'^2\} = 0.$$

B. 4. Für Ellipsoid und Kugel erhält man aus

$$U \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \ U' \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \varrho^2$$

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2c^2}, \Delta' = -\varrho^2, \ \Theta = \frac{1}{a^2b^2c^2}\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\},$$
$$\Theta' = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 - \varrho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$
$$\Phi = \frac{1}{b^2c^2}(\beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2) + \frac{1}{c^2a^2}(\gamma^2 + \alpha^2 - \varrho^2) + \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Das Verschwinden der Discriminante von $\lambda U + U' = 0$ giebt

eine biquadratische Gleichung, welche in der Form

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{\varrho^2}{\lambda}$$

darstellbar ist, weil $\lambda U + U'$ die Form einer Summe von Vielfachen der Quadrate von Veränderlichen X_1 etc. annimmt.

B. 5. Für $U = 0$ als ein Paraboloid $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0$ und $U' = 0$ als die Kugel des vorigen Beispiels wird

$$\Delta = -a_{11}a_{22}a_{34}^2,\quad \Delta' = -\varrho^2,\quad \Theta = -a_{34}^2(a_{11}+a_{22}) + 2a_{11}a_{22}a_{34}\gamma,$$

$$\Theta' = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + 2a_{34}\gamma - (a_{11}+a_{22})\varrho^2,$$

$$\Phi = a_{11}a_{22}(\alpha^2+\beta^2-\varrho^2) + 2(a_{11}+a_{22})a_{34}\gamma - a_{34}^2;$$

und die biquadratische Gleichung erhält in ähnlicher Art die Form

$$\frac{\lambda a_{11}\alpha^2}{\lambda a_{11}+1}+\frac{\lambda a_{22}\beta^2}{\lambda a_{22}+1}+2\lambda a_{34}\gamma=\lambda^2 a_{34}^2+\varrho^2.$$

B. 6. Im allgemeinen Falle ist der Werth von Φ der folgende:

$$\begin{aligned}
&(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)(a'_{11}a'_{44}-a'^2_{14})+(a_{33}a_{11}-a_{13}^2)(a'_{22}a'_{44}-a'^2_{24})\\
&+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a'_{33}a'_{44}-a'^2_{34})+(a_{11}a_{44}-a_{14}^2)(a'_{22}a'_{33}-a'^2_{23})\\
&+(a_{22}a_{44}-a_{24}^2)(a'_{11}a'_{33}-a'^2_{13})+(a_{33}a_{44}-a_{34}^2)(a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12})\\
&+2(a_{13}a_{24}-a_{12}a_{34})(a'_{13}a'_{24}-a'_{12}a'_{34})+2(a_{12}a_{34}-a_{23}a_{14})(a'_{12}a'_{34}-a'_{23}a'_{14})\\
&+2(a_{23}a_{14}-a_{13}a_{24})(a'_{23}a'_{14}-a'_{13}a'_{24})+2(a_{24}a_{12}-a_{14}a_{22})(a'_{14}a'_{33}-a'_{34}a'_{13})\\
&+2(a_{34}a_{23}-a_{24}a_{33})(a'_{24}a'_{11}-a'_{14}a'_{12})+2(a_{14}a_{13}-a_{34}a_{11})(a'_{34}a'_{22}-a'_{24}a'_{23})\\
&+2(a'_{24}a'_{12}-a'_{14}a'_{22})(a_{14}a_{33}-a_{34}a_{13})+2(a'_{34}a'_{23}-a'_{24}a'_{33})(a_{24}a_{11}-a_{14}a_{12})\\
&+2(a'_{14}a'_{13}-a'_{24}a'_{11})(a_{34}a_{22}-a_{24}a_{23})+\\
&+2(a_{23}a_{44}-a_{24}a_{34})(a'_{13}a'_{12}-a'_{11}a'_{23})+2(a_{13}a_{44}-a_{34}a_{14})(a'_{12}a'_{23}-a'_{22}a'_{13})\\
&+2(a_{12}a_{44}-a_{14}a_{24})(a'_{23}a'_{13}-a'_{33}a'_{12})+2(a'_{23}a'_{44}-a'_{24}a'_{34})(a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23})\\
&+2(a'_{13}a'_{44}-a'_{34}a'_{14})(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})+2(a'_{12}a'_{44}-a'_{14}a'_{24})(a_{23}a_{13}-a_{33}a_{12}).
\end{aligned}$$

Die Invariante Φ ist also eine Function derselben Grössen, die in Art. 81 in der Bedingung der Berührung einer Geraden mit einer Fläche zweiten Grades aufgetreten sind.

Diese Bedingung ist eine quadratische Function der sechs Coordinaten der Geraden, und wenn wir die Coefficienten der Quadrate der Coordinaten $p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$ in ihr durch $c_{11}, \ldots, c_{66}$ und die der Doppelproducte derselben durch $c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{56}$ bezeichnen, und die entsprechenden Coefficienten

in der analogen Bedingung für die Fläche $U' = 0$ durch Beifügung des Striches unterscheiden, so ist Φ in Analogie zu den Ausdrücken von Θ und Θ' im B. 2 gleich[56])

$$c_{11}c'_{44} + c'_{11}c_{44} + c_{22}c'_{55} + c'_{22}c_{55} + c_{33}c'_{66} + c'_{33}c_{66} + 2c_{14}c'_{14} + \text{etc.}$$

Man kann auch die Discriminante als Function derselben Grössen schreiben und erhält

$$\begin{aligned}\Delta &= c_{11}c_{44} + c_{12}c_{45} + c_{13}c_{46} + c_{14}^2 + c_{15}c_{42} + c_{16}c_{43}\\ &= c_{21}c_{54} + c_{22}c_{55} + c_{23}c_{56} + c_{24}c_{51} + c_{25}^2 + c_{26}c_{53}\\ &= c_{31}c_{64} + c_{32}c_{65} + c_{33}c_{66} + c_{34}c_{61} + c_{35}c_{62} + c_{36}^2.\end{aligned}$$

Für das Flächenbüschel, d. h. durch die Substitution $(\lambda a_{ik} + a'_{ik})$ für a_{ik} gehen die c_{ik} in nach λ quadratische Trinome über, z. B. c_{11} in $\lambda^2 c_{11} + c'_{11} + \lambda b_{11}$ für

$$b_{11} = a_{22}a'_{33} + a'_{22}a_{33} - 2a_{23}a'_{23}, \text{ etc.}$$

und führen zu verschiedenen Arten der Schreibung der Invarianten.

B. 7. Wenn wir erinnern, dass eine Fläche zweiten Grades $U = 0$ eine involutorische oder symmetrische räumliche Reciprocität (Art. 134) oder ein System von vier linearen Gleichungen

$$m\xi'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

darstellt, welches die Symmetriebedingung der Coefficienten $a_{ik} = a_{ki}$ erfüllt, so entspringt die Frage nach der Bedeutung unserer an die Discriminante anknüpfenden Untersuchungen in dem allgemeinen Falle, wo die lineare Substitution nicht symmetrisch ist (Art. 127), und anderseits in dem specielleren Falle des Nullsystems (Art. 133), wo sie schiefsymmetrisch ist oder wo man hat $a_{ik} = -a_{ki}$.

Im ersten Falle lassen sich zu zwei allgemeinen Reciprocitäten

$$R \equiv \Sigma\Sigma a_{ik}x'_i x_k, \quad R' \equiv \Sigma\Sigma a'_{ik}x'_i x_k \quad \text{(S. 173)}$$

vier Punkte x_i bestimmen, denen durch sie und als auch durch

$$\lambda R + R' = 0$$

je ein und dieselbe Ebene zugeordnet wird; nämlich mittelst der Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\Delta(\lambda) \equiv \Sigma \pm (\lambda a_{11} + a'_{11})(\lambda a_{22} + a'_{22})(\lambda a_{33} + a'_{33})(\lambda a_{44} + a'_{44}) = 0;$$

und ebenso vier Ebenen, denen in den Reciprocitäten des Büschels je derselbe Punkt entspricht. Im Falle der Polarsysteme oder der symmetrischen Reciprocitäten kommen wir auf das Problem des gemeinsamen Polartetraeders zurück. (Art. 149.)

Für Nullsysteme oder schief symmetrische Reciprocitäten erhalten wir die beiden Directrixen der linearen Congruenz (Art. 58, 2), die den Nullsystemen des Büschels gemeinsam ist, als den Ort der Punkte, denen durch alle diese dieselbe Ebene zugeordnet wird, nämlich die Verbindungsebene mit der andern Directrix.

Von den Fällen, die eine allgemeine Reciprocität mit einer symmetrischen resp. schiefsymmetrischen combiniren, sei nur Erwähnung gethan. Nur der Fall, wo R als Polarsystem und R' als Nullsystem gedacht wird, soll kurz erläutert werden. (Vergl. Art. 134, 8.) Die vier Ebenen, die den durch $\Delta(\lambda) = 0$ bestimmten Punkten durch sie entsprechen, müssen dann diese Punkte enthalten und in ihnen die Flächen zweiten Grades berühren; die λ_i bilden zwei Paare von entgegengesetzt gleichen Wurzeln, so dass die vier Punkte die Ecken und die Ebenen die Flächen eines windschiefen Vierseits in der Fläche zweiten Grades bilden, das also ihr mit dem linearen Complex des Nullsystems gemeinsam ist.[57])

217. Man soll die geometrische Bedeutung der Bedingung $\Theta = 0$ und die der Bedingung $\Phi = 0$ entwickeln.

Aus dem B. 2 des vorigen Art. ergiebt sich, dass für die Beziehung auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder d. h. das Fundamentaltetraeder als ein in Bezug auf $U = 0$ sich selbst conjugirtes Quadrupel oder ein Quadrupel harmonischer Pole von U

$$\Theta = a_{22}a_{33}a_{44}a'_{11} + a_{33}a_{44}a_{11}a'_{22} + a_{44}a_{11}a_{22}a'_{33} + a_{11}a_{22}a_{33}a'_{44}$$

ist und dies verschwindet für das gleichzeitige Verschwinden der a'_{ii}; d. h.: Die Invariante Θ ist Null, wenn der Fläche $U' = 0$ ein Tetraeder eingeschrieben werden kann, welches in Bezug auf $U = 0$ sich selbst conjugirt ist.

In gleicher Art erkennen wir, dass Θ' verschwindet, wenn die A'_{ii} verschwinden, und da $A'_{ii} = 0$ die Bedingung ist, unter welcher die Ebene $x_i = 0$ die Fläche $U' = 0$ berührt, so verschwindet Θ', sobald der Fläche $U' = 0$ ein Tetraeder umgeschrieben werden kann, welches in Bezug auf $U = 0$ sich selbst conjugirt ist. Nach dem Vorigen ist aber $\Theta' = 0$ zugleich die Bedingung, unter welcher der Fläche $U = 0$ ein in Bezug auf $U' = 0$ sich selbst conjugirtes Tetraeder eingeschrieben werden kann; man erkennt also auch, dass aus der einen dieser Beziehungen die andere folgt.

Die Invariante Φ ist gleich Null, wenn die sämmtlichen Kanten eines Tetraeders, das in Bezug auf die

eine Fläche sich selbst conjugirt ist, die andere Fläche berühren.

B. 1. Die Ecken von zwei in Bezug auf dieselbe Fläche zweiten Grades sich selbst conjugirten Tetraedern bilden ein System von acht Punkten, durch dessen letzten jede Fläche zweiten Grades geht, die die sieben übrigen enthält.[58])

Denn für eine Fläche zweiten Grades durch die vier Ecken des einen Tetraeders und drei Ecken des zweiten, welches wir als Fundamentaltetraeder denken, ist nach Art. 216, 2 nothwendig $\Theta' = 0$ oder $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 0$, weil die Fläche die Ecken des ersten Tetraeders enthält; und da wegen der Lage von drei Ecken des zweiten in der Fläche $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$ ist, so wird auch $a_{44} = 0$, d. h. die vierte Ecke des zweiten Tetraeders liegt auch in der Fläche.

Man beweist in derselben Art den reciproken Satz, dass jede Fläche zweiten Grades, welche sieben der Tetraederflächen zu Tangentialebenen hat, auch die achte Fläche berühren muss.

B. 2. Für jede einem sich selbst conjugirten Tetraeder umgeschriebene Kugel ist die Länge der vom Mittelpunkte der Fläche an sie gehenden Tangente die gleiche. Denn nach Art. 216, 3 giebt die Bedingung $\Theta = 0$ für das Quadrat der fraglichen Tangente $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2$ den Werth $a^2 + b^2 + c^2$. (Vergl. „Kegelschn." Art. 363, 2.)

Nach diesem Werthe können wir den Satz auch so aussprechen: Alle durch Punktquadrupel harmonischer Pole einer Fläche zweiten Grades gehenden Kugeln sind zu derjenigen Kugel orthogonal, von deren Punkten aus je drei zu einander rechtwinklige Tangentialebenen an die Fläche gehen. (Art. 95.)

B. 3. Wenn für ein Hyperboloid $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$ die Relation $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ erfüllt ist, so liegt das Centrum der von einem Quadrupel harmonischer Polarebenen berührten Kugel stets in der Fläche. Dies folgt aus der Bedingung $\Theta' = 0$ in Art. 216, B. 4.

B. 4. Der Ort des Mittelpunktes der durch ein Quadrupel harmonischer Pole eines Paraboloids hindurchgehenden Kugel ist eine Ebene. (Art. 216, B. 5.)

B. 5. Weil die Simultaninvarianten Θ und Θ' lineare Functionen der Coefficienten der Punktcoordinatengleichung von U' respective U und der Coefficienten der Ebenencoordinatengleichung von U respective U' sind, so giebt $\Theta = 0$ eine lineare Bedingung für die Bestimmung der A_{ik} aus den a_{ik}' und umgekehrt und

ebenso $\Theta' = 0$ eine lineare Bedingung für die Bestimmung der a_{ik} aus den A'_{ik} und umgekehrt. Nennt man solche Flächen zweiten Grades, für welche Θ oder Θ' verschwindet, zu einander harmonisch, so gilt der allgemeine Satz von den contravarianten linearen Gebilden in Art. 362 der „Kegelschn." p. 637 auch für Flächen zweiten Grades, nur mit der Veränderung, dass $(8 - \varkappa)$ an Stelle von $(4 - \varkappa)$ zu setzen ist. Man erörtere die Erweiterung bezüglicher Sätze auf Flächen zweiten Grades. — Diese Lehre ordnet sich einer Theorie der Projectivität von Flächensystemen auf Grund der Betrachtung ihrer Coefficienten als Coordinaten unter (vergl. oben S. 55, 57, Art. 140, 144), die wir im 2. Bd. behandeln.[59])

B. 6. Wenn von zwei Kugeln die eine die Kanten eines Tetraeders sämmtlich berührt, welches in Bezug auf die andere sich selbst conjugirt ist, so ist die Summe der Quadrate ihrer Radien gleich zwei Drittel des Quadrats ihrer Centraldistanz. (Art. 216, B. 3.)

218. Man bestimme die Bedingung, unter welcher zwei Flächen zweiten Grades $U = 0$ und $U' = 0$ einander berühren.

Wie im Falle der Kegelschnitte (vergl. „Kegelschn.", Art. 358) hat die durch das Verschwinden der Discriminante gebildete Gleichung des Art. 216 im Falle der Berührung der Flächen zwei gleiche Wurzeln. Denn für den Anfangspunkt im Berührungspunkte und die Tangentialebene als Coordinatenebene $z = 0$ haben wir für beide Flächen zweiter Ordnung $a_{44} = 0$, $a_{14} = 0$, $a_{24} = 0$; und weil durch Substitution dieser Werthe die Discriminante des Art. 68 sich auf $a_{34}^2(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$ reducirt, so wird die erwähnte biquadratische Gleichung

$$(\lambda a_{34} + a'_{34})^2 \{(\lambda a_{12} + a'_{12})^2 - (\lambda a_{11} + a'_{11})(\lambda a_{22} + a'_{22})\} = 0,$$

eine Gleichung mit zwei gleichen Wurzeln. Die fragliche Bedingung wird daher gebildet, indem man die Discriminante der biquadratischen Gleichung des Art. 216 gleich Null setzt; sie ist vom zwölften Grade in den Coefficienten jeder Fläche.

B. 1. Die Bedingung der Berührung von zwei Kugeln zu finden. Die Gleichung des Art. 216, B. 3 hat immer zwei gleiche Wurzeln $\lambda = -1$; sie zeigen den unendlich fernen gemeinsamen ebenen Querschnitt wieder an, in welchem nach Art. 150 eine doppelte Berührung stattfindet.

Die Bedingung für eine Berührung der beiden Kugeln im

endlichen Raume liefert die Discriminante des zweiten quadratischen Factors der Gleichung in λ; sie ist

$$(D^2 - \varrho^2 - \varrho'^2)^2 = 4\varrho^2\varrho'^2 \text{ d. h. } D = \varrho \pm \varrho'.$$

B. 2. Man soll den Ort des Centrums für eine Kugel von constantem Radius bestimmen, welche eine Fläche zweiten Grades berührt.

Die durch Vergleichung der Discriminante der biquadratischen Gleichung des Art. 216, B. 4 mit Null erhaltene Gleichung ist in x, y, z — wenn wir diese an Stelle der α, β, γ setzen — vom zwölften Grade. Wenn wir in ihr $\varrho = 0$ machen, so reducirt sie sich auf das Product aus dem Quadrat der Gleichung der Fläche in eine Gleichung vom achten Grade, deren Bedeutung wir weiterhin erkennen werden. (Vergl. Art. 232.)

Das hier betrachtete Problem ist mit dem von der Bestimmung der Gleichung der Parallelfläche zur Fläche zweiten Grades identisch, d. h. des Ortes von Punkten, die man durch Abtragen der constanten Länge ϱ auf alle Normalen der Fläche von ihren Fusspunkten aus erhält. (Vergl. „Kegelschn.“ Art. 358, 2.)

Betrachtet man die Gleichung des Problems als eine Gleichung sechsten Grades in ϱ^2, so giebt sie die Längen der sechs Normalen, welche vom Punkte x, y, z aus an die Fläche gehen. (Vergl. unter den Liter.-Nachw. das B. zu Art. 93, S. 123.)

Um die Gleichung des Querschnitts der Parallelfläche mit einer der Hauptebenen zu finden, benutzen wir das Princip, wonach die Discriminante eines algebraischen Ausdrucks von der Form $(\lambda - \alpha)\varphi(\lambda)$ in Bezug auf λ die Form eines Productes von $[\varphi(\alpha)]^2$ mit der Discriminante von $\varphi(\lambda)$ haben muss. (Vergl. „Vorlesungen“ Art. 110.) Die biquadratische Gleichung mit $z = 0$ giebt daher als Discriminante von

$$(\lambda + c)\left\{\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} - 1 - \frac{\varrho^2}{\lambda}\right\}$$

den doppelt zählenden Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1 - \frac{\varrho^2}{c},$$

der also eine Doppelcurve der Fläche ist, verbunden mit der durch die Discriminante der innerhalb der Klammern stehenden Function dargestellten Curve, der Parallelcurve des bezüglichen Hauptschnittes der Fläche zweiten Grades, die von der achten Ordnung ist. Sie ist die Enveloppe eines Systems von Kegelschnitten, deren jeder sie in den vier Punkten berührt, wo sie den durch das Differential ihrer Gleichung in λ dargestellten Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b+\lambda)^2} - \frac{\varrho^2}{\lambda^2} = 0$$

schneidet; da jener Doppelkegelschnitt dem System für $\lambda = -c$ angehört, so berührt auch er die Curve achter Ordnung in vier Punkten. Wir kommen im 2. Bande darauf zurück.

B. 3. Die Gleichung der Parallelfläche eines Paraboloids wird in gleicher Weise gebildet, indem man die Discriminante der biquadratischen Gleichung in Art. 216, 5 gleich Null setzt. Das Resultat stellt eine Fläche zehnter Ordnung dar, welche sich für $\varrho = 0$ auf das zweifach zählende Paraboloid und einen Ort sechsten Grades reducirt. (Vergl. Art. 236.) Die Gleichung ist in ϱ^2 vom fünften Grade und zeigt also, dass nur fünf Normalen von einem Punkte an die Fläche gehen. Man zeigt wie vorhin, dass ihr Querschnitt mit jeder Hauptschnittebene aus der doppeltzählenden Hauptschnittparabel und der Parallelcurve derselben besteht.

219. Wenn zwei Flächen einander berühren, so ist der Berührungspunkt ein Doppelpunkt in ihrer Durchdringungscurve. Zwei Flächen von den Ordnungen m und n durchschneiden einander in einer Curve von der Ordnung mn, d. h. einer Curve, die von einer Ebene in mn Punkten geschnitten wird. In jedem Punkte dieser Curve giebt es eine einzige Tangente, nämlich die Durchschnittslinie der Tangentialebenen beider Flächen in diesem Punkte. Denn jede durch diese Gerade gehende Ebene schneidet beide Flächen in Curven, die einander in ihr berühren und geht daher durch zwei zusammenfallende Punkte der Durchdringungscurve.

Wenn aber die Flächen sich berühren, so schneidet jede durch den Berührungspunkt gehende Ebene die Flächen in zwei sich berührenden Curven und jede solche Ebene geht daher durch zwei zusammenfallende Punkte der Durchdringungscurve. Der Berührungspunkt ist somit ein Doppelpunkt in der Durchdringungscurve. Und es giebt wie für ebene Curven zwei Tangenten der Curve im Doppelpunkte; denn es giebt in der gemeinschaftlichen Tangentialebene der Flächen zwei Gerade durch den Berührungspunkt so, dass jede Ebene, welche eine derselben enthält, die Flächen in Curven schneidet, die mit einander drei zusammenfallende Punkte gemein haben.

Nehmen wir die Tangentialebene zur Ebene der xy und sind die Gleichungen der Flächen

$$z + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \text{etc.} = 0,$$
$$z + a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + \text{etc.} = 0,$$

so schneidet eine Ebene $y = \mu x$ sie in Curven, die sich nach Art. 231 f. der „Kegelschn." osculiren, wenn

$$a_{11} + 2a_{12}\mu + a_{22}\mu^2 = a'_{11} + 2a'_{12}\mu + a'_{22}\mu^2$$

ist, so dass die beiden fraglichen Geraden durch die Gleichung

$$(a_{11} - a'_{11})x^2 + 2(a_{12} - a'_{12})xy + (a_{22} - a'_{22})y^2 = 0$$

bestimmt sind. Im 2. Bande dieses Werkes beweisen wir genau so wie in Art. 36, 37 der „Höheren Curven", dass für

$$u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \text{etc.} = 0$$

als die Gleichung der Fläche der Anfangspunkt der Fläche angehört und dass die Ebene $u^{(1)} = 0$ alle die Geraden enthält, die in ihm die Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten schneiden; dass aber ferner, wenn $u^{(1)}$ identisch Null ist, die Fläche den Anfangspunkt zum Doppelpunkte hat, während die Kegelfläche $u^{(2)} = 0$ alle die Geraden enthält, welche die Fläche in drei auf einander folgenden Punkten schneiden.

Wenn wir in dem hier betrachteten Falle die Gleichung der einen von der Gleichung der andern Fläche abziehen, so erhalten wir die Gleichung einer durch die Schnittcurve beider gehenden Fläche

$$(a_{11} - a'_{11})x^2 + 2(a_{12} - a'_{12})xy + (a_{22} - a'_{22})y^2 + \text{etc.} = 0,$$

in der der Anfangspunkt ein Doppelpunkt ist und die von den beiden vorher gefundenen Geraden in drei aufeinanderfolgenden Punkten geschnitten wird.

220. Wenn diese Geraden zusammenfallen, so ist der Doppelpunkt insbesondere eine Spitze oder ein stationärer Punkt (vergl. „Höh. Curven" Art. 38, III) in der Durchdringungscurve, und wir wollen die Berührung der Flächen in diesem Falle als stationäre Berührung bezeichnen. Die Bedingung, unter welcher dieselbe eintritt, ist bei der im vorigen Art. vorausgesetzten Lage der Coordinatenaxen

$$(a_{11} - a'_{11})(a_{22} - a'_{22}) = (a_{12} - a'_{12})^2.$$

Wenn diese Bedingung aber erfüllt ist, so hat die biquadratische Gleichung für λ im Art. 218, für welche bei den hier vorausgesetzten Gleichungsformen überdies $a_{34} = a'_{34}$ ist, drei ihrer

Wurzeln gleich -1; d. h. drei der doppeltprojicirenden Kegel zweiten Grades der Durchdringungscurve sind vereinigt, analog der Vereinigung der drei Linienpaare im Kegelschnittbüschel im Falle der Osculation. („Kegelschn." Art. 232 f.) Die Bedingungen der stationären Berührung werden also gebildet als die Bedingungen, unter welchen die biquadratische Gleichung der Discriminante drei gleiche Wurzeln hat, d. h. sie sind $S=0$, $T=0$, für S und T als die beiden Invarianten einer biquadratischen Form. (Vergl. $J_{4,2}$ und $J_{4,3}$ in Art. 351 der „Kegelschn.")

Dadurch verbindet sich die Theorie der Hauptkrümmungsradien und der bezüglichen Centra für Flächen zweiten Grades mit diesen Untersuchungen. Eine Kugel aus einem Punkte der Flächennormale durch den Fusspunkt derselben berührt die Fläche immer, aber sie berührt dieselbe insbesondere stationär, wenn ihr Radius einem der beiden bezüglichen Hauptkrümmungshalbmesser gleich ist. Machen wir die Tangentenebene zur Ebene xy und die beiden Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung (Art. 210) zu Axen x und y, so erscheint das Glied xy nicht in der Gleichung, da diese Richtungen die Richtungen der Axen der zu xy parallelen Schnitte sind; die Gleichung ist also von der Form $z+a_{11}x^2+a_{22}y^2+\text{etc.}=0$. Nach dem Vorhergehenden hat aber eine Kugel $z+\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$ eine stationäre Berührung mit dieser Fläche wegen $a_{12}+a'_{12}=0$, wenn $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})=0$, also entweder $\lambda=a_{11}$ oder $\lambda=a_{22}$ ist. Für $y=0$ ist der Kreis $z+a_{11}(x^2+z^2)=0$ osculirend zu dem Schnitt $z+a_{11}x^2+\cdots=0$ und für $x=0$ der Kreis $z+a_{22}(y^2+z^2)=0$ osculirend zu $z+a_{22}y^2+\cdots=0$.

221. Wenn man nun, um die Gleichung der Fläche der Centra zu bilden, für die biquadratische Gleichung im Beispiel 4 des Art. 216 die Invariantengleichungen $S=0$, $T=0$ aufstellt, so verbinden diese die Coordinaten α, β, γ des Krümmungscentrums eines Hauptschnittes mit dem Krümmungsradius ϱ desselben; die eine dieser Gleichungen ist quadratisch, die andere cubisch in ϱ^2, und die Elimination von ϱ^2 zwischen beiden giebt die Gleichung des Ortes der Krümmungscentra aller Hauptschnitte. Das Problem kann auch so ausgedrückt werden: Für $U=0$ und $U'=0$ als zwei algebraische Gleichungen von gleichem Grade und k als einen veränderlichen Parameter kann dieser immer so bestimmt werden, dass die Gleichung $U+kU'=0$

zwei gleiche Wurzeln hat; es ist aber nicht möglich k so zu bestimmen, dass dieselbe Gleichung drei gleiche Wurzeln hat, so lange nicht eine gewisse invariable Relation zwischen den Coefficienten von U und denen von U' besteht. Das gegenwärtige Problem fordert die Bestimmung einer solchen invarianten Relation, denn es verlangt die Bedingung zu finden, unter welcher es möglich ist, k so zu bestimmen, dass die in λ biquadratische Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 + \frac{k}{\lambda}$$

drei gleiche Wurzeln habe.

Im Folgenden sind die Hauptglieder des Resultats angegeben, aus denen alle andern durch Symmetrie hervorgehen, mit den Abkürzungen $b^2 - c^2 = \alpha$, $c^2 - a^2 = \beta$, $a^2 - b^2 = \gamma$ und mit Ersetzung von ax, by, cz durch x, y, z respective:

$$\begin{aligned}
&\alpha^6 x^{12} + 3(\alpha^2+\beta^2)\alpha^4 x^{10} y^2 + 3(\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\alpha^2 x^8 y^4 \\
&+3(2\alpha^4+3\alpha^2\beta^2+3\alpha^2\gamma^2-7\beta^2\gamma^2)\alpha^2 x^8 y^2 z^2 + (\alpha^6+\beta^6+9\alpha^4\beta^2+9\alpha^2\beta^4)x^6y^6 \\
&+ 3(\alpha^6 + 6\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^4\gamma^2 + 3\alpha^2\beta^4 + \beta^4\gamma^2 - 21\alpha^2\beta^2\gamma^2)x^6y^4z^2 \\
&+ 9(\alpha^4\beta^2+\beta^4\alpha^2+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4-14\alpha^2\beta^2\gamma^2)x^4y^4z^4 \\
&- 3(\beta^2+\gamma^2)\alpha^6 x^{10} - 3(2\beta^4 + 3\beta^2\gamma^2 + 3\beta^2\alpha^2 - 7\gamma^2\alpha^2)\alpha^4 x^8 y^2 \\
&- 3(\beta^6 + 6\beta^4\alpha^2 + 3\beta^4\gamma^2 + 3\beta^2\alpha^4 + \alpha^4\gamma^2 - 21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^2 x^6 y^4 \\
&+3\{14(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4)+20\alpha^2\beta^2\gamma^2\}\alpha^3x^6y^2z^2 \\
&+3\{4\gamma^8-7\gamma^6(\alpha^2+\beta^2)-198\gamma^4\alpha^2\beta^2+68\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)+42\alpha^4\beta^4\}x^4y^4z^2 \\
&+ 3(\beta^4 + 3\beta^2\gamma^2 + \gamma^4)\alpha^6 x^8 \\
&+ 3(\beta^6 + 6\beta^4\gamma^2 + 3\beta^4\alpha^2 + 3\beta^2\gamma^4 + \alpha^2\gamma^4 - 21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^4 x^6 y^2 \\
&+ 9(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4-14\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^2\beta^2x^4y^4 \\
&-3\{4\alpha^8-7\alpha^6(\beta^2+\gamma^2)-198\alpha^4\beta^2\gamma^2+68\alpha^2\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)+42\beta^4\gamma^4\}\alpha^2x^4y^2z^2 \\
&- (\beta^6 + \gamma^6 + 9\beta^4\gamma^2 + 9\beta^2\gamma^4)\alpha^6 x^6 \\
&- 3(\gamma^6 + 6\gamma^4\beta^2 + 3\gamma^4\alpha^2 + 3\gamma^2\beta^4 + \alpha^2\beta^4 - 21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^4\beta^2 x^4 y^2 \\
&+3\{14(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4)+20\alpha^2\beta^2\gamma^2\}\alpha^2\beta^2\gamma^2x^2y^2z^2 \\
&+3(\beta^4+3\beta^2\gamma^2+\gamma^4)\alpha^6\beta^2\gamma^2x^4+3(2\gamma^4+3\gamma^2\alpha^2+3\gamma^2\beta^2-7\alpha^2\beta^2)\alpha^4\beta^4\gamma^2x^2y^2 \\
&- 3(\beta^2+\gamma^2)\alpha^6\beta^4\gamma^4 x^2 + \alpha^6\beta^6\gamma^6 = 0.
\end{aligned}$$

Für $z = 0$ wird diese Gleichung reducirt auf

$$(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 - \alpha^2\beta^2)^3\{(x^2 + y^2 - \gamma^2)^3 + 27x^2y^2\gamma^2\}.$$

(Vergl. Art. 212.) Der Schnitt der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene ist den Schnitten mit den Hauptebenen gleichartig, da die höchsten Glieder der Gleichung den Ausdruck bilden

$$(x^2+y^2+z^2)^3\{(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)^3-27\alpha^2\beta^2\gamma^2x^2y^2z^2\}.$$

Die Gleichung der Fläche der Centra für ein Paraboloid

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z=0$$

erhalten wir für $a_{11}-a_{22}=m$, $a_{11}+a_{22}=p$, $a_{11}a_{22}=q$, $a_{22}x^2+a_{11}y^2=V$, $x^2+y^2=\varrho^2$, $qz^2+pa_{34}z+a_{34}^2=W$ in der Form

$$8\{q^2zV+qa_{34}(a_{22}^2x^2+a_{11}^2y^2)+2m^2a_{34}W\}^3+27T=0$$

mit

$$\begin{aligned}T=&\,q^5a_{34}V^4-16m^2q^4a_{34}Wx^2y^2+6m^2q^4a_{34}^2zV^3-56m^2q^5a_{34}^2zVx^2y^2\\&+8m^4q^3a_{34}^3x^2y^2W+12m^4q^3a_{34}^3z^2V^2+6m^2q^4a_{34}^3\varrho^2V^2-152m^2q^5a_{34}^3x^2y^2\varrho^2\\&+48m^2pq^4a_{34}^3x^2y^2V+8m^6q^2a_{34}^4z^3V+24m^4q^3a_{34}^4z\varrho^2V+24m^6q^2a_{34}^5\varrho^2z^2\\&+12m^4q^3a_{34}^5\varrho^4+43m^6q^2a_{34}^5x^2y^2+24m^6za_{34}^6q(a_{11}x^2+a_{22}y^2)\\&+8m^6(a_{11}^2x^2+a_{22}^2y^2)a_{34}^7.\end{aligned}$$ [60])

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene x oder $y=0$ ist eine dreifach zählende Parabel und die Evolute einer Parabel.

222. Man soll die **Bedingung** entwickeln, unter welcher zwei Flächen zweiten Grades so liegen, dass der einen von ihnen ein Tetraeder eingeschrieben werden kann, von welchem zwei Paare seiner Gegenkanten in der Fläche des andern enthalten sind*). Wenn die bezeichnete Relation stattfindet, so lässt sich die Gleichung der einen Fläche in die Form $a_{23}x_2x_3+a_{14}x_1x_4=0$ schreiben, indess in der der andern die Coefficienten a'_{ii} sämmtlich verschwinden. Dann ist

$$\varDelta=a_{23}^2a_{14}^2,\quad\Theta=2a_{23}a_{14}(a_{23}a'_{14}+a_{14}a'_{23}),$$

$$\varPhi=(a_{23}a'_{14}+a_{14}a'_{23})^2+2a_{23}a_{14}(a'_{23}a'_{14}-a'_{13}a'_{24}-a'_{12}a'_{34}),$$

$$\Theta'=2(a'_{23}a'_{14}-a'_{13}a'_{24}-a'_{12}a'_{34})(a_{23}a'_{14}+a_{14}a'_{23}).$$

Und die fragliche Bedingung ist also

*) Das Problem und sein reciprokes entsprechen dem Problem der analytischen Planimetrie von dem dem einen Kegelschnitt eingeschriebenen und zugleich einem andern umgeschriebenen Dreieck.

$$4\Delta\Theta\Phi = \Theta^3 + 8\Delta^2\Theta'.$$

Ebenso ist die Bedingung, unter welcher für zwei Flächen zweiten Grades ein Tetraeder existirt, welches zwei Paare von Gegenkanten in der einen hat und zugleich der andern umgeschrieben ist,

$$4\Delta'\Theta'\Phi = \Theta'^3 + 8\Delta'^2\Theta.$$

Dies letztere kann auch aus der im nächsten Art. untersuchten Gleichung geschlossen werden.[61])

223. Man soll die allgemeine Form der Gleichung einer Fläche zweiten Grades finden, welche die Ebenen des Fundamentaltetraeders berührt.

Die Reciprocalfläche der gedachten geht durch die Ecken des Fundamentaltetraeders und hat daher die allgemeine Gleichung

$$2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 \\ + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$$

Die Reciproke dieser Gleichung ist aber nach Art. 68, 80

$$\begin{aligned} &2a_{23}a_{24}a_{34}\xi_1^2 + 2a_{13}a_{34}a_{14}\xi_2^2 + 2a_{12}a_{14}a_{24}\xi_3^2 + 2a_{23}a_{13}a_{12}\xi_4^2 \\ &+ 2(a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34})(a_{14}\xi_2\xi_3 + a_{23}\xi_1\xi_4) \\ &+ 2(a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34} - a_{23}a_{14})(a_{24}\xi_3\xi_1 + a_{13}\xi_2\xi_4) \\ &+ 2(a_{12}a_{34} - a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24})(a_{34}\xi_1\xi_2 + a_{12}\xi_3\xi_4) = 0. \end{aligned}$$

Durch die Substitution von x_i für $\xi_i\sqrt{a_{kl}a_{km}a_{lm}}$ wird diese Gleichung

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &+ \frac{a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34}}{\sqrt{a_{13}a_{12}a_{24}a_{34}}}(x_2x_3 + x_1x_4) \\ &+ \frac{a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34} - a_{23}a_{14}}{\sqrt{a_{12}a_{23}a_{34}a_{14}}}(x_3x_1 + x_2x_4) \\ &+ \frac{a_{12}a_{34} - a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24}}{\sqrt{a_{23}a_{13}a_{14}a_{24}}}(x_1x_2 + x_3x_4) = 0. \end{aligned}$$

Die drei Coefficienten dieser Gleichung sind aber die negativen zweifachen Cosinus der Winkel eines ebenen Dreiecks von den Seiten $\sqrt{a_{23}a_{14}}$, $\sqrt{a_{14}a_{24}}$ und $\sqrt{a_{12}a_{34}}$, und diese unterliegen der Bedingung, dass die Summe ihrer Quadrate und ihres doppelten Productes der positiven Einheit gleich ist.

Die allgemeine Form der Gleichung einer dem Fundamentaltetraeder eingeschriebenen Fläche zweiten Grades ist also

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2p(x_2 x_3 + x_1 x_4) - 2q(x_1 x_3 + x_2 x_4) \\ - 2r(x_1 x_2 + x_3 x_4) = 0,$$

mit der Bedingung $1 - 2pqr = p^2 + q^2 + r^2$.

Und man sieht leicht umgekehrt, dass die Fläche zweiten Grades, welche diese Gleichung darstellt, von den vier Fundamentalebenen berührt wird; denn die gefundene Bedingung ist auch die Bedingung für das Verschwinden der Discriminanten der Kegelschnitte, nach welchen die Fläche von den Fundamentalebenen geschnitten wird, und dieselben bestehen somit aus je zwei reellen oder nicht reellen Graden.

224. Wenn $U' = 0$ einen Kegel repräsentirt, so ist $\Delta' = 0$, und es bleibt die geometrische Bedeutung von Θ, Φ und Θ' in diesem Falle zu untersuchen. Wir nehmen den Scheitel des Kegels als Fundamentalpunkt, so dass a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, a'_{44} z. B. sämmtlich gleich Null sind. Dann ist

$$\Theta' = a_{44}(a'_{11}a'_{22}a'_{33} + 2a'_{23}a'_{13}a'_{12} - a'_{11}a'^2_{23} - a'_{22}a'^2_{13} - a'_{33}a'^2_{12}),$$

d. h. es verschwindet nur, wenn entweder der Kegel in zwei Ebenen degenerirt, oder wenn der Scheitel des Kegels selbst in der Fläche $U = 0$ liegt.

Wenn wir sodann die Gleichung des aus der Spitze unseres Kegels der Fläche $U=0$ umschriebenen Berührungskegels, nämlich

$$a_{44}(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{12}x_1x_2) \\ - (a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3)^2 = 0$$

in der Form

$$\mathfrak{a}_{11}x_1^2 + \mathfrak{a}_{22}x_2^2 + \mathfrak{a}_{33}x_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}x_2x_3 + 2\mathfrak{a}_{13}x_1x_3 + 2\mathfrak{a}_{12}x_1x_2 = 0$$

schreiben, so erhalten wir für die Invariante Φ den Ausdruck

$$\mathfrak{a}_{11}(a'_{22}a'_{33} - a'^2_{23}) + \mathfrak{a}_{22}(a'_{33}a'_{11} - a'^2_{13}) + \mathfrak{a}_{33}(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}) \\ + 2\mathfrak{a}_{23}(a'_{12}a'_{13} - a'_{11}a'_{23}) + 2\mathfrak{a}_{13}(a'_{12}a'_{23} - a'_{22}a'_{13}) + 2\mathfrak{a}_{12}(a'_{23}a'_{13} - a'_{33}a'_{12});$$

und nach der Theorie der Invarianten der Kegelschnitte („Kegelschn.“ Art. 361) drückt daher $\Phi = 0$ die Bedingung aus, unter welcher es möglich ist, vom Scheitel des Kegels $U' = 0$ aus an die Fläche $U = 0$ drei Tangenten zu legen, welche ein in Bezug auf jenen sich selbst conjugirtes System oder ein Tripel harmonischer Polarlinien desselben bilden. Ebenso finden wir

$$a_{44}\Theta = a'_{11}(\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{23} - \mathfrak{a}^2_{23}) + a'_{22}(\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}^2_{13}) + \text{etc.},$$

und erfahren daraus, dass Θ nur dann verschwindet, wenn durch den Scheitel des Kegels $U' = 0$ drei Tangentialebenen an die Fläche $U = 0$ gehen, welche ein Tripel harmonischer Polarebenen für $U' = 0$ bilden.

Die Discriminante der cubischen Gleichung in λ verschwindet, wenn der Kegel $U' = 0$ die Fläche $U = 0$ berührt.

Wenn $U' = 0$ zwei Ebenen darstellt, so verschwinden Δ' und Θ'; und wenn wir diese Ebenen als $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ wählen, so dass U' sich auf $2a'_{12}x_1x_2$ reducirt, so wird $\Phi = a'^2_{12}(a^2_{34} - a_{33}a_{44})$ und verschwindet also nur, wenn die Durchschnittslinie beider Ebenen die Fläche $U = 0$ berührt. Es ist ferner $\Theta = 2a'_{12}A_{12}$, und sein Verschwinden drückt daher die Bedingung aus, unter welcher die fraglichen Ebenen in Bezug auf $U = 0$ conjugirt sind oder der Pol der einen in Bezug auf diese Fläche in der andern liegt; denn die Coordinaten des Pols der Ebene $x_1 = 0$ sind zu A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} proportional und dieser Pol liegt also in der Ebene $x_2 = 0$ für $A_{12} = 0$. Somit geben $\Theta = 0$ und $\Phi = 0$ zusammen die Bedingung, unter welcher die eine der Ebenen die Fläche $U = 0$ berührt und die andere durch ihren Berührungspunkt geht.

Die Bedingung $\Theta^2 = 4\Delta\Phi$ wird endlich erfüllt, wenn jede der beiden Ebenen die Fläche $U = 0$ berührt.

Für $U' = 0$ als eine zweifach zählende Ebene sind Δ', Θ' und Φ gleich Null, und $\Theta = 0$ bedingt die Berührung der Ebene mit der Fläche. Wenn beide Flächen Kegel sind, so sind $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$, und $\Theta' = 0$ bedingt, dass die Spitze des Kegels $U' = 0$ auf der Fläche von $U = 0$ liegt; für $\Phi = 0$ giebt es Tripel sich selbst conjugirter Geraden für $U' = 0$, welche den Kegel $U = 0$ berühren. Für das gleichzeitige Verschwinden von Θ' und Φ liegt die Spitze von U' in U und U wird von U' berührt; für das gleichzeitige Verschwinden von Θ und Θ' liegt die Spitze jedes Kegels auf dem Mantel des andern, d. h. beide haben eine Gerade gemein; endlich verschwinden Θ, Φ, Θ' nur dann gleichzeitig, wenn sich die Kegel längs einer Geraden berühren.

Wenn die eine Fläche $U = 0$ ein Kegel und die andere $U' = 0$ ein Ebenenpaar ist, so sind Δ, Δ', Θ' gleich Null. Für $\Theta = 0$ liegt die Spitze des Kegels in der einen Ebene, für $\Phi = 0$ berührt die Schnittlinie der Ebenen den Kegel; Θ und

Φ sind gleichzeitig Null, wenn die eine der Ebenen selbst den Kegel berührt.

Wenn endlich beide Flächen in Ebenenpaare degeneriren, so sind Δ, Δ', Θ, Θ' alle gleich Null; Φ wird Null, wenn die vier Ebenen durch einen Punkt gehen.

B. Zu dem Falle der einfachen Berührung der Flächen zweiten Grades in Art. 219 tritt beim Verschwinden aller ersten Unterdeterminanten für die Doppelwurzel oder einem Ebenenpaar als zugehörigem Kegel (Art. 150, 123) das Zerfallen der Durchdringung in zwei Kegelschnitte. Im gleichen Falle bei der dreifachen Wurzel des Art. 220 das Zerfallen in zwei Kegelschnitte, welche sich in der Schnittlinie ihrer Ebenen berühren, und beim Verschwinden auch der zweiten Unterdeterminanten die Vereinigung dieser Kegelschnitte in einen doppelt zählenden, längs dessen sich die Flächen berühren (Art. 153). Zwei Paare gleicher Wurzeln entsprechen dem Falle einer gemeinschaftlichen Mantellinie mit der gewundenen Curve dritter Ordnung; beim Verschwinden der ersten Unterdeterminanten für die eine Wurzel erhält man zwei Kegelschnitte, von denen der eine in ein Linienpaar zerfallen ist; beim Verschwinden derselben für beide Wurzeln wird die Curve zum windschiefen Vierseit. Der Gleichheit aller vier Wurzeln entspricht die Zusammensetzung der Durchdringung aus einer gewundenen Curve dritter Ordnung und einer sie berührenden Geraden; als Specialfälle ein Kegelschnitt und zwei sich auf ihm schneidende Gerade; oder eine doppelt zählende Gerade, längs welcher sich also die Flächen berühren, und zwei einfache windschiefe, die jene schneiden; oder endlich die Flächen berühren sich in zwei sich schneidenden Geraden. Einen letzten Fall bilden Kegel zweiten Grades, die sich längs einer Geraden berühren und sonst einen Kegelschnitt gemein haben.[62])

225. Die unendlich entfernte Ebene schneidet jede Kugel in demselben imaginären Kreise (dem absoluten Kr.), welcher durch den aus dem Coordinatenanfang über ihm beschriebenen Kegel in der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

dargestellt wird. Da diese Gleichung auch eine unendlich kleine Kugel repräsentirt, so ist jeder Durchmesser derselben und des Kegels zu der ihm conjugirten Ebene normal. Bilden wir also die Invarianten von

$$x^2 + y^2 + z^2$$

und der linken Seite der allgemeinen Gleichung der Fläche zweiten

Grades, so erhalten wir für $\Theta = 0$ den Ausdruck

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

als die Bedingung, unter welcher der Anfangspunkt der Coordinaten ein Punkt von solcher Lage ist, dass von ihm drei zu einander rechtwinklige Tangentenebenen an die Fläche gelegt werden können, und $\Phi = 0$ oder

$$a_{11}a_{44} - a_{14}^2 + a_{22}a_{44} - a_{24}^2 + a_{33}a_{44} - a_{34}^2 = 0$$

als die Bedingung, unter welcher aus dem Coordinatenanfang drei zu einander rechtwinklige Tangenten an die Fläche gezogen werden können.

Wenn insbesondere der Coordinatenanfang das Centrum der Fläche ist, so dass a_{14}, a_{24}, a_{34} den Werth Null haben, während nicht auch zugleich $a_{44} = 0$ ist, so lange die Fläche keine Kegelfläche ist, so wird die cubische Gleichung in λ dieselbe, welche in Art. 85 zur Bestimmung der Hauptaxen aufgestellt worden ist. Die Bedingung $\Phi = 0$ reducirt sich auf

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0,$$

als die Bedingung, unter der es möglich ist, Systeme von je drei zu einander rechtwinkligen asymptotischen Linien zur Fläche zu ziehen; und die Bedingung $\Theta = 0$ wird

$$a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}^2 - a_{23}^2 - a_{13}^2 = 0,$$

zur Bedingung, unter welcher Systeme von je drei zu einander rechtwinkligen asymptotischen Ebenen zur Fläche möglich sind.

Die beiden so bezeichneten Arten von Hyperboloiden entsprechen den gleichseitigen Hyperbeln in der Theorie der ebenen Curven (vgl. Art. 217, 3), doch hat man nur die erste Art gleichseitig genannt (Art. 124, 28).

Die orthogonalen Hyperboloide (Art. 124, 3) entsprechen in ähnlicher Weise den Kreisen unter den Kegelschnitten; die Relation unter ihren Coefficienten wird nämlich gefunden, indem man die Bedingung sucht, unter welcher der Pol einer der unendlich fernen gemeinsamen Sehnen des absoluten Kreises und des allgemeinen Kegels vom zweiten Grade in Bezug auf jenen in diesem liegt.

Da jede Tangentenebene des Kegels $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ durch eine Gleichung $xx' + yy' + zz' = 0$ ausdrückbar ist für

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$, und da alle zu einander parallelen Ebenen durch dieselbe unendlich entfernte Gerade gehen, so ist offenbar $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ die Bedingung, unter welcher eine Ebene

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega = 0$$

durch eine der Tangenten des imaginären Kreises im Unendlichen geht, den alle Kugelflächen enthalten.

In Folge dessen kann $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ als die Tangentialgleichung dieses Kreises angesehen werden.

Bildet man nun die Invarianten für diese Gleichung und die allgemeine Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten (Art. 80), so erhält man

$$\Theta = \Delta^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}),$$

$$\Phi = \Delta(a_{22}a_{33} - a_{23}^2 + a_{33}a_{11} - a_{13}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2),$$

und die geometrische Bedeutung ihres Verschwindens ist oben bereits angegeben.

Da die Bedingung (Art. 28) $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$, unter welcher zwei Ebenen

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega = 0, \quad \xi' x + \eta' y + \zeta' z + \omega' = 0$$

zu einander rechtwinklig sind, offenbar identisch ist mit der Bedingung, unter welcher diese Ebenen in Bezug auf

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

einander conjugirt sind, so erkennt man, dass zwei zu einander rechtwinklige Ebenen als in Bezug auf den imaginären Kreis im Unendlichen einander conjugirt anzusehen oder dass ihre Schnittlinien mit der unendlich fernen Ebene in Bezug auf diesen Kreis einander conjugirt oder harmonische Polaren sind.

B. 1. Die Discriminante des Systems

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

oder vom unendlich fernen Querschnitt eines Kegels mit dem imaginären Kreise giebt mit

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22} - k, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

die Parameter der drei Ebenenpaare in demselben; für den Kegel

als Asymptotenkegel einer Fläche zweiten Grades die Axen der Fläche und damit ihre Hauptebenen, wie man aus Art. 73 weiss; die Proportionalität der entsprechenden Elemente der Determinante giebt nach Art. 122 die Bedingung der Rotationsflächen. Ist der Kegel auf seine Axen bezogen, so liefert dieselbe Determinante für das System $(a_{11}-k)x^2+(a_{22}-k)y^2+(a_{33}-k)z^2=0$ die Parameter der drei Ebenenpaare $k_1=a_{11}$, $k_2=a_{22}$, $k_3=a_{33}$ und damit die Gleichungen der drei Paare von Kreisdiametralschnitten, wie in Art. 105,

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)z^2=0, \text{ etc.}$$

B. 2. Jede durch drei feste Punkte gehende gleichseitige Hyperbel enthält überdies bekanntlich einen vierten festen Punkt. Welches Gesetz entspricht dem in der Theorie der Flächen zweiten Grades?

Die Untersuchung des Theorems über die gleichseitige Hyperbel lehrt, dass seine Wahrheit von dem Factum abhängt, wonach die Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine gleichseitige Hyperbel repräsentirt, in den Coefficienten linear ist. In derselben Weise findet man für die gleichseitigen Hyperboloide der Gattung $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$, welchen Systeme von je drei zu einander rechtwinkligen asymptotischen Linien entsprechen, den Satz, dass jede Fläche dieser Art, welche durch sieben Punkte geht, eine feste Curve, und jede, welche durch sechs feste Punkte geht, zwei feste Punkte überdies enthält.

Denn die Bedingungen, unter denen die Fläche durch sieben feste Punkte geht, in Verbindung mit der gegebenen Relation erlauben die Bestimmung aller Coefficienten der allgemeinen Gleichung bis auf einen; die Gleichung der Fläche enthält daher eine unbestimmte Grösse k und ist von der Form $U+kU'=0$, welche die feste Curve $U=0$, $U'=0$ enthält.

Wenn aber sechs Punkte gegeben sind, so beweist die Unbestimmtheit von zwei Coefficienten, dass man die Gleichung auf die Form $U+kU'+lU''$ bringen kann, welche Flächen darstellt, die durch acht feste Punkte gehen.

226. Allgemein drückt die Tangentialgleichung einer Curve im Raume die Bedingung aus, unter welcher eine Ebene durch eine der Tangenten der Curve hindurchgeht. Wenn z. B. in Art. 81 die Bedingung gegeben ist, unter welcher die Durchschnittslinie der Ebenen

$$\xi x+\eta y+\zeta z+\omega w=0,\quad \xi' z+\eta' y+\zeta' z+\omega' w=0$$

eine Fläche zweiten Grades berührt, so kann man dieselbe auch als die Tangentialgleichung des Kegelschnitts betrachten, in welchem diese Fläche durch die Ebene

$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z + \omega' w = 0$$

geschnitten wird.

Nach Art. 135 ist die Reciproke einer ebenen Curve eine Kegelfläche, und sowie eine Gleichung zweiten Grades in Punktcoordinaten einen Kegel darstellt, wenn ihre Discriminante verschwindet, so repräsentirt eine Tangentialgleichung zweiten Grades einen ebenen Kegelschnitt, wenn ihre Discriminante verschwindet. Nach der bekannten Bezeichnung der Minoren der Discriminante Δ oder der Elemente des adjungirten Systems A_{11}, etc. ist die allgemeine Tangentialgleichung zweiten Grades (Art. 80) durch

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + \cdot\cdot + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots = 0$$

darstellbar. Aus einer solchen Tangentialgleichung können wir die gewöhnlichen Gleichungen der Curven ableiten, indem wir zuerst die Reciproke der Tangentialgleichung nach den gewöhnlichen Regeln bilden, d. i.

$$(A_{22}A_{33}A_{44} + \cdots)x_1^2 + \cdots = 0;$$

sie ist ein vollständiges Quadrat, nämlich das Quadrat der Gleichung der Ebene der Curve. Wir bestimmen sodann den Kegelschnitt selbst, indem wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$\begin{aligned} x_1^2(A_{22}A_{33} - A_{23}^2) + x_2^2(A_{33}A_{11} - A_{13}^2) + x_3^2(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) \\ + 2x_2x_3(A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23}) + 2x_3x_1(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}) \\ + 2x_1x_2(A_{23}A_{13} - A_{33}A_{12}) - 0 \end{aligned}$$

combiniren, die den Kegel repräsentirt, der über ihm aus dem Punkte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ beschrieben wird. (Vergl. Art. 88, V.)

227. Man soll die Gleichung des Kegels bestimmen, der eine Fläche zweiten Grades $U = 0$ in der Curve berührt, in der die Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

sie schneidet.

Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, welche $U = 0$ in dieser Schnittcurve berührt, ist von der Form

$$kU + (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4)^2 = 0,$$

und man hat hier k so zu bestimmen, dass diese Gleichung einen Kegel darstellt; man erhält aber in diesem Falle

$$\Phi = 0, \quad \Theta' = 0, \quad \Delta' = 0,$$

und wenn man

$$\sigma = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + \cdots \text{ (Art. 80)}$$

setzt, d. h. durch σ die Grösse ausdrückt, deren Verschwinden die Berührung der Ebene mit der Fläche bedingt, so ist die vierte Wurzel der Bestimmungsgleichung für k zu den drei Wurzeln gleich Null, welche sie in diesem Falle hat, aus der Gleichung $k\Delta + \sigma = 0$ zu entnehmen. Die Gleichung des fraglichen Kegels ist somit

$$\sigma U = \Delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4)^2.$$

Berührt die betrachtete Ebene die Fläche, so ist (Art. 80) $\sigma = 0$, und die Gleichung des Kegels reducirt sich auf die der doppelt zählenden Berührungsebene.

Unter dem hier behandelten Problem ist das von der Bestimmung der Gleichung des Asymptotenkegels der durch die allgemeine Gleichung gegebenen Fläche zweiten Grades mit eingeschlossen.

228. Die Bedingung $\sigma = 0$, unter welcher die Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

die Fläche $U = 0$ berührt, ist eine Contravariante (vgl. „Kegelschn." Art. 365, „Vorlesungen" Art. 132 f.) vom Grade drei in den Coefficienten von U. Wenn für jeden Coefficienten a_{ik} die Summe $(a_{ik} + \lambda a'_{ik})$ substituirt wird, welche der Bildung der Systemgleichung $U + \lambda U' = 0$ entspricht, so erhalten wir die Bedingung, unter welcher dieselbe Ebene eine Fläche dieses Systems berührt; sie ist von der Form

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0,$$

wie man hinsichtlich des ersten und letzten Gliedes durch die Zerlegung der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a'_{11}, & a_{12} + \lambda a'_{12}, & a_{13} + \lambda a'_{13}, & a_{14} + \lambda a'_{14}, & \xi_1 \\ a_{21} + \lambda a'_{21}, & a_{22} + \lambda a'_{22}, & a_{23} + \lambda a'_{23}, & a_{24} + \lambda a'_{24}, & \xi_2 \\ a_{31} + \lambda a'_{31}, & a_{32} + \lambda a'_{32}, & a_{33} + \lambda a'_{33}, & a_{34} + \lambda a'_{34}, & \xi_3 \\ a_{41} + \lambda a'_{41}, & a_{42} + \lambda a'_{42}, & a_{43} + \lambda a'_{43}, & a_{44} + \lambda a'_{44}, & \xi_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4, & 0 \end{vmatrix}$$

nach ihren Summanden-Determinanten leicht bestätigt, während man zugleich dadurch die entwickelten Formen von τ und τ' erhält.

Sie ist in λ vom dritten Grade, weil und zum Beweise, dass unter den Flächen eines linearen Systems mit gemeinschaftlicher Durchschnittscurve drei sind, die eine gegebene Ebene berühren. (Art. 143, 173; Art. 237 unten.)

Die Functionen σ, σ', τ, τ' enthalten die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 im zweiten Grade und die Coefficienten von U und U' im dritten Grade, und vermittelst derselben kann die Bedingung ausgedrückt werden, unter welcher die Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

irgend eine permanente Beziehung zu den beiden gegebenen Flächen $U = 0$, $U' = 0$ hat; z. B. dass sie dieselben in Curven $u = 0$, $u' = 0$ schneide, welche durch solche projectivische Relationen verbunden sind, die durch die Coefficienten der Discriminante von $u + \lambda u' = 0$, d. h. durch die Invarianten des Büschels von Kegelschnitten ausdrückbar sind. Wenn wir von

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma'$$

die Discriminante nach λ bilden, so erhalten wir in dieser Weise durch das Verschwinden derselben die Bedingung, unter welcher die Ebene $\xi_1 x_1 + \cdots = 0$ die beiden Flächen in Curven schneidet, welche sich berühren, oder mit andern Worten die Bedingung, unter welcher diese Ebene eine Tangente der Schnittcurve von $U = 0$ und $U' = 0$ enthält. Sie ist („Vorlesungen" Art. 141, 3)

$$4(3\sigma'\tau - \tau'^2)(3\sigma\tau' - \tau^2) = (9\sigma\sigma' - \tau\tau')^2,$$

also in den ξ vom achten und in den Coefficienten von jeder der beiden Gleichungen der Flächen vom sechsten Grade.

Ebenso drückt $\tau = 0$ die Bedingung aus, unter welcher die Ebene die Flächen in zwei Kegelschnitten schneidet, in deren einen ein Dreieck eingeschrieben werden kann, welches in Bezug auf den andern sich selbst conjugirt ist; etc.

Die Gleichung $\sigma = 0$ ist die Tangentialgleichung der Fläche $U = 0$, d. h. ihre Gleichung in tetraedrischen Plancoordinaten ξ_1, ξ_2, etc.; ebenso $\sigma' = 0$ die Tangentialgleichung von $U' = 0$. In derselben Weise sind dann $\tau = 0$, $\tau' = 0$ die Tangentialgleichungen von Flächen zweiten Grades, die

zu den Flächen $U = 0$, $U' = 0$ gewisse unveränderliche Relationen haben. Es ist $\tau = 0$ die Enveloppe einer Ebene, welche die beiden Flächen stets in Curven schneidet, die zu einander in der eben angeführten Beziehung stehen, also die Tangentialgleichung einer Fläche zweiten Grades, die durch diese Relation charakterisirt ist. Die Discriminante von

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$$

ist ebenso die Tangentialgleichung der Durchschnittscurve der Flächen $U = 0$, $U' = 0$.

Man kann endlich $\sigma = 0$ als die Gleichung der Reciprocalfläche von $U = 0$ in Bezug auf die Fläche (Art. 139)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

ansehen und hat dann in derselben Art

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$$

als die Gleichung der Reciprocalfläche von $U + \lambda U' = 0$ zu betrachten. Da bei Veränderung von λ die Gleichung $U + \lambda U' = 0$ ein System von Flächen zweiten Grades bezeichnet, welche durch eine gemeinschaftliche Schnittcurve gehen, so bezeichnet die Reciprocalgleichung ein System, welches einer gemeinschaftlichen developpabeln Fläche eingeschrieben ist, die eben die Reciprocalform der Curve $U = 0$, $U' = 0$ ist. Wie jenes ein Büschel, so nannten wir dieses System eine Schaar von Flächen zweiten Grades. Die Discriminante von $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$ kann daher ebensowohl als die Tangentialgleichung der Curve $U = 0$, $U' = 0$, wie als die Gleichung der zu ihr reciproken developpabeln Fläche angesehen werden; sie ist wie erwähnt vom achten Grade in den neuen Veränderlichen und vom sechsten in den Coefficienten jeder der Gleichungen der Flächen.

Mit $\Delta = 0$ wird σ zum Quadrat einer linearen Function der ξ_i; und wenn die Fläche aus zwei Ebenen besteht, so dass die ersten Minoren von Δ verschwinden, so verschwindet σ identisch.

B. Mit $U' \equiv x^2 + y^2 + z^2$ erhält man in τ' die linke Seite der Gleichung einer Kugel, mit dem reciproken Quadrat ihres Radius gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Diese Kugel ist die Enveloppe der Ebenen, in deren Querschnitten mit der Fläche zweiten Grades Punktetripel liegen, welche mit dem Centrum drei zu einander

rechtwinklige Durchmesser bestimmen. Wir haben dies im Art. 94 schon gefunden, denn die dort erhaltene Constante ist zugleich das reciproke Quadrat des Abstandes der Verbindungsebene der Durchmesserendpunkte vom Centrum.

Die dieser Kugel und der Fläche zweiten Grades gemeinsamen Tangentialebenen schneiden aus ihr die Paare von Erzeugenden heraus, welche vom Mittelpunkte aus durch rechtwinklige Ebenenpaare projicirt werden. Die Tangentialebenen der Kugel in den Punkten ihrer Durchdringungscurve mit der Fläche schneiden diese in gleichseitigen Hyperbeln.

Es giebt für jeden Punkt im Raume einen projicirenden Kegel der Schnittpunkte von Erzeugenden der Fläche, deren projicirende Ebenen orthogonal sind, zugleich Ort der Schnitte rechtwinkliger Paare von Tangentialebenen des entsprechenden Tangentenkegels. Für einen unendlich fernen Punkt (oder den Ort der rechtwinkligen Schnitte der Parallelprojectionen der Erzeugenden) wird der letztere im Allgemeinen zu einem Rotationscylinder. Man vergleiche diese Eigenschaften mit denen der concentrischen Kugel vom Radiusquadrat $a^2 + b^2 + c^2$ (Art. 95, Art. 112, B., Art. 200, 2).

229. Wir können zu dem im letzten Artikel betrachteten Verfahren das reciprok entsprechende befolgen. Sind $\sigma = 0$, $\sigma' = 0$ die Gleichungen der beiden Flächen zweiten Grades in Ebenencoordinaten, so können wir die Gleichung in Punktcoordinaten bilden, welche der Systemsgleichung $\sigma + \lambda\sigma' = 0$ entspricht.

Sie ist von der Form

$$\Delta^2 U + \lambda \Delta T + \lambda^2 \Delta' T' + \lambda^3 \Delta'^2 U' = 0$$

und stellt also eine Schaar von Flächen zweiten Grades in Punktcoordinaten dar; ihre gemeinschaftliche Developpable wird durch das Verschwinden ihrer Discriminante ausgedrückt. Dieselbe ist mit Unterdrückung des Factors $\Delta^2\Delta'^2$

$$4(3\Delta U'T - T'^2)(3\Delta' UT' - T^2) = (9\Delta\Delta' UU' - TT')^2$$

oder

$$27\Delta^2\Delta'^2U^2U'^2 + 4\Delta' UT'^3 + 4\Delta U'T^3 = T^2T'^2 + 18\Delta\Delta' UU'TT'.$$

Wir sprechen von ihr weiter, nachdem wir die Bildung der Gleichung

$$\Delta^2 U + \lambda \Delta T + \lambda^2 \Delta' T' + \lambda^3 \Delta'^2 U' = 0$$

und die Bedeutung der in ihr auftretenden Grössen durch Betrachtung reducirter Gleichungsformen näher beleuchtet haben

werden. Wenn beide Flächen $U = 0$, $U' = 0$ auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen sind, so dass die Coefficienten a_{ik} und a_{ik}' mit ungleichen Indices sämmtlich Null sind, so verschwinden die Minoren der Discriminanten mit Ausnahme der Hauptminoren („Vorlesungen" Art. 16) und diese sind (mit Anwendung einfacher Indices statt der doppelten)

$$A_1 = a_2 a_3 a_4, \quad A_2 = a_3 a_4 a_1, \quad A_3 = a_4 a_1 a_2,$$
$$A_4 = a_1 a_2 a_3, \quad A_1' = a_2' a_3' a_4', \text{ etc.};$$

die Tangentialgleichungen der beiden Flächen sind

$$\sigma \equiv A_1 \xi_1^2 + A_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_3^2 + A_4 \xi_4^2 = 0,$$
$$\sigma' \equiv A_1' \xi_1^2 + A_2' \xi_2^2 + A_3' \xi_3^2 + A_4' \xi_4^2 = 0,$$

und die Reciprocalgleichung von

$$\sigma + \lambda \sigma' = 0$$

ist, da auch alle A_{ij} für ungleiche Indices verschwinden, durch

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1, & A_1 + \lambda A_1', & 0, & 0, & 0 \\ x_2, & 0, & A_2 + \lambda A_2', & 0, & 0 \\ x_3, & 0, & 0, & A_3 + \lambda A_3', & 0 \\ x_4, & 0, & 0, & 0, & A_4 + \lambda A_4' \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. mit Entwickelung nach Potenzen von λ in der Form

$$\{A_2 A_3 A_4 x_1^2 + A_3 A_4 A_1 x_2^2 + A_4 A_1 A_2 x_3^2 + A_1 A_2 A_3 x_4^2\}$$
$$+ \lambda \{(A_2 A_3 A_4' + A_3 A_4 A_2' + A_4 A_2 A_3') x_1^2 + (A_3 A_4 A_1' + \cdots) x_2^2 + \text{etc.}\}$$
$$+ \lambda^2 \{(A_2' A_3' A_4 + A_3' A_4' A_2 + A_4' A_2' A_3) x_1^2 + (A_3' A_4' A_1 + \cdots) x_2^2 + \text{etc.}\}$$
$$+ \lambda^3 \{A_2' A_3' A_4' x_1^2 + \text{etc.}\} = 0$$

dargestellt. Die Substitution der Werthe für die A_i, A_i' liefert aber für das absolute Glied der Gleichung

$$A_2 A_3 A_4 x_1^2 + \text{etc., also} = \Delta^2 U,$$

und für den Coefficienten von λ^3 ebenso

$$A_2' A_3' A_4' x_1^2 \text{ etc., d. h.} = \Delta'^2 U';\text{*)}$$

*) Man hat allgemein für die Discriminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dagegen ist der Coefficient von λ

$$\Delta\{a_1 a_1'(a_2' a_3' a_4 + a_3' a_4' a_2 + a_4' a_2' a_3)x_1^2 + \text{etc.}\},$$

und der von λ^2

$$\Delta'\{a_1 a_1'(a_2 a_3 a_4' + a_3 a_4 a_2' + a_4 a_2 a_3')x_1^2 + \text{etc.}\}.$$

So wie alle Contravarianten des Systems $\sigma + \lambda\sigma' = 0$ in Function der zwei festen Contravarianten τ, τ' und von σ, σ' ausgedrückt werden können, so lassen sich alle Covarianten des Systems $U + \lambda U' = 0$ in Function der beiden Covarianten T, T' verbunden mit U, U' und den Invarianten (Art. 216) darstellen. Die reciproken Betrachtungen zu denen des letzten Artikels zeigen, dass die Fläche zweiten Grades $T = 0$ der Ort eines Punktes ist, für welchen die von ihm den Flächen $U = 0$, $U' = 0$ umgeschriebenen Kegel in solcher Beziehung zu einander stehen, dass drei Kanten des einen bestimmbar sind, welche ein in Bezug auf den andern sich selbst conjugirtes System bilden, und drei Tangentenebenen des zweiten, welche ein in Bezug auf den ersten sich selbst conjugirtes System bilden.

Man kann an Stelle der Covarianten $T = 0$, $T' = 0$ die beiden Flächen zweiten Grades $S = 0$, $S' = 0$ benutzen (Art. 124, 16), deren erste der Ort der in Bezug auf $U = 0$ genommenen Pole der Tangentenebenen von $U' = 0$ und die zweite der Ort der in Bezug auf $U' = 0$ genommenen Pole der Tangentenebenen von $U = 0$ ist. Mit Hilfe der kanonischen Form der Gleichungen

der quadratischen Form U von n Variabeln $x_1, \ldots x_n$ und ihre Minoren A_{11}, A_{12}, etc. die Gleichung

$$U = -\frac{1}{\Delta^{n-2}} \begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & \ldots & x_n \\ x_1, & A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1n} \\ x_2, & A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ x_n, & A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix};$$

denn die Entwickelung liefert die Producte zweiten Grades der Variabeln in die ersten Minoren der Reciprocaldeterminante der Discriminante; diese letztern sind aber den Producten der entsprechenden Elemente der Discriminante in die $(n-2)^{\text{te}}$ Potenz dieser Discriminante gleich.

können die einfachen zwischen S und S' mit T und T' bestehenden Relationen leicht nachgewiesen werden. Man hat

$$S \equiv a_2 a_3 a_4 a_1'^2 x_1^2 + a_3 a_4 a_1 a_2'^2 x_2^2 + a_4 a_1 a_2 a_3'^2 x_3^2 + a_1 a_2 a_3 a_4'^2 x_4^2 = 0,$$

und kann T' nach dem oben gegebenen Werthe in der Form

$$(a_2 a_3 a_4 a_1' + a_3 a_4 a_1 a_2' + a_4 a_1 a_2 a_3' + a_1 a_2 a_3 a_4') \times (a_1' x_1^2 + a_2' x_2^2 + \text{etc.}) - (a_2 a_3 a_4 a_1'^2 x_1^2 + \text{etc.})$$

darstellen, d. i. man hat $T' = \Theta U' - S$. Ebenso erhält man

$$T = \Theta' U - S'.$$

Man erkennt daraus, dass die drei Flächen $U = 0$, $S' = 0$ und $T = 0$ eine gemeinschaftliche Durchdringungscurve haben, etc.[63])

B. 1. Die Gleichung von S zeigt, dass die Flächen $U = 0$, $U' = 0$ und $S = 0$ ein gemeinsames Quadrupel harmonischer Pole besitzen. Dies kann direct geometrisch erwiesen werden, indem wir die Durchschnittscurve von $U = 0$ und $U' = 0$ betrachten. Die Polarebenen ihrer Punkte sind die Tangentialebenen von $U' = 0$ in ihnen und zugleich Tangentialebenen von $S = 0$. Die Spitzen der Kegel zweiten Grades durch jene Curve bilden das gemeinsame Quadrupel von U und U', die Erzeugenden jener Kegel schneiden die Curve in Punkten, in denen die Tangentialebenen zu U' sich in einer Geraden der Gegenfläche der Spitze im Quadrupel schneiden; d. h. es liegen in diesen Flächen unendlich viele Gerade, durch welche Paare gemeinsamer Tangentialebenen von S und U' gehen, oder dieselben enthalten die doppelt eingeschriebenen Kegelschnitte der gemeinsamen Developpabeln dieser letztern oder bilden das gemeinsame Quadrupel derselben.

Die Ebenen dieses Quadrupels schneiden die Flächen $U = 0$, $S = 0$ in Kegelschnitten, welche in Bezug auf den Schnitt mit $U' = 0$ polarreciprok sind: seine Kanten schneiden dieselben Flächen in drei Punktepaaren von analoger Beziehung.

Nach Art. 403 der „Kegelschn." ergiebt sich daraus die Lösung des Problems, zu zwei Flächen zweiten Grades eine dritte zu bestimmen, in Bezug auf welche jene polarreciprok sind. Man erhält in den Ebenen des gemeinsamen Quadrupels der gegebenen Flächen je vier Kegelschnitte, welche der gesuchten Fläche angehören können, in jeder seiner Kanten zwei Punktepaare, durch welche sie gehen. Die über jenen Kegelschnitten stehenden Kegel aus der Gegenecke sind Berührungs-

kegel der Flächen längs derselben, die aus jenen Punkten nach der Gegenkante gehenden Ebenen Tangentialebenen in denselben. Die Zahl der möglichen Flächen ist acht.[64])

B. 2. Man soll den Ort eines Punktes bestimmen, dessen in Bezug auf die Fläche $U = 0$ genommene Polarebene die Fläche $U + \lambda U' = 0$ berührt.

Wir haben dann in $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$ für ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die Differentiale U_1, U_2, U_3, U_4 zu substituiren, und können das Resultat mittelst der kanonischen Formen

$$U \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad U' \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$$

in Function der Covarianten darstellen. Denn dasselbe ist hierfür

$$\begin{aligned} x_1^2 &+ \text{etc.} + \lambda\{(a_2 + a_3 + a_4)x_1^2 + \text{etc.}\} \\ &+ \lambda^2\{(a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_2)x_1^2 + \text{etc.}\} \\ &+ \lambda^3\{a_2 a_3 a_4 x_1^2 + \text{etc.}) = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\varDelta U + \lambda(\Theta U - \varDelta U') + \lambda^2(\Phi U - T') + \lambda^3(\Theta' U - T) = 0.$$

Ebenso ist der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf $U' = 0$ die Fläche $U + \lambda U' = 0$ berühren, dargestellt durch $\overline{S} = 0$ oder

$$\Theta U' - T' + \lambda(\Phi U' - T) + \lambda^2(\Theta' U' - \varDelta' U) + \lambda^3 \varDelta' U' = 0.$$

B. 3. Man soll den Ort eines Punktes finden, dessen Polarebenen in Bezug auf die Flächen $U = 0$, $U' = 0$ ein in Bezug auf $U + \lambda U' = 0$ conjugirtes Paar bilden. In derselben Weise, in der die Bedingung

$$a_1 x_1 x_1' + a_2 x_2 x_2' + a_3 x_3 x_3' + a_4 x_4 x_4' = 0$$

die harmonisch conjugirte Lage zweier Punkte x, x' in Bezug auf die Fläche $U = 0$ ausdrückt, ist die Bedingung der harmonisch conjugirten Lage zweier Ebenen in Bezug auf diese Fläche

$$A_1 \xi_1 \xi_1' + A_2 \xi_2 \xi_2' + A_3 \xi_3 \xi_3' + A_4 \xi_4 \xi_4' = 0.$$

Wenn man dies auf den hier vorliegenden Fall anwendet, so erhält man für die kanonischen Formen

$$\begin{aligned} &a_1 x_1^2 + \text{etc.} + \lambda\{(a_2 + a_3 + a_4)a_1 x_1^2 + \text{etc.}\} \\ &+ \lambda^2\{(a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_2)a_1 x_1^2 + \text{etc.}\} + \lambda^3 a_1 a_2 a_3 a_4 \{x_1^2 + \text{etc.}\} = 0, \end{aligned}$$

oder
$$\varDelta U' + \lambda T' + \lambda^2 T + \lambda^3 \varDelta' U = 0.$$

B. 4. Man berechne die Discriminante von T.

Sie ist
$$\varDelta \varDelta' \{\Phi \Theta'^2 - \varDelta'(\Theta \Theta' - \varDelta \varDelta')\}.$$

230. **Die Gleichung der zweien Flächen $U=0$, $U'=0$ gemeinschaftlich umgeschriebenen developpabeln Fläche** (Art. 229)

$$27\Delta^2\Delta'^2U^2U'^2+4\Delta'UT'^3+4\Delta U'T^3=T^2T'^2+18\Delta\Delta'TT'UU'$$

ist vom achten Grade in den Veränderlichen und vom zehnten in den Coefficienten der Gleichung jeder Fläche. Indem man in ihr $U=0$ setzt, erkennt man, dass die developpable Fläche sich mit $U=0$ in der Curve $U=0$, $T=0$ berührt, und dass sie diese Fläche überdies schneidet in dem Durchschnitte von

$$U=0 \quad \text{und} \quad T'^2-4\Delta U'T=0.$$

Der letztere Ort repräsentirt, wie wir weiterhin (Art. 232) zeigen wollen, acht gerade Linien, reelle oder imaginäre Erzeugende der Fläche zweiten Grades $U=0$.

Was die Berührungscurve der developpabeln Fläche mit $U=0$ ist, erkennt man leicht; denn der Berührungspunkt von $U=0$ mit einer gemeinschaftlichen Tangentenebene von $U=0$, $U'=0$ ist der in Bezug auf $U=0$ genommene Pol einer Tangentenebene von $U'=0$ und daher ein Punkt der Fläche $S'=0$, und wir haben im letzten Artikel bewiesen, dass die Curven $U=0$, $S'=0$ und $T=0$, $U=0$ identisch sind.

Der Schnitt der developpabeln Fläche mit einer der Hauptebenen $x_4=0$ wird am leichtesten gefunden, indem man den Entwickelungsprocess für die Gleichung derselben wiederholt. Die gemeinschaftlich umgeschriebene Developpable zu den Flächen

$$x_1^2+x_2^2+x_3^3+x_4^2=0$$
$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2=0$$

wird als Discriminante von

$$\frac{a_1x_1^2}{\lambda+a_1}+\frac{a_2x_2^2}{\lambda+a_2}+\frac{a_3x_3^2}{\lambda+a_3}+\frac{a_4x_4^2}{\lambda+a_4}=0$$

erhalten. Wenn man also $x_4=0$ macht, so ist wie in Art. 218, 2 die Discriminante das Product von

$$\left(\frac{a_1x_1^2}{a_1-a_4}+\frac{a_2x_2^2}{a_2-a_4}+\frac{a_3x_3^2}{a_3-a_4}\right)^2$$

in die Discriminante von

$$\frac{a_1x_1^2}{\lambda+a_1}+\frac{a_2x_2^2}{\lambda+a_2}+\frac{a_3x_3^2}{\lambda+a_3}.$$

Um die letztere zu bilden, differentiiren wir in Bezug auf λ und erhalten

$$\frac{a_1 x_1^2}{(\lambda + a_1)^2} + \frac{a_2 x_2^2}{(\lambda + a_2)^2} + \frac{a_3 x_3^2}{(\lambda + a_3)^2} = 0,$$

$$\frac{a_1^2 x_1^2}{(\lambda + a_1)^2} + \frac{a_2^2 x_2^2}{(\lambda + a_2)^2} + \frac{a_3^2 x_3^2}{(\lambda + a_3)^2} = 0,$$

also

$$\frac{a_1 x_1^2}{(\lambda + a_1)^2} = a_2 - a_3, \quad \frac{a_2 x_2^2}{(\lambda + a_2)^2} = a_3 - a_1, \quad \frac{a_3 x_3^2}{(\lambda + a_3)^2} = a_1 - a_2;$$

und durch Substitution in die gegebene Gleichung das Resultat

$$x_1 \{ a_1(a_2 - a_3) \}^{\frac{1}{2}} \pm x_2 \{ a_2(a_3 - a_1) \}^{\frac{1}{2}} \pm x_3 \{ a_3(a_1 - a_2) \}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Der fragliche Schnitt besteht daher aus einem zweifach zählenden Kegelschnitte und vier geraden Linien.

231. Man soll die Bedingung finden, unter der eine gegebene gerade Linie die Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades $U = 0$, $U' = 0$ schneidet.

Angenommen, dass man wie in Art. 81 die Bedingung $\psi = 0$ gebildet habe, unter welcher jene Gerade die Fläche $U = 0$ berührt, so wird durch die Substitution $a_{11} + \lambda a'_{11}$ für a_{11}, etc. dieselbe in

$$\psi + \lambda \psi_1 + \lambda^2 \psi' = 0$$

übergeführt. Wenn also die Gerade willkürlich gegeben ist, so bestimmt man durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung für λ zwei Flächen, welche durch die Curve $U = 0$, $U' = 0$ gehen und diese Gerade berühren. Geht aber diese letztere selbst durch die Curve, so müssen beide Flächen zusammenfallen, da die Linie im Allgemeinen nur in demjenigen Punkte durch eine Fläche des Systems berührt werden kann, wo sie die Curve $U = 0$, $U' = 0$ schneidet. Die gesuchte Bedingung ist daher $\psi_1^2 = 4\psi\psi'$; sie ist von der zweiten Ordnung in den Coefficienten jeder der Flächen und von der vierten in den Coefficienten jeder der die gerade Linie bestimmenden Ebenen, und diese gehen in den Verbindungen $\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2$, etc. in sie ein; d. h. die Gleichung enthält im vierten Grade die sechs Coordinaten π_{lm} oder p_{ik} der Durchschnittslinie beider Ebenen.

Die Bedingung $\psi_1 = 0$ wird erfüllt, wenn die gerade Linie durch beide Flächen in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. Sie stellt einen Complex zweiten Grades dar, wie auch geometrisch evident ist, weil ja die in einer Ebene

gelegenen Geraden, welche beide Flächen in harmonischen Punktepaaren schneiden, einen Kegelschnitt umhüllen. („Kegelschnitte" Art. 369 u. 340.) Wir können dieselbe nämlich auch ableiten, indem wir für die x_i in die Gleichungen der Flächen $U = 0$, $U' = 0$ die Substitution $(my_i + nz_i)$ vollziehen und für die Substitutionsresultate (Art. 76)

$$m^2 U_y + 2mnP_{yz} + n^2 U_z = 0, \quad m^2 U_y' + 2mnP_{yz}' + n^2 U_z' = 0$$

die Bedingung der harmonischen Theilung bilden, nämlich

$$U_y U_z' + U_y' U_z - 2P_{yz}P_{yz}' = 0$$

In dem Falle, in welchem beide Flächen durch Gleichungen von der Form

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$
$$a_1' x_1^2 + a_2' x_2^2 + a_3' x_3^2 + a_4' x_4^2 = 0$$

gegeben sind, während die gerade Linie durch

$$\xi_1 x_1 + \cdots = 0, \quad \xi_1' x_1 + \cdots = 0$$

dargestellt wird, ist nach Art. 81 $\psi \equiv \Sigma a_1 a_2 (\xi_3 \xi_4' - \xi_3' \xi_4)^2$, d. h. die Summe von sechs Gliedern von dieser Form, wie $a_3 a_4 (\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2)^2$, etc. Alsdann ist

$$\psi_1 \equiv \Sigma (a_1 a_2' + a_1' a_2)(\xi_3 \xi_4' - \xi_3' \xi_4)^2,$$

d. i. $\quad \Sigma (a_1 a_2' + a_1' a_2) \pi_{34}^2 \quad$ oder $\quad \Sigma (a_1 a_2' + a_1' a_2) p_{12}^2$;

und man hat für den Complex der die Durchdringungscurve schneidenden Geraden

$$\begin{aligned} 0 = \psi_1^2 - 4\psi\psi' \equiv\ & \Sigma (a_1 a_2' - a_1' a_2)^2 \pi_{34}^4 \\ & + 2\Sigma (a_1 a_2' - a_1' a_2)(a_1 a_3' - a_1' a_3) \pi_{34}^2 \pi_{24}^2 \\ & + 2\Sigma \{ (a_1 a_4' - a_1' a_4)(a_3 a_2' - a_3' a_2) \\ & + (a_1 a_3' - a_1' a_3)(a_4 a_2' - a_4' a_2) \} \pi_{12}^2 \pi_{31}^2. \end{aligned}$$

232. Man soll die Gleichung der developpabeln Fläche finden, welche durch die Tangenten der Durchdringungscurve von $U = 0$, $U' = 0$ gebildet wird.

Wenn wir irgend einen Punkt in einer Tangente dieser Curve betrachten, so geht die Polarebene desselben in Bezug auf $U = 0$ oder $U' = 0$ nothwendig durch den Berührungspunkt der Tangente, in welcher er liegt; die Durchschnittslinie beider Polarebenen schneidet also die Curve $U = 0$, $U' = 0$. Wir er-

halten daher die Gleichung der fraglichen Developpabeln, indem wir in die Bedingung des letzten Art. für ξ_1, ξ_2, etc., ξ_1', ξ_2', etc. die Differentialquotienten U_1, U_2, etc., U_1', U_2', etc. substituiren; sie ist vom achten Grade in den Variabeln und vom sechsten in den Coefficienten jeder Fläche. Unter Anwendung der kanonischen Form der Gleichungen der Flächen ergiebt sich das Endresultat wie folgt:

$$\begin{aligned}&\Sigma(a_1 a_2' - a_1' a_2)^2 (a_3 a_4' - a_3' a_4)^4 x_3^4 x_4^4 \\ &+ 2\Sigma(a_1 a_2' - a_1' a_2)(a_1 a_3' - a_1' a_3)(a_3 a_4' - a_3' a_4)^2 (a_2 a_4' - a_2' a_4)^2 x_2^2 x_3^2 x_4^4 \\ &+ \{(a_1 a_2' - a_1' a_2)(a_3 a_4' - a_3' a_4) - (a_1 a_4' - a_1' a_4)(a_2 a_3' - a_2' a_3)\} \\ &\times \{(a_1 a_4' - a_1' a_4)(a_2 a_3' - a_2' a_3) - (a_2 a_4' - a_2' a_4)(a_3 a_1' - a_3' a_1)\} \\ &\times \{(a_2 a_4' - a_2' a_4)(a_3 a_1' - a_3' a_1) - (a_1 a_2' - a_1' a_2)(a_3 a_4' - a_3' a_4)\} \\ &\times 2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = 0.\end{aligned}$$

Setzen wir in dieser Gleichung eine der Veränderlichen z. B. $x_4 = 0$, so erhalten wir ein vollständiges Quadrat, d. h. jede der vier Ebenen $x_i = 0$ schneidet die developpable Fläche in einer ebenen Curve vierter Ordnung, welche eine Doppellinie der Fläche ist.[65])

Dies ist a priori offenbar, weil die Symmetrie der Figur es bedingt, dass durch jeden Punkt in einer dieser vier Ebenen, welcher einer Tangente der Curve $U = 0$, $U' = 0$ angehört, noch eine zweite Tangente derselben gehen muss.

Man kann mit Hilfe der kanonischen Form das vorige Ergebniss in Function der Covarianten ausdrücken, und erhält als Gleichung der betrachteten Developpabeln

$$\begin{aligned}4(\Theta U U' - T' U - \Delta U'^2)(\Theta' U U' - T U' - \Delta' U^2) \\ = (\Phi U U' - T U - T' U')^2.\end{aligned}$$

Die Curve $U = 0$, $U' = 0$ ist offenbar in dem durch diese Gleichung dargestellten Orte eine Doppellinie*), wie auch sonst

*) Man beweist, wie in Art. 113 oder in Art. 51 der „Höh. Curv.“, dass für $U^2\varphi + UV\psi + V^2\chi = 0$ als Gleichung einer Fläche die Curve $U = V = 0$ eine Doppelcurve in derselben ist und dass die beiden Tangentialebenen in einem Punkte derselben für $u = 0$ und $v = 0$ als entsprechende Tangentialebenen von $U = 0$ und $V = 0$ durch $u^2\varphi' + uv\psi' + v^2\chi' = 0$ gegeben werden, mit φ', ψ', χ' als den Resultaten der Substitution der Coordinaten des Punktes in φ, ψ, χ.

erkannt werden kann; und der Ort schneidet die Fläche $U = 0$ überdies in der Linie achter Ordnung, welche die Flächen $U = 0$ und $T'^2 - 4\varDelta T U' = 0$ mit einander gemein haben. Es ist dieselbe Linie, die wir schon im Art. 230 fanden.

Wie es dort ausgesprochen ist, so kann leicht geometrisch bewiesen werden, dass eine Erzeugende der Fläche $U = 0$ in jedem der acht Durchschnittspunkte der drei Flächen $U = 0$, $U' = 0$, $S' = 0$ oder $U = 0$, $U' = 0$, $T = 0$ auch eine Erzeugende der developpabeln Fläche ist, und dass daher diese acht Linien den Ort von der achten Ordnung bilden, den die Gleichungen $U = 0$, $T^2 - 4\varDelta T U' = 0$ darstellen. Denn da die Fläche $S' = 0$ der Ort der Pole der Tangentenebenen von $U' = 0$ in Bezug auf die Fläche $U = 0$ ist, so ist die Tangentenebene zu $U' = 0$ in einem dieser acht Punkte auch eine Tangentenebene zu $U = 0$ und geht daher durch eine der Erzeugenden von $U = 0$ in diesem Punkte. Diese Erzeugende ist also die Durchschnittslinie der Tangentenebenen von $U = 0$, $U' = 0$ und daher auch eine Erzeugende der fraglichen developpabeln Fläche.

233. Die Berechnung des Art. 232 kann auch an die Determinante des Art. 81 angeschlossen werden, welche die Berührung der Fläche zweiten Grades mit einer Geraden ausdrückt, indem man für die a_{ik} die Coefficienten der Fläche des Büschels $a_{ik} + \lambda a'_{ik}$ und für die ξ_i resp. η_i die U_i und resp. die U'_i der Flächengleichungen einsetzt und sie in folgender Weise umformt: Man subtrahirt von den Elementen der ersten Reihe die mit x_1, x_2, x_3, x_4 resp. multiplicirten entsprechenden Elemente der dritten, vierten, fünften und sechsten Reihe und entfernt die dadurch entstandenen Glieder $-\lambda U'_i$ der ersten durch die entsprechenden der zweiten; man verfährt dann ebenso mit den Zeilen und erkennt als Werth der Determinante den Ausdruck

$$(U + \lambda U')\overline{S} - U'^2(\varDelta + \lambda\Theta + \lambda^2\Phi + \lambda^3\Theta' + \lambda^4\varDelta'),$$

wenn durch $-\overline{S}$ der Werth bezeichnet wird, den die Deter-

Indem man dies auf die obige Gleichung anwendet, erkennt man, dass die beiden Tangentialebenen durch die Gleichung $(TU - T'U')^2 = 0$ ausgedrückt werden, wo in T, T' die Substitution der Coordinaten des Punktes vollzogen ist. Es fallen somit die beiden Tangentialebenen in jedem Punkte dieser Doppelcurve zusammen und dieselbe ist specieller das, was man als eine Cuspidalcurve der Fläche bezeichnet.

minante des Art. 80 annimmt bei der entsprechenden Ersetzung der a_{ik} und ξ_i durch die $a_{ik} + \lambda a'_{ik}$ und die U'_i resp. Wir haben am Schlusse des Beisp. 2 in Art. 228 diesen Werth mittelst U, U', T, T' und der Invarianten ausgedrückt und setzen ihn hier ein, mit dem Erfolge, dass wie es sein muss, die dritte und vierte Potenz von λ aus dem Ausdrucke verschwinden und damit die Determinante sich reducirt auf

$$(\Theta U U' - T'U - \Delta U'^2) + \lambda(\Phi U U' - TU - T'U') \\ + \lambda^2(\Theta' U U' - TU' - \Delta' U^2) = 0.$$

So erkennen wir, das $\Theta U U' = T'U + \Delta U'^2$ die Bedingung ist, unter welcher die Durchschnittslinie der zwei Polarebenen die Fläche $U = 0$ berührt, während $\Phi U U' = TU + T'U$ die Bedingung ist, unter welcher sie durch die Flächen $U = 0$, $U' = 0$ harmonisch getheilt wird. Endlich ist die Discriminante der vorigen Gleichung die Gleichung der developpabeln Fläche der gemeinsamen Curve

$$4(\Theta U U' - T'U - \Delta U'^2)(\Theta' U U' - TU' - \Delta' U^2) \\ = (\Phi U U' - TU - T'U')^2.$$

234. Wir geben eine Behandlung des Problems der Tangentenfläche der Durchdringungscurve in Strahlencoordinaten p_{ik}.

Wenn die Gerade p_{ik} eine Erzeugende der Fläche

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

ist, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_3 p_{31}^2 + a_2 p_{12}^2 + a_4 p_{14}^2, \\ 0 &= a_3 p_{23}^2 + a_1 p_{12}^2 + a_4 p_{24}^2, \\ 0 &= a_2 p_{23}^2 + a_1 p_{31}^2 + a_4 p_{34}^2, \\ 0 &= a_1 p_{14}^2 + a_2 p_{24}^2 + a_3 p_{34}^2, \end{aligned}$$

welche die Ausdrücke der p_{23}, p_{31}, p_{12} durch die p_{i4} liefern

$$p_{23}^2 = p_{14}^2 \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3}, \quad p_{31}^2 = p_{24}^2 \frac{a_2 a_4}{a_3 a_1}, \quad p_{12}^2 = p_{34}^2 \frac{a_3 a_4}{a_1 a_2}.$$

In Folge dessen ist für eine Erzeugende von irgend einer Fläche des Büschels $U + \lambda U' = 0$ aus

$$U \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0, \quad U' \equiv a_1' x_1^2 \cdots = 0$$

oder eine Sehne oder Bisecante seiner Grundcurve

$$p_{23}^2 = p_{14}^2 \frac{(a_1 + \lambda a_1')(a_4 + \lambda a_4')}{(a_2 + \lambda a_2')(a_3 + \lambda a_3')}, \quad p_{31}^2 = p_{24}^2 \frac{(a_2 + \lambda a_2')(a_4 + \lambda a_4')}{(a_3 + \lambda a_3')(a_1 + \lambda a_1')},$$

$$p_{12}^2 = p_{34}^2 \frac{(a_3 + \lambda a_3')(a_4 + \lambda a_4')}{(a_1 + \lambda a_1')(a_2 + \lambda a_2')},$$

$$(a_1 + \lambda a_1')p_{14}^2 + (a_2 + \lambda a_2')p_{24}^2 + (a_3 + \lambda a_3')p_{34}^2 = 0.$$

Da eine Tangente der Durchdringungscurve der Flächen diese selbst berührt, so hat man auch

$$a_2 a_3 p_{23}^2 + a_3 a_1 p_{31}^2 + a_1 a_2 p_{12}^2 + a_1 a_4 p_{14}^2 + a_2 a_4 p_{24}^2 + a_3 a_4 p_{34}^2 = 0,$$

$$a_2' a_3' p_{23}^2 + a_3' a_1' p_{31}^2 + a_1' a_2' p_{12}^2 + a_1' a_4' p_{14}^2 + a_2' a_4' p_{24}^2 + a_3' a_4' p_{34}^2 = 0,$$

und daher mit Berücksichtigung der letztvorhergehenden Relation

$$(a_2 a_3 a_4' + \lambda a_2' a_3' a_4) p_{23}^2 + (a_3 a_1 a_4' + \lambda a_3' a_1' a_4) p_{31}^2 + (a_1 a_2 a_4' + \lambda a_1' a_2' a_4) p_{12}^2 = 0$$

oder in den p_{i4}^2

$$(a_2 a_3 a_4' + \lambda a_2' a_3' a_4)(a_1 + \lambda a_1')^2 p_{14}^2 + (a_3 a_1 a_4' + \lambda a_3' a_1' a_4)(a_2 + \lambda a_2')^2 p_{24}^2 + (a_1 a_2 a_4' + \lambda a_1' a_2' a_4)(a_3 + \lambda a_3')^2 p_{34}^2 = 0.$$

Hieraus und aus

$$(a_1 + \lambda a_1')p_{14}^2 + (a_2 + \lambda a_2')p_{24}^2 + (a_3 + \lambda a_3')p_{34}^2 = 0$$

ergeben sich die p_{23}^2, etc. und sodann die p_{i4}^2 mit offenbaren Abkürzungen wie folgt

$$p_{23}^2 = (a_2 a_3')(a_1 a_4')(a_1 + \lambda a_1')(a_4 + \lambda a_4'),$$

$$p_{31}^2 = (a_3 a_1')(a_2 a_4')(a_2 + \lambda a_2')(a_4 + \lambda a_4'),$$

$$p_{12}^2 = (a_1 a_2')(a_3 a_4')(a_3 + \lambda a_3')(a_4 + \lambda a_4'),$$

$$p_{14}^2 = (a_2 a_3')(a_1 a_4')(a_2 + \lambda a_2')(a_3 + \lambda a_3'),$$

$$p_{24}^2 = (a_3 a_1')(a_2 a_4')(a_3 + \lambda a_3')(a_1 + \lambda a_1'),$$

$$p_{34}^2 = (a_1 a_2')(a_3 a_4')(a_1 + \lambda a_1')(a_2 + \lambda a_2'),$$

womit zugleich die Identität $p_{23} p_{14} + p_{31} p_{24} + p_{12} p_{34} = 0$ erfüllt wird.

Aus diesen Werthen der Coordinaten der Erzeugenden mittelst des Parameters λ kann die Gleichung der Tangentenfläche in Punktcoordinaten x_i leicht abgeleitet werden. Denn für irgend einen Punkt der Geraden ist z. B. (Art. 56, S. 71)

$$p_{23}x_1 + p_{31}x_2 + p_{12}x_3 = 0;$$

und da auch $U + \lambda U' = 0$ ist, so wird die Gleichung der Tangentenfläche

$$x_1 \{(a_2 a_3')(a_1 a_4')(a_1 U' - a_1' U)\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+ x_2 \{(a_3 a_1')(a_2 a_4')(a_2 U' - a_2' U)\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+ x_3 \{(a_1 a_2')(a_3 a_4')(a_3 U' - a_3' U)\}^{\frac{1}{2}} = 0$$

und man erkennt sofort für $x_3 = 0$ ihren Schnitt mit einer Ebene des gemeinsamen Polartetraeders der Flächen als eine Doppelcurve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

Für $U = 0$ wird $\sqrt{U'}$ ein gemeinsamer Factor ihrer Glieder und man erkennt die acht Geraden, welche die Restdurchdringung mit $U = 0$ bilden.

Und sie erhält offenbar durch Rationalisirung die Form

$$U^2 \varphi + U U' \psi + U'^2 \chi = 0,$$

sodass auch UU' eine Doppelcurve in ihr ist.

Ferner wissen wir, dass für die Lage der Geraden p_{ik} in der Ebene von den Coordinaten ξ_i die Relationen gelten (Art. 56)

$$\xi_1 p_{14} + \xi_2 p_{24} + \xi_3 p_{34} = 0, \text{ etc.},$$

sodass, wenn die nächstfolgende Gerade auch in dieser Ebene liegt, zugleich

$$\xi_1 \frac{d p_{14}}{d\lambda} + \xi_2 \frac{d p_{24}}{d\lambda} + \xi_3 \frac{d p_{34}}{d\lambda} = 0$$

sein muss, zur Bestimmung der ξ_1, ξ_2, ξ_3. Man erkennt damit, dass für die Coordinaten der Ebene von zwei aufeinander folgenden Erzeugenden der Tangentenfläche bis auf einen gemeinsamen Factor die symmetrischen Ausdrücke gelten

$$\xi_1^2 (a_1 a_2')(a_1 a_3')(a_1 a_4') = (a_1 + \lambda a_1')^3,$$
$$\xi_2^2 (a_2 a_3')(a_2 a_4')(a_2 a_1') = (a_2 + \lambda a_2')^3,$$
$$\xi_3^2 (a_3 a_1')(a_3 a_4')(a_3 a_2') = (a_3 + \lambda a_3')^3,$$
$$\xi_4^2 (a_4 a_1')(a_4 a_2')(a_4 a_3') = (a_4 + \lambda a_4')^3.$$

Analog erkennt man die entsprechenden Ausdrücke für die Coordinaten eines Punktes der Curve U, U'

$$x_1^2(a_1a_2')(a_1a_3')(a_1a_4) = a_1 + \mu a_1',$$
$$x_2^2(a_2a_3')(a_2a_4')(a_2a_1') = a_2 + \mu a_2', \text{ etc.}$$

235. Die Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ bezeichnet nach Art. 106 ein System von concentrischen Flächen zweiten Grades mit gemeinschaftlichen Ebenen der Kreisschnitte. Die Form der Gleichung zeigt, dass die Flächen des fraglichen Systems die imaginäre Curve gemeinschaftlich haben, in welcher die unendlich kleine Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ irgend eine unter ihnen schneidet.

Da ferner die Gleichung eines Systems confocaler Flächen zweiten Grades (Art. 172)

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1$$

in Tangentialcoordinaten

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + \lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1$$

ist, so ergiebt sich reciprok, dass ein System von confocalen Flächen zweiten Grades durch eine gemeinschaftliche imaginäre Developpable umhüllt ist (Art. 161); eine Developpable nämlich, welche durch diejenigen Tangentenebenen irgend einer Fläche des Systems gebildet wird, die je eine der Tangenten des imaginären Kreises im Unendlichen enthalten.

Wenn man die Discriminante der Gleichung des Flächensystems in Bezug auf λ bildet, so erhält man die Gleichung dieser developpabeln Fläche; sie ist für $b - c = f$, $c - a = g$, $a - b = h$ die folgende

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)^2(f^2x^4+g^2y^4+h^2z^4-2ghy^2z^2-2hfz^2x^2-2fgx^2y^2)\\
&+2f^2(g-h)x^6+2g^2(h-f)y^6+2h^2(f-g)z^6+2f(fh-3g^2)x^4y^2\\
&-2g(gh-3f^2)x^2y^4-2f(fg-3h^2)x^4z^2+2h(gh-3f^2)x^2z^4\\
&+2g(gf-3h^2)y^4z^2-2h(hf-3g^2)y^2z^4+2(f-g)(g-h)(h-f)x^2y^2z^2\\
&+(f^4-6f^2gh)x^4+(g^4-6g^2fh)y^4+(h^4-6h^2fg)z^4+2fg(fg-3h^2)x^2y^2\\
&+2gh(gh-3f^2)y^2z^2+2hf(hf-3g^2)x^2z^2+2f^2gh(h-g)x^2\\
&+2g^2fh(f-h)y^2+2h^2fg(g-f)z^2+f^2g^2h^2=0.
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung oder auch wie in Art. 218 kann abgeleitet werden, dass die Focalkegelschnitte von

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

und der imaginäre Kreis in unendlicher Ferne Doppellinien in der Fläche sind. Das letzte zeigt die vorstehende Form, da die nach der ersten Zeile folgenden Glieder den gemeinsamen Factor w^2 haben. Man erhält aber drei gleichbedeutende andre Formen mit den gemeinsamen Factoren x^2, y^2, z^2 resp. bei allen Gliedern mit Ausnahme derer, welche die resp. Factoren

$$(gy^2 - hz^2 + gh)^2, \quad (hz^2 - fx^2 + hf)^2, \quad (fx^2 - gy^2 + fg)^2$$

haben, welche also eine imaginäre Ellipse, die Focalhyperbel, die Focalellipse in $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ resp. als Doppelcurven liefern, und welche lauten

$$\{y^4 + 2y^2z^2 + z^4 - 2f(y^2 - z^2) + f^2\}, \text{ etc.}$$

236. Wenn $\sigma = 0$ die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiten Grades ist, so erhalten wir in derselben Art durch Bildung der Reciprocalform von $\sigma + \lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$

$$\begin{aligned}\Delta^2 U + \lambda\Delta[\{a_{11}(a_{22}+a_{33}) - a_{13}^2 - a_{12}^2\}x^2 + \cdots \\ + \{a_{44}(a_{11}+a_{22}+a_{33}) - a_{14}^2 - a_{24}^2 - a_{34}^2\} + 2yz(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}) \\ + 2zx(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) + 2xy(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23}) \\ + 2x\{(a_{22} + a_{33})a_{14} - a_{12}a_{24} - a_{13}a_{34}\} \\ + 2y\{(a_{33} + a_{11})a_{24} - a_{23}a_{34} - a_{12}a_{14}\} \\ + 2z\{(a_{11} + a_{22})a_{34} - a_{13}a_{14} - a_{23}a_{24}\}] \\ + \lambda^2\{A_{44}(x^2 + y^2 + z^2) + A_{11} + A_{22} + A_{33} - 2A_{14}x \\ - 2A_{24}y - 2A_{34}z\} + \lambda^3 = 0,\end{aligned}$$

für $A_{11}, A_{22}, \ldots A_{34}$ als die Elemente des adjungirten Systems der Discriminante oder die Minoren derselben nach den Elementen $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{34}$.

Dies ist die Gleichung einer Schaar von confocalen Flächen, und ihre Discriminante in Bezug auf λ repräsentirt, gleich Null gesetzt, die im letzten Art. betrachtete Developpable.

Bezeichnen wir die Coefficienten von λ und λ^2 respective durch T und T' (vergl. Art. 229), so ist $T = 0$ der Ausdruck für den Ort der Punkte, von welchen aus drei zu einander rechtwinklige Tangenten an die gegebene Fläche zweiten Grades gezogen werden können, und $T' = 0$ die Gleichung des Ortes von Punkten, von welchen aus drei zu einander rechtwinklige Tangentenebenen an dieselbe gehen. Dieser Ort heisst die Director-

kugel der Fläche. (Vergl. Art. 95, 112 B. und 199, 1.) Für den ersten siehe Art. 124, 8 und Art. 199, 2.

Wenn man die Gleichung des Paraboloids $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+2z=0$ in derselben Weise behandelt, so erhält man die Gleichung des Systems der confocalen Flächen in der Form

$$(bx^2+ay^2+2abz)+\lambda\{x^2+y^2+2(a+b)z-ab\}$$
$$+\lambda^2\{2z-(a+b)\}-\lambda^3=0,$$

und die sie alle berührende Developpable ist daher für $a-b=h$ durch die Gleichung ausgedrückt

$$4(x^2+y^2)^2(x^2+y^2+z^2)+16hz(x^2+y^2+z^2)(x^2-y^2)$$
$$+4z(x^2+y^2)(ax^2+by^2)+16h^2z^4+32h^2z^2(x^2+y^2)$$
$$+24h(bx^2+ay^2)z^2+(ax^2+by^2)^2+8h(bx^2+ay^2)(x^2-y^2)$$
$$+12h^2x^2y^2+16(a+b)h^2z(x^2+y^2+z^2)-12h^2z(ax^2+by^2)$$
$$+12abhz(x^2-y^2)+4h^2z^2(a^2+4ab+b^2)+4h^2(b^2x^2+a^2y^2)$$
$$+2abh(ax^2-by^2)+4abh^2(a+b)z+a^2b^2h^2=0.$$

Der Ort des Durchschnittspunktes von drei zu einander rechtwinkligen Tangentenebenen des Paraboloids ist die Ebene $2z=a+b$, und der Ort des Schnittes von drei zu einander rechtwinkligen Tangenten desselben das Umdrehungsparaboloid

$$x^2+y^2+2(a+b)z-ab=0.$$

B. Die Function T', die linke Seite der Gleichung der Directorkugel, ist in den Elementen des adjungirten Systems oder den Coefficienten der Tangentialgleichung der Fläche $\sigma=0$ linear.

Für die Flächenschaar $\sigma+\lambda\sigma'=0$ oder die Flächen zweiten Grades, welche acht gegebene Ebenen berühren (Art. 143), für das System $\sigma+\lambda\sigma'+\mu\sigma''=0$ der Flächen zweiten Grades mit sieben (Art. 144) und das System $\sigma+\lambda\sigma'+\mu\sigma''+\nu\sigma'''=0$ der Flächen mit sechs gemeinsamen Tangentialebenen wird daher die Function T' erhalten durch lineare Zusammensetzung aus den Functionen T' der einzelnen Flächen σ, σ', σ'', σ'''. Man erkennt daraus, dass die Directorkugeln aller Flächen einer Schaar ein Büschel bilden d. i. durch einen festen Kreis gehen oder eine gemeinsame Radicalebene haben (vergl. Art. 123); dass die Directorkugeln der von sieben festen Ebenen berührten Flächen durch zwei Punkte gehen, d. h. eine gemeinsame Radicalaxe haben oder dass ihre Radicalebenen ein Büschel bilden, dass endlich die Directorkugeln aller von sechs Ebenen berührten

zweiten Grades ein gemeinsames Radicalcentrum und eine gemeinsame Orthogonalkugel besitzen. In der That folgt das erste geometrisch aus der Eigenschaft, dass das Büschel der Tangentialebenen der Flächen einer Schaar aus einer festen Geraden ein involutorisches Büschel ist und dass dasselbe somit bei zwei rechtwinkligen Paaren aus lauter rechtwinkligen Paaren bestehen muss — sobald man dies auf die Normale einer der gegebenen Ebenen durch ihren Schnittpunkt mit zweien der Directorkugeln anwendet.[66])

Der Satz von den Mittelpunkten der Flächen der Schaar in Art. 145 folgt daraus. Der Satz liefert aber viele Specialfälle; z. B. für das Paraboloid der Schaar, dass die Radicalebene der Directorkugeln seine Directorebene ist; für eine der acht Ebenen als unendlich fern, dass die Directorebenen der von sieben festen Ebenen berührten Paraboloide ein Büschel bilden; ferner, dass die Directorkugeln aller der Regelflächen zweiten Grades, welche eine respective zwei Erzeugende gemein haben und fünf respective zwei feste Ebenen berühren, ein Büschel bilden; dass die Directorkugeln aller der Regelflächen zweiten Grades, welche dasselbe windschiefe Viereck enthalten, mit den über den Diagonalen desselben als Durchmessern beschriebenen Kugeln denselben Kreis enthalten.

Aehnlich für den zweiten und dritten Satz; z. B. dass die Directorebenen der Paraboloide mit sechs gemeinsamen Tangentialebenen durch einen festen Punkt gehen; dass die Directorkugeln der Regelflächen zweiten Grades mit einer gemeinsamen Erzeugenden und vier gemeinsamen Tangentialebenen eine gemeinschaftliche Radicalaxe haben; und insbesondere, dass dies für die vier Kugeln gilt, welche über den Verbindungslinien der Ecken eines Tetraeders mit den Schnittpunkten der Gegenflächen mit einer Geraden als Durchmesser beschrieben werden; oder dass die Directorkugeln für alle Flächen zweiten Grades mit sechs gemeinsamen Tangentialebenen dasselbe Radicalcentrum haben mit denen der fünfzehn, welche die Schnittlinien der drei Paare dieser Ebenen bestimmen.

237. Verschiedene wichtige Eigenschaften von confocalen Flächen sind besondere Fälle der Eigenschaften von Flächen, welche in eine gemeinschaftliche Developpable eingeschrieben sind. Es ist für ihre Erörterung zweckmässig, zuerst die reciproken Eigenschaften von Systemen auszusprechen, die eine gemeinschaftliche Durchdringungscurve besitzen.

Da die Bedingung, unter welcher eine Fläche zweiten Grades eine Ebene berührt (Art. 80), die Coefficienten ihrer Gleichung im dritten Grade enthält, so folgt, dass es unter den Flächen eines

solchen Systems mit gemeinschaftlicher Durchdringungscurve oder in einem Büschel drei giebt, welche eine gegebene Ebene berühren; und reciprok daher, dass unter den Flächen eines derselben Developpabeln eingeschriebenen Systems oder in einer Schaar stets drei durch einen gegebenen Punkt gehen. So wie in dem ersten System durch jeden Punkt des Raumes eine Fläche, so geht im letzteren zu jeder Ebene des Raumes berührend eine Fläche*). In beiden Systemen existiren stets zwei Flächen, welche eine gegebene Gerade berühren, da die Bedingung, unter welcher solche Berührung stattfindet (Art. 81), die Coefficienten der Fläche im zweiten Grade enthält.

Es ist auch geometrisch evident, dass nur je drei unter den Flächen zweiten Grades mit gemeinsamer Durchdringungscurve von einer gegebenen Ebene berührt werden, weil diese Ebene die gemeinsame Curve in vier Punkten schneidet, durch welche alle ihre Querschnitte mit den Flächen des Systems gehen müssen, und durch diese nur drei Paare reeller oder nicht reeller gerader Linien möglich sind, wie sie den berührten Flächen als gerade Erzeugende entsprechen. Da die Berührungspunkte als Schnittpunkte der Paare von geraden Linien ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf alle Kegelschnitte durch die vier Punkte bilden („Kegelschnitte" Art. 159, 1), so sind die von der Spitze eines der vier Kegel des Systems nach ihnen gehenden Geraden conjugirte Durchmesser dieses Kegels. (Art. 72.) Weiter bilden die Paare der Schnittpunkte einer Geraden mit den Flächen des Büschels eine Involution („Kegelschnitte" Art. 301, 335), deren Doppelpunkte den beiden berührenden Flächen derselben angehören.

Ebenso haben die Tangentenkegel der Flächen einer Schaar aus einem Punkte vier gemeinsame Tangentialebenen, die Ebenen der gemeinsamen umschriebenen developpabeln Fläche durch den Punkt; und diese schneiden sich in drei Paaren von geraden Linien, welche den durch denselben gehenden Flächen der Schaar angehören. Insbesondere berühren sich die aus dem Punkte eines Doppelkegelschnittes der Developpabeln — denn zwei von diesen bilden das einzig Reelle derselben im Falle der Confocalen — den

*) Die Fälle, wo die Durchdringung in zwei ebene Curven oder in ein windschiefes Vierseit degenerirt, welche wir hier ausschliessen, sind früher betrachtet. (Vergl. Art. 143, 1 und 2; Art. 150.)

Flächen umschriebenen Kegel längs zweier Geraden nach Ebenen der Developpabeln, die durch die zugehörige Tangente desselben berührend an die andern Doppelkegelschnitte gehen. Die Ebenen dieser Doppelkegelschnitte oder der Grenzflächen der Schaar bilden (Art. 154) das allen ihren Flächen gemeinsame sich selbst conjugirte Tetraeder; wenn also eine derselben unendlich fern ist, so ist ihre Gegenecke der gemeinsame Mittelpunkt und die von ihr ausgehenden Kanten bilden ein allen gemeinsames Tripel conjugirter Durchmesser, die Flächen die betreffenden gemeinsam conjugirten Diametralebenen.

Im Falle der confocalen Flächen ist der unendlich ferne Doppelkegelschnitt der absolute imaginäre Kreis J aller Kugeln, das gemeinsame Tripel harmonischer Pole und Polarebenen um den Mittelpunkt ist orthogonal, und die Flächen der Schaar haben also gemeinsame Hauptebenen und Axen; in den ersten liegen die drei andern Doppelkegelschnitte. Die Tangentialebenen der drei durch einen Punkt gehenden Flächen der Schaar in diesem sind rechtwinklig zu einander, weil ihre Stellungen ein Tripel harmonischer Polaren in Bezug auf J bilden. Die Involution der Paare von Tangentialebenen der Flächen der Schaar durch eine Gerade hat, als die bezüglichen Tangentialebenen des Kreises J enthaltend, rechtwinklige Doppelebenen, die gemeinsamen Halbirungsebenen der Winkel ihrer Paare. (Art. 176, 184.) Die Tangentialkegel der confocalen Flächen aus einem Punkte sind selbst confocal, weil ihre gemeinsamen Tangentialebenen den Kreis J berühren und somit das eine reelle Paar ihrer Schnittlinien die gemeinsamen Focalstrahlen der Kegel und zugleich die geraden Erzeugenden des durch den Scheitel gehenden einfachen Hyperboloids der Schaar bilden. (Art. 189.) Für einen Punkt eines Focalkegelschnitts insbesondere sind die Tangentenkegel in doppelter Berührung mit einander und mit dem Kreise J nach Ebenen durch die zugehörige Tangente des Focalkegelschnitts, d. h. sie sind Rotationskegel, die diese zur Axe haben (Art. 169, 198), oder die Involutionen harmonischer Polarebenen um diese Tangenten sind rectangulär und identisch. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte jenes Ebenenpaares an einer der Flächen ist die dem Focalpunkte entsprechende Directrix, und die Gesammtheit dieser Geraden für alle Punkte des Focalkegelschnitts bildet die Polarfigur desselben in Bezug auf die Fläche oder den entsprechenden Directrixencylinder (Art. 162 f.); er gehört

nicht der Schaar, sondern der einzelnen Fläche an. Die Gesammtheit ihrer Strahlen in der Schaar bildet die Bündel parallel den Axen und aus dem Mittelpunkte.

238. Wenn ein System von Flächen zweiten Grades durch $S + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ dargestellt wird, so ist der Anfangspunkt der Coordinaten eine der Spitzen der vier Kegel des Systems, weil eben $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ einen Kegel bezeichnet. Und da $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ auch eine unendlich kleine Kugel darstellt, so sind je drei conjugirte Durchmesser zu einander rechtwinklig, und wir erfahren, dass drei Flächen des Systems gefunden werden, die eine gegebene Ebene berühren, und dass die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte mit dem Anfangspunkte zu einander rechtwinklig sind. Weil aber ein System von concentrischen und confocalen Flächen reciprok ist zu einem solchen System von der Gleichungsform $S + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, so erkennen wir, dass drei confocale Flächen zweiten Grades durch einen Punkt gehen und sich in ihm rechtwinklig durchschneiden.

Ferner bilden nach Art. 145 die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf ein System von der Gleichung $S + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ ein Büschel, dessen Scheitelkante mit dem Anfangspunkte eine Ebene bestimmt, die normal ist zu der Geraden, welche vom Anfangspunkte nach dem gegebenen Pol geht — wie dies offenbar ist für die besondere Fläche des Systems $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Daher ist reciprok der Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf die Flächen eines Systems von Confocalen eine zu dieser Ebene normale Gerade. (Art. 181.)

Ebenso folgt aus Art. 146, dass die Polaren einer festen Geraden in Bezug auf die Flächen einer Schaar ein einfaches Hyperboloid bilden, und dass dieses in einen Kegelschnitt übergeht, wenn die Gerade für einen ihrer Punkte zu dem gemeinsamen Tripel harmonischer Polaren der entsprechenden Kegel gehört; für die Confocalen also insbesondere dann, wenn die Gerade zu einer Fläche der Schaar normal ist. (Art. 191.) Die Berührungspunkte der durch die Gerade an die Flächen gehenden Tangentialebenen bilden eine Curve dritter Ordnung, die auch die Berührungspunkte der Geraden mit Flächen der Schaar enthält; im erwähnten Specialfalle eine ebene Curve dritter Ordnung in der zugehörigen Tangentialebene mit Knotenpunkt im Berührungspunkte und die zugehörigen Krümmungslinien berührend. Der Lage in einer Hauptebene entspricht das Zerfallen der Curve der

Berührungspunkte in die Normale zur gegebenen Geraden aus ihrem Pol im entsprechenden Focalkegelschnitte und den Kreis in der Normalebene über dem Abstand als Durchmesser; die den Punkten des Kreises entsprechenden Normalen umhüllen eine Parabel.

Und nach Art. 147 umhüllen die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die Flächen der Schaar, worunter auch die Tangentialebenen der durch ihn gehenden Flächen der Schaar, eine cubische Parabel.

Umgekehrt geben die Eigenschaften der Confocalen auch zu projectivisch allgemeinen Sätzen Anlass, wie z. B. die in Art. 179 gefundene Analogie zwischen den Werthen der Abstände p', p'', p''' und denen der x', y', z' in Art. 174 zu dem folgenden: Zu den Tangentialebenen T_1', T_2', T_3' der drei Flächen einer Schaar durch einen Punkt und einer der Ebenen ihres Quadrupels A_4 existirt eine zweite Schaar von Flächen zweiten Grades, welche in dieser Ebene denselben Doppelkegelschnitt hat wie die erste und deren drei durch die Gegenecke des Quadrupels A_4 gehende Flächen die anstossenden Ebenen desselben berühren; und dualistisch entsprechend.

B. 1. Die Ergebnisse des B. in Art. 228 sind in der betrachteten Weise reciprok dem Satze des Art. 194 von der Kugelfläche der Schnittpunkte orthogonaler Tangentialebenentripel zu drei confocalen Flächen. Die von diesen Punkten an die Flächen gehenden confocalen Tangentenkegel sind in der Relation, dass jeder der Reciprocalkegel desjenigen ist, der den Ort der Schnitte der rechtwinkligen Tangentialebenenpaare der beiden andern bildet. Im andern Falle umhüllen die Ebenen, welche aus concyklischen Kegeln zweiten Grades Paare rechtwinkliger Erzeugenden schneiden, einen Kegel zweiten Grades, dessen reciproker concyklisch mit den gegebenen beiden ist.

B. 2. In zwei collinearen Räumen (vergl. Art. 126, 129) entsprechen der unendlich fernen Ebene des Raumes und dem in ihr liegenden Polarsystem der zu einander orthogonalen Richtungen und Stellungen (vergl. Art. 123 und Art. 134, 1) Polarsysteme mit nicht reellem Directrixkegelschnitt in den respectiven Gegenebenen Q′ und R (Art. 126, 1) und wir sagen kurz: Wenn dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis J des Originalraumes in einem ersten von zwei zu einander collinearen Räumen der Kegelschnitt J_1 und im zweiten der Kegelschnitt J' entspricht, so entspricht auch der durch J und J_1 bestimmten developpabeln Fläche die durch J' und J bestimmte developpable

Fläche und der jener ersten eingeschriebenen Schaar confocaler Flächen zweiten Grades die der letztern eingeschriebene Schaar solcher Flächen. Dadurch wird eine correspondirende Zerlegung der beiden collinearen Räume in rechtwinklige Elementarparallelepipeda angegeben.[67])

Wenn man die Mittelpunkte dieser Polarsysteme in R und Q′ zu Anfangspunkten rechtwinkliger Coordinaten, mit diesen Ebenen selbst als $z = 0$, $z' = 0$ resp. und mit den Axen der bezüglichen Polarsysteme als den Coordinatenaxen x, y resp. x', y' wählt, so gehen die Gleichungen der Collineation in Art. 126, 1 über in die Form

$$zz' = a_{41}, \quad x'z = a_{22}x, \quad y'z = a_{33}y;$$
$$a_{22}xz' = a_{41}x', \quad a_{33}yz' = a_{41}y'$$

oder für Parameter $a = a_{41} : a_{22}$, $a' = a_{22}$, $b = a_{41} : a_{33}$, $b' = a_{33}$ und somit $aa' = bb' = a_{41}$

$$x'z = a'x, \quad y'z = b'y; \quad xz' = ax', \quad yz' = by'.$$

Hier sind a und b und resp. a', b' die Abstände der Scheitel der entsprechend gleichen Strahlbüschel in den Ebenen xz und yz resp. $x'z'$, $y'z'$ von den zugehörigen Fluchtlinien d. i. ihren Schnitten mit R resp. Q′, welche man in der Centralprojection erhält und benutzt.[68])

Mit $aa' = bb' = \lambda\lambda'$ gehen dann die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2} = 1 \text{ und } \frac{x'^2}{\lambda'^2 - a'^2} + \frac{y'^2}{\lambda'^2 - b'^2} + \frac{z'^2}{\lambda'^2} = 1$$

in einander über; sie repräsentiren entsprechende Flächen zweiten Grades der collinearen Räume und für λ, λ' als willkürliche Parameter zwei confocale Schaaren.

Die metrischen Besonderheiten der allgemeinen Collineation der Räume knüpfen sich leicht hieran: Lage der entsprechenden Geraden mit gleichen Reihen resp. Ebenenbüscheln, Lage der Kreise, denen Kreise entsprechen, etc.

Wie lautet der entsprechende Satz für die allgemeine Collineation ebener Systeme?

Wenn jene developpabeln Flächen in Paare von Kegeln zweiten Grades degeneriren, so lassen sich die collinearen Räume in centrische Lage überführen. (Vergl. „Kegelschn.“ Art. 392 B.)

239. Wir sahen, dass $\sigma + \lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0$ die Tangentialgleichung eines Systems von c o n f o c a l e n Flächen ist; wenn die Discriminante dieser Gleichung verschwindet, so stellt dieselbe somit einen der F o c a l k e g e l s c h n i t t e jener Flächen

dar. Man kann also die Tangentialgleichungen der Focalkegelschnitte einer gegebenen Fläche zweiten Grades auch finden, indem man λ aus der Gleichung

$$A_{44}\lambda^3 + (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{12}^2)\Delta\lambda^2 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\Delta^2\lambda + \Delta^3 = 0$$

bestimmt. Sei z. B.

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy + 10x + 4y + 6z + 4 = 0$$

die Gleichung der Fläche, so ist $\Delta = -972$ und die cubische Gleichung ist $162\lambda^3 + 99\lambda^2\Delta + 18\lambda\Delta^2 + \Delta^3 = 0$; ihre Factoren sind

$$3\lambda + \Delta, \quad 6\lambda + \Delta, \quad 9\lambda + \Delta,$$

d. h. es ist resp. $\lambda = 108,\ 162,\ 324$. Die durch 6 dividirte Tangentialgleichung der gegebenen Fläche ist $0 =$

$$\xi^2 - 8\eta^2 - 11\zeta^2 + 27\omega^2 + 26\eta\zeta + 46\zeta\xi + 34\xi\eta + 54\xi\omega - 54\eta\omega - 54\zeta\omega.$$

Man erhält somit die Tangentialgleichungen der drei Focalkegelschnitte der Fläche, indem man die ersten drei Glieder der letztgeschriebenen Gleichung verändert (weil $108:6 = 18$, $162:6 = 27$, $324:6 = 54$ ist) in

$$19\xi^2 + 10\eta^2 + 7\zeta^2, \quad 28\xi^2 + 19\eta^2 + 16\zeta^2, \quad 55\xi^2 + 46\eta^2 + 43\zeta^2$$

respective. Die Punktgleichungen derselben werden ebenso wie in Art. 226 gefunden als durch die drei Paare dargestellt (vergl. Art. 73 B.) $0 =$

$$2x - 2y + z + w,\ 11x^2 + 44y^2 + 11z^2 - 32yz + 2zx - 40xy = 0;$$
$$x + 2y + 2z + 5w,\ 67x^2 + 68y^2 + 83z^2 - 24yz - 62zx - 32xy = 0;$$
$$2x + y - 2z + w,\ 5x^2 - 3y^2 + 9z^2 + 2yz - 16zx + 2xy = 0.$$

240. Um in vier Ebenencoordinaten die Gleichung der Confocalen zu einer gegebenen Fläche zu finden, ist es nothwendig, die der Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ entsprechende Gleichung in solchen tetraedrischen Ebenencoordinaten zu bilden, d. h. die Gleichung, welche ausdrückt, dass der normale Abstand eines Punktes von jeder der Bedingung genügenden Ebene unendlich gross ist. (Vergl. Art. 246, p. 380.)

Repräsentiren $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ irgend vier nicht durch denselben Punkt gehende Ebenen, welchen bezogen auf ein System rectangulärer Axen die Gleichungen

$$X \cos A_1 + Y \cos B_1 + Z \cos C_1 = p_1, \text{ etc.}$$

entsprechen, so ist der Coefficient von X in $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$ gleich

$$\xi_1 \cos A_1 + \xi_2 \cos A_2 + \xi_3 \cos A_3 + \xi_4 \cos A_4,$$

und die Summe der Quadrate der Coefficienten von X, Y, Z wird

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos(x_2 x_3) - 2\xi_3\xi_1 \cos(x_3 x_1) - 2\xi_1\xi_2 \cos(x_1 x_2)$$
$$- 2\xi_1\xi_4 \cos(x_1 x_4) - 2\xi_2\xi_4 \cos(x_2 x_4) - 2\xi_3\xi_4 \cos(x_3 x_4),$$

wenn $(x_i x_k)$ den Winkel der Ebenen $x_i = 0$, $x_k = 0$ darstellt. Die Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit Null repräsentirt daher die Tangentialgleichung des imaginären Kreises im Unendlichen. Wenn man also die in den letzten Art. entwickelten Operationen unter Ersetzung des Trinoms $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ durch diesen allgemeinen Ausdruck wiederholt, so erhält man zuerst ohne Schwierigkeit die Bedingungen, unter denen die allgemeine Gleichung zweiten Grades in tetraedrischen Plancoordinaten ein Paraboloid oder eines der beiden gleichseitigen Hyperboloide des Art. 225 darstellt; ferner die Gleichungen der Orte von Punkten, von welchen aus Systeme von je drei zu einander rechtwinkligen Tangenten oder Tangentenebenen der Fläche möglich sind; die Gleichungen der Focalkegelschnitte, etc.

241. In Art. 225 ist bemerkt, dass die Bedingung, unter welcher für rechtwinklige Coordinaten zwei Ebenen

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0, \quad \xi' x + \eta' y + \zeta' z = 0$$

rechtwinklig zu einander sind, nämlich $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$, identisch ist mit der Bedingung, unter welcher dieselben Ebenen in Bezug auf den unendlich entfernten imaginären Kreis J zu einander harmonisch conjugirt sind. Daraus folgt, dass die Bedingung der Orthogonalität in tetraedrischen Coordinaten, als Bedingung der harmonischen Relation zu dem durch die allgemeine Gleichung dargestellten imaginären Kreise, in der Form erhalten wird

$$\xi_1' \{ + \xi_1 - \xi_2 \cos(x_1 x_2) - \xi_3 \cos(x_1 x_3) - \xi_4 \cos(x_1 x_4) \}$$
$$+ \xi_2' \{ - \xi_1 \cos(x_1 x_2) + \xi_2 - \xi_3 \cos(x_2 x_3) - \xi_4 \cos(x_2 x_4) \} + \text{etc.} = 0;$$

Sätze, welche sich auf orthogonale Ebenen beziehen, können daher projectivisch generalisirt werden, indem man an Stelle des imaginären unendlich fernen Kreises J irgend einen festen Kegelschnitt substituirt; an Stelle einer Geraden und einer Ebene, die zu einander rechtwinklig sind, erhält man so eine

Gerade und eine Ebene, welche die Ebene jenes festen Kegelschnittes in einem Punkte und einer Geraden schneiden, die harmonisch conjugirt sind in Bezug auf diesen Kegelschnitt, d. i. Pol und Polare in Bezug auf denselben. (Vergl. „Kegelschnitte" Art. 395.) Man kann die erhaltenen Theoreme sodann noch weiter generalisiren, indem man an Stelle des festen Kegelschnittes eine Fläche zweiten Grades setzt; die Relation der Orthogonalität zwischen einer Geraden und einer Ebene geht dann in die Beziehung einer Linie und einer Ebene über, bei welcher jene durch den Pol von dieser in Bezug auf die feste Fläche zweiten Grades geht. Jedoch sind Theoreme, welche man so erhält, damit allein nicht bewiesen, sondern nur eben gebildet.

B. Jede Tangentenebene einer Kugel ist normal zum Radius des Berührungspunktes.

Jeder ebene Schnitt einer Fläche zweiten Grades wird durch eine ihrer Tangentenebenen und durch die Gerade, welche den Berührungspunkt derselben mit dem Pol der Schnittebene in Bezug auf sie verbindet, in einer Geraden und einem Punkte geschnitten, welche in Bezug auf ihn Polare und Pol sind.

242. Die Tangentialgleichung einer Kugel für ein rechtwinkliges Coordinatensystem schreibt man am einfachsten als Ausdruck der Bedingung, unter welcher jede Tangentenebene vom Centrum constante Entfernung hat; also für r als den Halbmesser und x', y', z' als Coordinaten des Centrums in der Form

$$(\xi x' + \eta y' + \zeta z' + \omega)^2 = r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Wenn dann x_1', x_2', x_3', x_4' die Coordinaten des Centrums einer Kugel sind, so muss die Tangentialgleichung der Kugel in tetraedrischen Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sein

$$(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' + \xi_4 x_4')^2$$
$$= r^2\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos(x_1 x_2) - \text{etc.}\}.$$

Wenn die Kugel insbesondere die vier Ebenen $x_1 = 0$, etc. berührt, so müssen die Coefficienten von $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2$ verschwinden und die Tangentialgleichung einer solchen Kugel muss daher die Form haben

$$(\xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3 \pm \xi_4)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos(x_1 x_2) - \text{etc.}$$

Es existiren daher acht Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren. Indem man insbesondere alle Zeichen

positiv nimmt, erhält man die Tangentialgleichung der eingeschriebenen Kugel

$$\xi_1\xi_2 \cos^2\tfrac{1}{2}(x_1x_2) + \xi_2\xi_3 \cos^2\tfrac{1}{2}(x_2x_3) + \xi_3\xi_1 \cos^2\tfrac{1}{2}(x_3x_1)$$
$$+ \xi_1\xi_4 \cos^2\tfrac{1}{2}(x_1x_4) + \xi_2\xi_4 \cos^2\tfrac{1}{2}(x_2x_4) + \xi_3\xi_4 \cos^2\tfrac{1}{2}(x_3x_4) = 0.$$

Wenn man zu ihr die Reciprocalgleichung bildet und die Coefficienten der Gleichung durch a_{12}, a_{23}, a_{13}, a_{14}, a_{24}, a_{34} bezeichnet, so erhält man die entsprechende Punktgleichung in der Form, welche der in Art. 223 gegebenen entspricht.

243. Die Gleichung der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel kann am einfachsten in folgender Art erhalten werden. Seien h_1, h_2, h_3, h_4 die den vier Seitenflächen des Tetraeders $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ entsprechenden Höhen desselben, und erinnern wir, dass für ein ebenes Dreieck $A_1A_2A_3$ mit den Höhen h_1, h_2, h_3 die Gleichung des umgeschriebenen Kreises in der Form geschrieben werden kann

$$\frac{\overline{A_2A_3}^2}{h_2h_3}x_2x_3 + \frac{\overline{A_3A_1}^2}{h_3h_1}x_3x_1 + \frac{\overline{A_1A_2}^2}{h_1h_2}x_1x_2 = 0,$$

sobald die x_i als die senkrechten Abstände von den Seiten aufgefasst werden. Offenbar ist aber für einen Punkt in der Fläche $x_4 = 0$ das Verhältniss $x_1 : p_1$ dasselbe, ob wir x_1 und p_1 als Normalen auf die Ebene $x_1 = 0$ oder auf die Linie $x_1 = x_4 = 0$ betrachten. Wir sind also dazu geführt, die Gleichung der umgeschriebenen Kugel in der Form

$$\frac{\overline{A_2A_3}^2}{h_2h_3}x_2x_3 + \frac{\overline{A_3A_1}^2}{h_3h_1}x_3x_1 + \frac{\overline{A_1A_2}^2}{h_1h_2}x_1x_2 + \frac{\overline{A_1A_4}^2}{h_1h_4}x_1x_4 +$$
$$+ \frac{\overline{A_2A_4}^2}{h_2h_4}x_2x_4 + \frac{\overline{A_3A_4}^2}{h_3h_4}x_3x_4 = 0$$

zu schreiben, welche eine Fläche zweiten Grades bezeichnet, deren Schnitt mit jeder der Fundamentalebenen der dem entsprechenden Dreieck umschriebene Kreis ist.

Wenn man diese Gleichung in rechtwinklige Cartesische Coordinaten überführt, so ergeben sich die Coefficienten von x^2, y^2 und z^2 gleich der negativen Einheit. Wenn wir also die Coordinaten eines Punktes in dieselbe einsetzen, so erhalten wir das negative Quadrat der von ihm an die Kugel gehenden Tangente.

Die Gleichung einer beliebigen Kugel kann von der Gleichung der dem Fundamentaltetraeder umschriebenen Kugel nur in den

Gliedern vom ersten Grade abweichen, welche von der Form sein müssen

$$(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4)\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4}\right),$$

in welcher der zweite Factor gleich Null gesetzt die unendlich ferne Ebene repräsentirt. Wenn wir also zur Gleichung des letzten Art. das Product dieser beiden Factoren addiren und die Summe mit der allgemeinen Gleichung zweiten Grades identificiren, so erhalten wir durch Elimination der eingeführten Constanten die Bedingungen, unter denen die allgemeine Gleichung zweiten Grades $a_{11}x_1^2 +$ etc. $= 0$ in den x_i eine Kugel ausdrückt, wenn diese als die senkrechten Abstände von den Fundamentalebenen genommen werden; nämlich

$$\frac{a_{22}h_2^2 + a_{33}h_3^2 - 2a_{23}h_2h_3}{\overline{A_2A_3}^2} = \frac{a_{33}h_3^2 + a_{11}h_1^2 - 2a_{13}h_3h_1}{\overline{A_3A_1}^2}$$
$$= \frac{a_{11}h_1^2 + a_{22}h_2^2 - 2a_{12}h_1h_2}{\overline{A_1A_2}^2} = \frac{a_{11}h_1^2 + a_{44}h_4^2 - 2a_{14}h_1h_4}{\overline{A_1A_4}^2}$$
$$= \frac{a_{22}h_2^2 + a_{44}h_4^2 - 2a_{24}h_2h_4}{\overline{A_2A_4}^2} = \frac{a_{33}h_3^2 + a_{44}h_4^2 - 2a_{34}h_3h_4}{\overline{A_3A_4}^2}.$$

B. Das Quadrat der Entfernung zwischen den Mittelpunkten der eingeschriebenen und der umgeschriebenen Kugeln ist

$$D^2 = R^2 - r^2\left\{\frac{\overline{A_2A_3}^2}{h_2h_3} + \frac{\overline{A_3A_1}^2}{h_3h_1} + \frac{\overline{A_1A_2}^2}{h_1h_2} + \frac{\overline{A_1A_4}^2}{h_1h_4} + \frac{\overline{A_2A_4}^2}{h_2h_4} + \frac{\overline{A_3A_4}^2}{h_3h_4}\right\}.$$

244. Es ist im Art. 228 gezeigt worden, dass man in der Bedingung, unter welcher die Ebene $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$ die Fläche $U + \lambda U' = 0$ berührt, eine Gleichung dritten Grades in λ erhält, deren Coefficienten die Invarianten Δ, Δ', Θ, Θ' der Schnitte jener Ebene mit den beiden Flächen $U = 0$ und $U' = 0$ sind. Wenn man nun für eine Curve zweiten Grades und das Paar der unendlich fernen imaginären Kreispunkte ihrer Ebene die Invarianten Θ und Θ' bildet, so ist $\Theta = 0$ die Bedingung, unter welcher der betrachtete Kegelschnitt eine Parabel und $\Theta' = 0$ die Bedingung, unter welcher er eine gleichseitige Hyperbel ist; es ist endlich $\Theta'^2 = 4\Theta$ die Bedingung, unter welcher der Kegelschnitt durch jeden der zwei imaginären Kreispunkte im Unendlichen seiner Ebene geht (vergl. „Kegelschnitte", Art. 380), d. i. unter deren Erfüllung bei reellen Coefficienten er ein Kreis ist.

Wenn wir diese Principien auf die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in rechtwinkligen Coordinaten und auf die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ des imaginären Kreises J im Unendlichen anwenden, so erhalten wir als Bedingung $\Theta = 0$, unter welcher ein ebener Schnitt eine Parabel ist,

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\xi^2 + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)\eta^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\zeta^2$$
$$+ 2(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\eta\zeta + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\zeta\xi$$
$$+ 2(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})\xi\eta = 0;$$

und für die Bedingung $\Theta' = 0$, unter welcher derselbe eine gleichseitige Hyperbel ist,

$$(a_{22} + a_{33})\xi^2 + (a_{33} + a_{11})\eta^2 + (a_{11} + a_{22})\zeta^2$$
$$- 2a_{23}\eta\zeta - 2a_{13}\xi\zeta - 2a_{12}\xi\eta = 0;$$

während $\Theta'^2 = 4\Theta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ die Bedingung ist, unter welcher die Ebene durch einen der vier Punkte geht, die im Unendlichen einer jeden Kugel mit der Fläche zweiten Grades gemeinsam sind.

245. Wir wissen aus der Theorie der Kegelschnitte (Art. 382), dass für $\Sigma = 0$ als die Gleichung eines Kegelschnittes in Liniencoordinaten und $\Sigma' = 0$ als die entsprechende Gleichung der Kreispunkte im Unendlichen seiner Ebene $\Sigma + \lambda\Sigma' = 0$ die Gleichung eines confocalen Kegelschnittes in Liniencoordinaten ist.

Nun ist die Tangentialgleichung des Punktepaares, in welchem der imaginäre Kreis $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ von der Ebene

$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z + \omega' w = 0$$

geschnitten wird,

$$(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2 = 0,$$

und die Tangentialgleichung aller zu dem Schnitt der Ebene

$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z + \omega' w = 0$$

mit der Fläche

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 w^2 = 0$$

confocalen Kegelschnitte ist daher

$$\begin{aligned}&\xi^2\{(a_3a_4\eta'^2+a_4a_2\zeta'^2+a_2a_3\omega'^2)+\lambda(\eta'^2+\zeta'^2)\}\\
&+\eta^2\{(a_3a_4\xi'^2+a_4a_1\zeta'^2+a_1a_3\omega'^2)+\lambda(\xi'^2+\zeta'^2)\}\\
&+\zeta^2\{(a_2a_4\xi'^2+a_4a_1\eta'^2+a_1a_2\omega'^2)+\lambda(\xi'^2+\eta'^2)\}\\
&+\omega^2(a_2a_3\xi'^2+a_3a_1\eta'^2+a_1a_2\zeta'^2)-2(a_1a_4+\lambda)\eta'\zeta'\eta\zeta\\
&-2(a_2a_4+\lambda)\zeta'\xi'\zeta\xi-2(a_3a_4+\lambda)\xi'\eta'\xi\eta\\
&-2a_2a_3\xi'\omega'\xi\omega-2a_3a_1\eta'\omega'\eta\omega-2a_1a_2\zeta'\omega'\zeta\omega=0.\end{aligned}$$

Wenn man nach den gewöhnlichen Regeln die Reciproke dieser Gleichung bildet, so erhält man sie als das Product des Quadrats von $(\xi'x+\eta'y+\zeta'z+\omega'w)$ in

$$\{\sigma^2+\lambda\sigma\Theta'+\lambda^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\Theta\},$$

wo $\sigma=0$ die Bedingung ausdrückt, unter der die Ebene $(\xi', \eta', \zeta', \omega')$ die gegebene Fläche zweiten Grades berührt, und Θ', Θ dieselbe Bedeutung haben, wie im letzten Artikel. Indem man den bezeichneten zweiten Factor gleich Null setzt, erhält man diejenigen zwei Werthe von λ, welche den Tangentialgleichungen der Brennpunkte des fraglichen ebenen Schnittes entsprechen.

B. 1. Man soll die Brennpunkte des Schnittes von

$$4x^2+y^2-4z^2+1=0$$

mit $x+y+z=0$ bestimmen.

Die Gleichung für λ wird gefunden als $3\lambda^2+2\lambda=16$, so dass $\lambda=2$ oder $=-\frac{8}{3}$ ist. Die Gleichung des Artikels für $\xi'=\eta'=\zeta'=1$ und die gegebenen Werthe von a_1, a_2, a_3, a_4 ist

$$\begin{aligned}\xi^2(-3+2\lambda)+2\lambda\eta^2+(5+2\lambda)\zeta^2-16\omega^2-2(4+\lambda)\,\eta\zeta\\
-2(1+\lambda)\zeta\xi+2(4-\lambda)\xi\eta=0,\end{aligned}$$

also für $\lambda=2$ speciell $(\xi+2\eta-3\zeta)^2-16\omega^2=0$, d. h. die Coordinaten der Brennpunkte respective gleich $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{2}{4}$, $\mp\frac{3}{4}$. Der andere Werth von λ giebt die imaginären Brennpunkte.

B. 2. Man soll den Ort der Brennpunkte aller Centralschnitte der Fläche $ax^2+by^2+cz^2+1=0$ bestimmen. Indem man $\omega'=0$ setzt, wird die Gleichung für λ gefunden wie folgt:

$$\frac{\xi'^2}{a+\lambda}+\frac{\eta'^2}{b+\lambda}+\frac{\zeta'^2}{c+\lambda}=0.$$

Mit Hilfe dieser Relation wird die Tangentialgleichung der Brennpunkte auf

$$\left(\frac{\xi\xi'}{a+\lambda}+\frac{\eta\eta'}{b+\lambda}+\frac{\zeta\zeta'}{c+\lambda}\right)^2-\frac{bc\xi'^2+ca\eta'^2+ab\zeta'^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}\,\omega^2=0$$

reducirt, und die Coordinaten der Brennpunkte sind daher

$$x = \frac{\xi'}{a+\lambda},\ y = \frac{\eta'}{b+\lambda},\ z = \frac{\zeta'}{c+\lambda},\ w^2 = \frac{bc\xi'^2 + ca\eta'^2 + ab\zeta'^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}.$$

Wenn man aus den ersten drei Gleichungen für ξ', η', ζ' auflöst und in die Gleichung für λ substituirt, so erhält man

$$(ax^2 + by^2 + cz^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0;$$

die Auflösung dieser letzten Gleichung für λ und die Substitution in den Ausdruck für w^2 giebt endlich die Gleichung des Ortes

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,[bcx^2\{(a-b)y^2 + (a-c)z^2\}^2 +$$
$$cay^2\{(b-c)z^2 + (b-a)x^2\}^2 + abz^2\{(c-a)x^2 + (c-b)y^2\}^2]$$
$$= w^2\{(a-b)y^2 + (a-c)z^2\}\times$$
$$\{(b-c)z^2 + (b-a)x^2\}\{(c-a)x^2 + (c-b)y^2\};$$

der Ort ist also eine Fläche achter Ordnung, die das Centrum der Fläche zweiten Grades zu einem vielfachen Punkte hat. Die linke Seite der Gleichung kann in der einfacheren Form

$$(x^2 + y^2 + z^2)(ax^2 + by^2 + cz^2)\{a(b-c)^2y^2z^2 + b(c-a)^2z^2x^2$$
$$+ c(a-b)^2x^2y^2\}$$

geschrieben werden. Die Tangenten der Curve im vielfachen Mittelpunkte bilden drei Paare und liegen in den cyklischen Diametralebenen der Fläche zweiten Grades, von denen bekanntlich nur ein Paar reell ist. Die Axen der Fläche zweiten Grades sind doppelte und isolirte Gerade in der Fläche und sie enthält überdies noch vier andere imaginäre Gerade. Jede cyklische Ebene schneidet sie nach einer doppelten und zwei dreifachen geraden Linien. Die Fläche hat drei asymptotische Kegel, nämlich einen aus dem Centrum über dem imaginären unendlich entfernten Kreise J, den zweiten als den Asymptotenkegel der Fläche zweiten Grades, und den dritten als einen Kegel vierter Ordnung, für welchen die Axen Doppelerzeugende sind, die beiden letzten reell doppelt nur in dem Falle der Hyperboloide.[68])

Man kann die Gleichung dieses Ortes im Coordinatensystem des Art. 174 unmittelbar bilden[69]) auf Grund des Satzes, dass für den Brennpunkt eines ebenen Schnittes der Fläche zweiten Grades ihr von ihm ausgehender Tangentenkegel die Ebene zur cyklischen Ebene hat.

Ist nämlich (Art. 187) die Gleichung des Tangentenkegels

$$\frac{x^2}{a^2 - a'^2} + \frac{y^2}{a^2 - a''^2} + \frac{z^2}{a^2 - a'''^2} = 0,$$

so ist ein Paar seiner cyklischen Ebenen

$$\frac{a'^2 - a''^2}{a^2 - a'^2}\, x^2 = \frac{a''^2 - a'''^2}{a^2 - a'''^2}\, z^2.$$

Wir können aber für Diametralschnitte, weil die Coordinaten des Centrums dieser Gleichung genügen, x durch p' und z durch p''' (Art. 179) ersetzen und erhalten

$$\frac{a'^2 b'^2 c'^2}{a^2 - a'^2} = \frac{a'''^2 b'''^2 c'''^2}{a^2 - a'''^2}.$$

Mittelst der cubischen Gleichung des Art. 172, für die man $a^2 - a'^2 = \lambda^2$, $a^2 - a'''^2 = \nu^2$ und μ^2 als die dritte Wurzel nimmt, folgt hieraus für $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \quad \mu^2 = \frac{\varrho^2 S}{S+1};$$

die Substitution dieses Werthes von μ^2 in die cubische Gleichung giebt die Gleichung achten Grades in x, y, z wie oben. Man sieht leicht, dass auch

$$\frac{a''^2 b''^2 c''^2}{a^2 - a''^2} = \frac{a'''^2 b'''^2 c'''^2}{a^2 - a'''^2} \text{ ist.}$$

B. 3. Man soll den Ort der Brennpunkte der zu einer Axe der Fläche (z. B. $\xi' = 0$) parallelen Schnitte bestimmen.

Die Gleichung, welche in diesem Falle in Factoren zerfallen muss, ist

$$\begin{aligned}&\xi^2\{(c+\lambda)\eta'^2 + (b+\lambda)\zeta'^2 + bc\omega'^2\} + \eta^2\{(a+\lambda)\zeta'^2 + ac\omega'^2\}\\ &+ \zeta^2\{(a+\lambda)\eta'^2 + ab\omega'^2\} + \omega^2 a(c\eta'^2 + b\zeta'^2) - 2(a+\lambda)\eta'\zeta'\eta\zeta\\ &\qquad - 2ca\eta'\omega'\eta\omega - 2ab\zeta'\omega'\zeta\omega = 0;\end{aligned}$$

und die Bedingung der Zerlegbarkeit für dieselbe ist

$$(a+\lambda)(b\zeta'^2 + c\eta'^2) + abc\omega'^2 = 0.$$

Dieser Bedingung unterworfen wird die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{bc(a+\lambda)}\left\{(c+\lambda)\eta'^2 + (b+\lambda)\zeta'^2 + bc\omega'^2\right\} = \left\{\frac{\eta\eta'}{b} + \frac{\zeta\zeta'}{c} + \frac{a\omega\omega'}{a+\lambda}\right\}^2,$$

so dass $\eta' = by$, $\zeta' = cz$, $a\omega' = (a+\lambda)w$ ist, und durch Substitution dieser Werthe in die Bedingungsgleichung erhalten wird $(a+\lambda)w^2 + acz^2 + aby^2 = 0$. Man bildet also endlich durch Substitution in

$$bc(a+\lambda)x^2 = (c+\lambda)\eta'^2 + (b+\lambda)\zeta'^2 + bc\omega'^2$$

die Gleichung des verlangten Ortes in der Form

$$(by^2 + cz^2)\{b^2(a-b)y^2 + c^2(a-b)z^2 - abcx^2\}$$
$$= w^2\{b^2(a-c)y + c^2(a-b)z^2\}.$$

Offenbar können die Methoden dieser letzten Artikel direct auf Gleichungen in tetraedrischen Coordinaten angewendet werden.

246. Die in den Art. 383 f. der „Kegelschn." entwickelte Theorie der metrischen Relationen überträgt sich naturgemäss aus der Ebene in den Raum. Alles Messen ist Vergleichen mit einer geeigneten Einheit; eine solche bietet allein eine Fläche dar, ein Gebilde von zweifach unendlicher Mächtigkeit als Punkt- und Ebenengebilde und von dreifach unendlicher als Gebilde aus Geraden. Der absolute oder Einheitkegelschnitt fordert eine absolute oder Einheitfläche zweiten Grades. Des Näheren führt die Involution des Polarsystems der Absoluten zur Bildung der metrischen Begriffe. Jeder Punkt hat in Bezug auf sie eine bestimmte Polarebene, jede Ebene einen Pol — absolute Polarebene und absoluter Pol resp. —, jede Gerade hat eine absolute Polargerade oder absolut-conjugirte. Jede Gerade als Punktreihe bestimmt mit ihr zwei Schnittpunkte und für irgend zwei Punkte in derselben, die von diesen verschieden sind, ist die Distanz durch das Doppelverhältniss bestimmt, welches sie mit jenen liefern (a. a. O. Art. 387); jede Gerade als Ebenenbüschel zwei Tangentenebenen, deren Doppelverhältniss mit irgend zwei Ebenen ihres Büschels die Distanz d. i. den Winkel derselben liefert.

Weil bei Flächen höherer Art Ordnung und Klasse im Allgemeinen verschieden sind, so erhellt schon hier, dass der Metrik der Charakter der Dualität, der sonst in der Geometrie wirksam ist, nur durch die getroffene Wahl gegeben werden kann, welche zugleich die grösstmögliche Einfachheit gewährt. Das Folgende begründet dies noch weiter und durchschlagender durch die Entwickelung der metrischen Fundamentalconstructionen für die sämmtlichen Fälle von Elementenpaaren. Die Definition des Kreises a. a. O. (Art. 390) giebt die Definition der Kugel als einer die absolute Fläche nach einem ebenen Querschnitt berührenden Fläche zweiten Grades; der Pol dieser Ebene in Bezug auf diese ist das Centrum der Kugel.

Sei $\Phi_{xx} \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ und $\Phi_{\xi\xi} \equiv \Sigma \alpha_{ik} \xi_i \xi_k = 0$ die Gleichung der absoluten Fläche in Punkt- und respective Ebenen-

coordinaten, so dass für die Abkürzungen ihrer Discriminanten

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & .. & a_{14} \\ \\ a_{14}, & .. & a_{44} \end{vmatrix} \equiv a, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & .. & \alpha_{14} \\ \vdots \\ \alpha_{14}, & .. & \alpha_{44} \end{vmatrix} \equiv \alpha,$$

und

$$a\alpha = 1,$$

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{a} \frac{da}{da_{ik}}, \quad a_{ik} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\alpha_{ik}}$$

sind; dass ferner die Coordinaten x_i eines Pols P und die ξ_i seiner Polarebene Π in Bezug auf die absolute Fläche durch die Relationen

$$\xi_i = \frac{1}{2} \frac{d\Phi_{xx}}{dx_i}, \quad x_i = \frac{1}{2} \frac{d\Phi_{\xi\xi}}{d\xi_i}$$

verbunden sind, welche nach dem Euler'schen Satze geben

$$\Phi_{xx} = \Phi_{\xi\xi} = \Sigma x_i \xi_i,$$

während

$$\Phi_{xx'} \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k' = 0, \quad \Phi_{\xi\xi'} \equiv \Sigma \alpha_{ik} \xi_i \xi_k' = 0$$

für P' respective Π' als fest und P, Π beweglich die Polarebene von P' und den Pol von Π' repräsentiren, sodass für zwei Punkte P, P' und ihre conjugirten Ebenen Π, Π'

$$\Phi_{xx'} = \Phi_{\xi\xi'} = \Sigma x_i \xi_i' = \Sigma \xi_i x_i'$$

ist. Mittelst dieser Covarianten der absoluten Fläche drücken sich die metrischen Relationen aus. Wir betrachten die zwischen den Paaren derselben entstehenden. Die Distanz von zwei Punkten respective Ebenen als der mit $\frac{1}{2i}$ multiplicirte Logarithmus des Doppelverhältnisses, das von ihnen mit den beiden Elementen gebildet wird, die die gemeinschaftliche Gerade mit der absoluten Fläche gemein hat, ist gegeben durch

$$\cos^2(PP') = \frac{\Phi_{xx'}^2}{\Phi_{xx}\Phi_{x'x'}}, \quad \sin^2(PP') = \frac{\Phi_{xx}\Phi_{x'x'} - \Phi_{xx'}^2}{\Phi_{xx}\Phi_{x'x'}}$$

und

$$\cos^2(\Pi\Pi') = \frac{\Phi_{\xi\xi'}^2}{\Phi_{\xi\xi}\Phi_{\xi'\xi'}}, \quad \sin^2(\Pi\Pi') = \frac{\Phi_{\xi\xi}\Phi_{\xi'\xi'} - \Phi_{\xi\xi'}^2}{\Phi_{\xi\xi}\Phi_{\xi'\xi'}}.$$

Mit $\Phi_{xx'} = 0$ respective $\Phi_{\xi\xi'} = 0$, d. h. für Punkte und Ebenen, welche in Bezug auf die absolute Fläche einander conjugirt sind, haben wir den Quadranten als Einheit der Distanz oder Distanz

$\frac{1}{2}\pi$. Mit $\Phi_{xx}\Phi_{x'x'} = \Phi^2_{xx'}$ etc. ist die Distanz Null, d. h. für Punkte und Ebenen, deren gemeinsame Gerade die absolute Fläche berührt; sie ist unendlich gross, wenn eines der beiden Elemente der absoluten Fläche angehört.

Daher heisst eine Gerade normal zu einer Ebene, wenn sie durch den absoluten Pol von dieser geht, und die Entfernung eines Punktes P von einer Ebene Π' wird in der Geraden von ihm nach dem Pol derselben bis zum Schnittpunkte mit ihr gemessen; man hat mit analogen Grenzwerthbestimmungen

$$\cos^2(P\Pi') = \frac{\Phi_{\xi\xi}}{\Phi_{xx}\Phi_{\xi'\xi'}}, \quad \sin^2(P\Pi') = \frac{\{\Sigma x_i \xi_i'\}^2}{\Phi_{xx}\Sigma_{\xi'\xi'}}$$

und

$$(\Pi\Pi') = (PP'), \quad (P\Pi') = (\Pi P')$$

für Π, Π' als die Ebenen, welche zu den Punkten P, P' conjugirt sind. Für einen Kegelschnitt als absolute Fläche ist der absolute Pol jeder Ebene in der Ebene des Absoluten enthalten, oder unendlich fern; die Normalen der Ebene werden parallel. In jedem Falle bilden die Normalen einer Ebene, welche eine Gerade schneiden, wieder eine Ebene.

Eine Ebene heisst normal zu einer Geraden, wenn sie die in Bezug auf die absolute Fläche zu derselben polare Gerade enthält; da diese im Falle eines absoluten Kegelschnittes eine Gerade in der Ebene desselben, nämlich die Polare ihres unendlich fernen Punktes in Bezug auf ihn, und also unendlich fern ist, so sind dann die Normalebenen einer Geraden parallel.

B. 1. Wenn die Absolute in der Gleichungsform

$$\Phi_{xx} \equiv x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = 0$$

vorausgesetzt wird, so dass $\Phi_{\xi\xi} \equiv \xi_1{}^2 + \cdots$ und

$$\Phi_{pp} \equiv p_{12}^2 + p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2$$

und $\Phi_{\pi\pi} \equiv \pi_{12}^2 + \cdots$ sind, so erlangen die entwickelten Distanzausdrücke ihre einfachste allgemeine Gestalt. Denn dann ist die absolute Polarebene von x_i die Ebene x_i und der absolute Pol von ξ_i der Punkt ξ_i, die absolute Conjugirte von p_{ik} die Gerade p_{lm}; zwei Punkte x_i, x_i' sind absolut conjugirt oder normal für $x_1x_1' + \cdots = 0$, etc.; die Gerade p_{ik} ist normal zur Ebene ξ_i, wenn sie den Punkt ξ_i enthält, und dual. Auch sind zwei Gerade p_{ik}, p_{ik}', die sich schneiden, normal zu einander, wenn noch $p_{12}p_{12}' + \cdots = 0$ ist.

B. 2. Das Distanz-Cosinusquadrat zweier Punkte wird

$$\frac{(x_1 x_1'^2 + \cdots)}{(x_1^2 + \cdots)(x_1'^2 + \cdots)}$$

und das zweier Ebenen analog mit den ξ_i, ξ_i', indess bei den Distanz-Sinusquadraten der Zähler in die Summe der Quadrate der Coordinaten der gemeinsamen Geraden übergeht. Die Distanz des Punktes x_i von der Ebene ξ_i' ist als das Complement der Distanz des x_i von dem Punkte ξ_i als absolutem Pol der Ebene bestimmt und ebenso als Complement der Distanz der ξ_i' von der absoluten Polarebene x_i des Punktes x_i.

B. 3. Für das Abstands-Cosinusquadrat eines Punktes x_i resp. einer Ebene ξ_i von der Geraden p_{ik} erhält man die Ausdrücke

$$\frac{(p_{31}^2 + p_{12}^2 + p_{14}^2)\, x_2^1 + \cdots}{\Phi_{xx}\Phi_{pp}} \quad \text{resp.} \quad \frac{(p_{24}^2 + p_{34}^2 + p_{23}^2)\, \xi_1^2 + \cdots}{\Phi_{\xi\xi}\Phi_{pp}},$$

deren Zähler die linken Seiten der Gleichungen des die Absoluten berührenden Ebenenpaares durch die absolut-conjugirte p_{lm} der Geraden und reciprok bezeichnen.

247. Sind allgemein p_{ik} und π_{ik} die Coordinaten einer Geraden g zwischen zwei Punkten oder Ebenen, so ist die Gleichung der absoluten Fläche in diesen

$$\Phi_{pp} \equiv \Sigma \frac{1}{\alpha} \frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il} d\alpha_{km}} p_{ik} p_{lm} = 0, \quad \Phi_{\pi\pi} \equiv \Sigma \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d a_{il} d a_{km}} \pi_{ik}\pi_{lm} = 0.$$

In den Zählern der Sinusquadrate der Distanzen von zwei Punkten resp. zwei Ebenen erkennen wir nach Art. 79, 82 die Liniencoordinatengleichungen der absoluten Fläche in p_{ik} resp. π_{ik}. Wenn man zu zwei Geraden g, g' von allgemeiner Lage die in Bezug auf die absolute Fläche zu ihnen polaren g^*, g'^* hinzufügt, so sind die beiden Transversalen t und t_1 dieser vier Geraden zu einander gleichfalls polar*); ihre Schnittpunkte und Verbindungsebenen mit jenen tg, tg', t_1g, t_1g' seien durch P und Π_1, P' und Π_1', P_1 und Π, P_1' und Π' respective bezeichnet, sodass man hat

*) Uebrigens nicht nur in Bezug auf die eine Fläche zweiten Grades, sondern in Bezug auf alle durch ein windschiefes Vierseit gehenden Flächen, also die Flächen eines Büschels, das zugleich eine Schaar ist. Denn jenes Polarsein zweier Linienpaare zählt für acht lineare Bedingungen für die x_i wie die ξ_i. Und in jeder Transversalen bestimmen die beiden Paare eine Polinvolution, deren Doppelpunkte Ecken des Vierseits sind.

$$(PP') = (\Pi\Pi'), \quad (P_1 P_1') = (\Pi_1 \Pi_1'),$$

und diese Grössen als Distanzen der Geraden g, g' oder als ihre gemeinsamen Normalen benennen kann. Im Falle eines absoluten Kegelschnittes liegen die polaren Geraden g^*, g'^* in der Ebene des letztern und die gemeinsamen Transversalen derselben mit den gegebenen Geraden gehen über in die in dieser Ebene liegende Transversale von g und g', die Verbindungslinie der Richtungen der letzteren oder die Stellung ihrer Parallelebenen, in welcher der Richtungsunterschied oder der Winkel von g mit g' gemessen wird — und in die durch den Schnittpunkt von g^* mit g'^* gehende Transversale von g und g', die als die gemeinsame Normale im gewöhnlichen Sinne bezeichnet wird, und in der das zwischen beiden Geraden enthaltene Segment die kürzeste Distanz derselben heisst.

Das Product beider Distanzen bezeichnen wir als das Moment der Geraden g und g' durch M, wenn die Sinus desselben genommen werden; das Product der Cosinus wird analog das Comoment genannt und sei als CM geschrieben.

Man hat dann zunächst[70])

$$M^2(g, g') = \frac{\Phi_{xx}\Phi_{x'x'} - \Phi^2_{xx'}}{\Phi_{xx}\Phi_{x'x'}} \cdot \frac{\Phi_{x''x''}\Phi_{x'''x'''} - \Phi^2_{x''x'''}}{\Phi_{x''x''}\Phi_{x'''x'''}},$$

$$CM^2(g, g') = \frac{\Phi^2_{xx'}\Phi^2_{x''x'''}}{\Phi_{xx}\Phi_{x'x'}\Phi_{x''x''}\Phi_{x'''x'''}};$$

weil nun nach der Construction

$$\Phi_{xx''} = 0, \; \Phi_{xx'''} = 0, \; \Phi_{x'x''} = 0, \; \Phi_{x'x'''} = 0$$

sind, so hat man für p_{ik} und p'_{ik} als die Coordinaten der Geraden g, g'

$$\Phi_{xx}\Phi_{x''x''} - \Phi^2_{xx''} = \Phi_{xx}\Phi_{x''x''} = \Sigma \frac{1}{\alpha} \frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il}\, d\alpha_{km}} p_{ik} p_{lm},$$

$$\Phi_{x'x'}\Phi_{x'''x'''} - \Phi^2_{x'x'''} = \Phi_{x'x'}\Phi_{x'''x'''} = \Sigma \frac{1}{\alpha} \frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il}\, d\alpha_{km}} p'_{ik} p'_{lm},$$

$$\Phi_{xx'}\Phi_{x''x'''} - \Phi_{xx'''}\Phi_{x'x''} = \Phi_{xx'}\Phi_{x''x'''} = \Sigma \frac{1}{\alpha} \frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il}\, d\alpha_{km}} p_{ik} p'_{lm}.$$

Auch reducirt sich die Determinante

$$\Sigma \pm \Phi_{xx}\Phi_{x'x'}\Phi_{x''x''}\Phi_{x'''x'''}$$

durch das Verschwinden der oben aufgezählten Elemente auf

$$(\Phi_{xx}\Phi_{x'x'}-\Phi^2_{xx'})(\Phi_{x''x''}\Phi_{x'''x'''}-\Phi^2_{x''x'''})=\frac{1}{\alpha}\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1', & x_2', & x_3', & x_4' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'', & x_4'' \\ x_1''', & x_2''', & x_3''', & x_4''' \end{vmatrix}^2$$

(vergl. Art. 57)

$$=\frac{1}{\alpha}\{p_{12}p_{34}'+p_{12}'p_{34}+p_{23}p_{14}'+p_{23}'p_{14}+p_{31}p_{24}'+p_{31}'p_{24}\}^2$$

und man erhält daher

$$M^2(g,g')=\frac{1}{\alpha}\frac{\{p_{12}p_{34}'+p_{12}'p_{34}+\cdots\}^2}{\Sigma\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il}d\alpha_{km}}p_{ik}p_{lm}\;\Sigma\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il}d\alpha_{km}}p_{ik}'p_{lm}'},$$

$$CM^2(g,g')=\frac{\left\{\Sigma\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il}d\alpha_{km}}p_{ik}p_{lm}'\right\}^2}{\Sigma\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il}d\alpha_{km}}p_{ik}p_{lm}\;\Sigma\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{d\alpha_{il}d\alpha_{km}}p_{ik}'p_{lm}'}.$$

Mit Einführung der Zeichen

$$\Phi_{pp'}=\Sigma\begin{vmatrix} a_{il}, & a_{im} \\ a_{kl}, & a_{km}\end{vmatrix}p_{ik}p_{lm}', \quad \Phi_{\pi\pi'}=\Sigma\begin{vmatrix} \alpha_{il}, & \alpha_{im} \\ \alpha_{kl}, & \alpha_{km}\end{vmatrix}\pi_{ik}\pi_{lm}'$$

kann man endlich die den Ausdrücken der Distanzen (PP'), etc. analogen Formen schreiben

$$M^2(g,g')=\frac{(p_{12}p_{34}'+\cdots)^2}{\alpha\,\Phi_{pp}\Phi_{p'p'}}=\frac{(\pi_{12}\pi_{34}'+\cdots)^2}{\alpha\,\Phi_{\pi\pi}\Phi_{\pi'\pi'}},$$

$$CM^2(g,g')=\frac{\Phi^2_{pp'}}{\Phi_{pp}\Phi_{p'p'}}=\frac{\Phi^2_{\pi\pi'}}{\Phi_{\pi\pi}\Phi_{\pi'\pi'}}.$$

Das Moment verschwindet, wenn die Geraden einander schneiden, das Comoment wenn jede die absolut polare der andern trifft. Für g' als fest ist ferner $\Phi_{p'p'}=0$ der Complex der zu ihr normalen Geraden oder ihr Polarcomplex in Bezug auf $\Phi_{pp}=0$, wie wir uns weiterhin ausdrücken werden.

Wir fügen eine mehr constructive Ableitung hinzu. Sind m und n die gegebenen Geraden, von den beiden einander absolut polaren Transversalen in $AC=\delta$ resp. $BD=\theta$ geschnitten (jede die Lineardistanz in ihrer Geraden und die Ebenendistanz an der andern), so denken wir in A die zu m und δ und in C die zu n und δ zugleich normale Gerade resp. i und k und betrachten die zu einander normalen Ebenen $m\delta$

oder Π und mi oder Ω, und ebenso die gleichfalls normalen $n\delta$ oder Π' und nk oder Ω', sodass auch die Distanzen $\Pi\Omega'$ und $\Pi'\Omega$ gleich $\frac{1}{2}\pi$ und $\Pi\Pi' = \theta$, $\Omega\Omega' = \delta$ sind. Seien l_i, λ_i, l_i', λ_i' die Coordinaten der Ebenen Π, Ω, Π', Ω' resp., sodass die p_{ik} und die p_{ik}' die binären Verbindungen der l und λ resp. der l' und λ' sind, und nach den bemerkten Orthogonalitäten die Summen $l_1\lambda_1 + \cdots$, $l_1'\lambda_1' + \cdots$, $l_1\lambda_1' + \cdots$, $l_1'\lambda_1 + \cdots$ verschwinden, während die Winkeldistanzen $\Pi\Pi'$ und $\Omega\Omega'$ durch

$$\cos\delta = \frac{\lambda_1\lambda_1' + \cdots}{\sqrt{\lambda_1^2 + \cdots}\sqrt{\lambda_1'^2 + \cdots}}, \qquad \cos\theta = \frac{l_1 l_1' + \cdots}{\sqrt{l_1^2 + \cdots}\sqrt{l_1'^2 + \cdots}}$$

ausgedrückt werden. Man findet aber auch

$$p_{23}p_{23}' + \cdots = (l_1 l_1' + \cdots)(\lambda_1\lambda_1' + \cdots) - (l_1\lambda_1' + \cdots)(l_1'\lambda_1 + \cdots)$$

und somit durch Verschwinden des letzten Theiles

$$= \cos\delta\cos\theta\sqrt{l_1^2 + \cdots}\sqrt{l_1'^2 + \cdots}\sqrt{\lambda_1^2 + \cdots}\sqrt{\lambda_1'^2 + \cdots};$$

ebenso

$$p_{23}^2 + \cdots = (l_1^2 + \cdots)(\lambda_1^2 + \cdots), \; p_{23}'^2 + \cdots = (l_1'^2 + \cdots)(\lambda_1'^2 + \cdots),$$

sodass

$$\frac{p_{23}p_{23}' + \cdots\cdots}{\sqrt{p_{23}^2 + \cdots\cdots}\sqrt{p_{23}' + \cdots\cdots}} = \cos\delta\cos\theta$$

das Comoment M' und durch Ersetzung von δ und θ durch $\frac{1}{2}\pi - \delta$, $\frac{1}{2}\pi - \theta$ resp. und der einen Geraden durch ihre absolut polare

$$\frac{p_{23}p_{14}' + \cdots\cdots}{\sqrt{p_{23}^2 + \cdots\cdots}\sqrt{p_{23}'^2 + \cdots\cdots}} = \sin\delta\sin\theta$$

das Moment M wird.

Wäre p_{ik}^0 eine der gemeinsamen Orthogonalen AC resp. BD, so müssten sie die vier Bedingungsgleichungen befriedigen, welche ihr Schneiden mit m und n und ihren absolut Polaren, also mit p_{ik}, p_{ik}' und mit p_{lm}, p_{lm}' ausdrücken und die p_{ik}^0 sind aus ihnen unter Zuziehung der Identität der Strahlencoordinaten im Allgemeinen zweideutig bestimmt. (Vergl. 58, 4.) — Auf die wichtige Ausnahme kommen wir im folgenden Art. zurück.

B. 1. Für den Ort der Punkte P in constanter Entfernung r von P' ist

$$\cos^2 r\,\Phi_{xx}\,\Phi_{x'x'} = \Phi_{xx'}^2;$$

er ist also eine Fläche zweiten Grades, welche die absolute Fläche längs ihres Schnittes mit der Polarebene von P' berührt; wie die Kugel vom Centrum P'.

B. 2. Der Ort der Punkte P, deren Distanzen von zwei festen Ebenen Sinus von constantem Product k^2 haben, ist eine Fläche zweiten Grades; aus

$$\sin(P\Pi')\sin(P\Pi'') = k^2 = \frac{\Phi_{xx'}\Phi_{xx''}}{\Phi_{xx}\sqrt{\Phi_{x'x'}\Phi_{x''x''}}}$$

folgt ihre Gleichung mit Einführung der Coordinaten der Ebenen

$$k^2\Phi_{xx}\sqrt{\Phi_{\xi'\xi'}\Phi_{\xi''\xi''}} = \Sigma x_i\xi_i' \cdot \Sigma x_i\xi_i'',$$

sie schneidet also die absolute Fläche in zwei Kegelschnitten in jenen Ebenen Π', Π'' und berührt sie in zwei Punkten ihrer Schnittlinie, und sie hat mit ihr zwei Berührungskegel zweiten Grades aus Punkten der zu $\Pi'\Pi''$ in Bezug auf die absolute Fläche conjugirten Geraden gemein. Die Ebenen durch jene oder normal zu dieser enthalten Kegelschnitte des Ortes, die die absolute Fläche in denselben zwei Punkten berühren. Jene Kegelspitzen werden die Brennpunkte in der Axe, diese Schnitte die Parallelkreise der entstandenen Rotationsfläche.

B. 3. Der Ort der Punkte P, deren Distanzen von zwei gegebenen festen Punkten P', P'' Sinus von constantem Verhältniss λ haben, ist wegen

$$\sin^2(PP') = \frac{\Phi_{x'x'}\Phi_{xx} - \Phi^2_{xx'}}{\Phi_{x'x'}\Phi_{xx}}, \quad \sin^2(PP'') = \frac{\Phi_{x''x''}\Phi_{xx} - \Phi^2_{xx''}}{\Phi_{x''x''}\Phi_{xx}},$$

$$\Phi_{x''x''}(\Phi_{x'x'}\Phi_{xx} - \Phi^2_{xx'}) = \lambda^2\Phi_{x'x'}(\Phi_{x''x''}\Phi_{xx} - \Phi^2_{xx''}),$$

oder auch

$$(1-\lambda^2)\Phi_{xx} = \frac{\Phi^2_{xx'}}{\Phi_{x'x'}} - \frac{\lambda^2\Phi^2_{xx''}}{\Phi_{x''x''}};$$

nach der ersten Gleichung ist er eine Fläche zweiten Grades, welche die beiden Kegelschnitte enthält, in denen sich (Art. 153) die von P' und P'' resp. ausgehenden Tangentenkegel der absoluten Fläche durchdringen; nach der zweiten hat er mit der absoluten Fläche zwei Kegelschnitte gemein, deren Ebenen die Punkte von constantem Verhältniss $\pm\lambda$ der Distanzensinus von Π', Π'' enthalten. Er hat mit der absoluten Fläche somit zwei Tangentialkegel aus Punkten von $P'P''$ gemein: Brennpunkte in der Rotationsaxe.

B. 4. Man drücke die Gleichwinkligkeit von zwei

projectivischen Ebenenbüscheln aus und bilde die Gleichung des von ihnen erzeugten einfachen Hyperboloids.

Wenn die Scheitelkanten der Büschel die Kanten A_1A_2 und respective A_3A_4 des Fundamentaltetraeders sind, und wenn die Flächen $A_1A_2A_4$ und $A_3A_4A_2$ sich entsprechen, sodass A_2A_4 ein Strahl der zu bildenden Regelschaar ist, so werden die Ebenenbüschel durch die Gleichungen

$$x_3 + \lambda x_4 = 0, \quad \lambda' x_1 + x_2 = 0$$

mit $\lambda = 0$ und $\lambda' = \infty$ als entprechenden Parameterwerthen also für die specielle Projectivitätsrelation

$$\lambda\lambda' + \beta\lambda + \delta = 0$$

ausgedrückt und das entstehende Hyperboloid hat die Gleichung

$$x_2x_3 - \beta x_1x_3 + \delta x_1x_4 = 0.$$

Die der Gleichheit entsprechender Winkel beider Ebenenbüschel entsprechenden Werthe von β und δ bleiben zu ermitteln, und wir können dazu etwa von der Gleichung

$$\tan^2(\Pi\Pi') = \frac{\Phi_{\xi\xi}\Phi_{\xi'\xi'} - \Phi_{\xi\xi'}^2}{\Phi_{\xi\xi'}^2}$$

ausgehen. Dieselbe giebt für die Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 + \lambda x_4 = 0$ wegen $\xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = 0$, $\xi_3 = 1$ und $\xi_1' = \xi_2 = 0$, $\xi_3' = 1$, $\xi_4' = \lambda$ die Werthe

$$\Phi_{\xi\xi} = \alpha_{33}, \quad \Phi_{\xi'\xi'} = \alpha_{33} + \alpha_{44}\lambda^2 + 2\alpha_{34}\lambda, \quad \Phi_{\xi\xi'} = \alpha_{33} + \alpha_{34}\lambda,$$

und somit für das Quadrat der Tangente den Ausdruck

$$\frac{\lambda^2(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2)}{(\alpha_{33} + \alpha_{34}\lambda)^2}.$$

Dagegen erhält man für die Ebenen $x_1 = 0$, $(\beta\lambda + \delta)x_1 - \lambda x_2 = 0$ wegen $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$ und $\xi_1' = -(\beta\lambda + \delta)$, $\xi_2' = \lambda$, $\xi_3' = \xi_4 = 0$ die Werthe

$$\Phi_{\xi\xi} = \alpha_{11}, \quad \Phi_{\xi'\xi'} = \alpha_{11}(\beta\lambda + \delta)^2 + \alpha_{22}\lambda^2 - 2\alpha_{12}\lambda(\beta\lambda + \delta),$$
$$\Phi_{\xi\xi'} = -\alpha_{11}(\beta\lambda + \delta) + \alpha_{12}\lambda,$$

und somit für das Quadrat der Tangente

$$\frac{\lambda^2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}{\{-\alpha_{11}\delta - (\alpha_{11}\beta - \alpha_{12})\lambda\}^2}.$$

Aus der Vergleichung beider Werthe entspringen die Bedingungen

$$k^2(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2,$$

$$k\alpha_{33} = \alpha_{11}\delta, \quad k\alpha_{34} = \alpha_{11}\beta - \alpha_{12};$$

die erste derselben bestimmt k, die beiden andern geben dann

$$\delta = k\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}}, \quad \beta = k\frac{\alpha_{34}}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}.$$

Man bestimme das Hyperboloid aus den orthogonalen Ebenenpaaren durch die Kanten A_1A_3 und A_2A_4 und erörtere die Bedingungen seiner Identität mit dem Vorigen.

B. 5. Wir geben die analoge Untersuchung in gewöhnlicher Maassbestimmung und somit Cartesischen Coordinaten. Die kürzeste Distanz der Scheitelkanten sei die Axe der z, ihre Mitte der Anfangspunkt, und die Parallelen zu den Halbirungslinien ihrer Winkel die Axen x und y, sodass ihre Gleichungen sind

$$y - mx = 0, \quad z - c = 0; \quad y + mx = 0, \quad z + c = 0.$$

Sei ferner für die Projectivität der Büschel

$$\lambda(y - mx) + z - c = 0, \quad \lambda'(y + mx) + z + c = 0,$$

$$\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0,$$

so erhält man für die Gleichwinkligkeit durch Berechnung des Quadrats der Tangente des Winkels der Ebenen von den Parametern λ_1, λ_2 im ersten und des Winkels der entsprechenden Ebenen im zweiten Büschel aus der Gleichsetzung der Ausdrücke

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(1 + m^2)}{\{\lambda_1\lambda_2(1 + m^2) + 1\}^2},$$

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(1 + m^2)(\delta - \beta\gamma)^2}{\{\lambda_1\lambda_2[(1+m^2)\beta^2+1] + (\lambda_1+\lambda_2)[(1+m^2)\beta\delta+\gamma] + (1+m^2)\delta^2+\gamma^2\}^2}$$

die Bedingungen

$$(\delta - \beta\gamma)(1 + m^2) = (1 + m^2)\beta^2 + 1,$$

$$(1 + m^2)\beta\delta + \gamma = 0, \quad \delta - \beta\gamma = (1 + m^2)\delta^2 + \gamma^2,$$

aus denen zuerst durch Combination der zweiten und dritten $(1 + m^2)\delta = 1$ und damit $\beta = -\gamma$ hervorgeht; daher endlich die Gleichung des erzeugten Hyperboloids in der Form

$$(z^2 - c^2 + 2c\beta y - 2m\beta xz)(1 + m^2) + y^2 - m^2x^2 = 0.$$

Es entstehen also aus gleichwinkligen Ebenenbüscheln Hyperboloide von derjenigen speciellen Art, welche wir in Art. 124, 3 als orthogonale bezeichnet sahen und denen wir mehrfach begegnet sind.

In der That giebt die Zerlegung des Art. 111 angewandt auf das orthogonale Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2(a^2-b^2)}{a^2b^2}=1 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ für } c^2=\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$$

$$\text{mit}\quad \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

projectivische gleichwinklige Ebenenbüschel in elementarer Maassbestimmung. Denn das Quadrat der Tangente des Winkels zwischen den Ebenen λ_1 und λ_2 im ersten und im zweiten Büschel respective ist

$$\frac{(a^2+c^2)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\lambda_1\lambda_2)^2}\quad \frac{(a^2+c^2)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{((a^2b^2+b^2c^2)\lambda_1\lambda_2+c^2a^2)^2},$$

und ihre Gleichheit fordert wie oben

$$a^2b^2+b^2c^2=c^2a^2.$$

B. 6. Wenn wir das Hyperboloid der rechtwinkligen Paare (Art. 124, 3) aus den Büscheln

$$\lambda(x+mz)=b+y,\quad (x-mz)=\lambda(1-m^2)(b-y)$$

entstehen lassen, so dass seine Gleichung ist

$$x^2-m^2z^2=(1-m^2)(b^2-y^2)$$

oder

$$\frac{x^2}{b^2(1-m^2)}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{m^2z^2}{b^2(1-m^2)}=1,$$

so giebt die zweite Zerlegung derselben Gleichung, nämlich

$$\lambda\left(\frac{y}{b}+\frac{mz}{b\sqrt{1-m^2}}\right)=1+\frac{x}{b\sqrt{1-m^2}},$$

$$\frac{y}{b}-\frac{mz}{b\sqrt{1-m^2}}=\lambda\left(1-\frac{x}{b\sqrt{1-m^2}}\right)$$

eine Erzeugung aus gleichwinkligen Büscheln. Die Scheitelkanten der einen und der andern erzeugenden Paare von Ebenenbüscheln sind als die durch die Scheitel der Hauptschnittellipse gehenden Erzeugenden ersichtlich. (Vergl. Art. 111 mit dem Beispiele.) Man charakterisire die von ihnen gebildeten windschiefen Vierecke. Macht man eines derselben zu dem fundamentalen Viereck $A_1A_2A_3A_4$, so hat man nach der Methode des Art. 128 für die Abkürzung $n=\sqrt{1-m^2}$ die Coordinatentafel und das adjungirte System nach dem Determinantenschema

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

mit den Factoren der ersten Zeile 1 und $\frac{4b^3n^2}{m}$ respective, der zweiten Zeile bn und $\frac{4b^2n^2}{m}$, der dritten b und $\frac{4b^2n^2}{m}$ und der vierten $\frac{bn}{m}$ und $4b^2n$; und mit dem Werthe der ersten Determinante $X = \frac{16b^3n^2}{m}$. Für den Mittelpunkt der Fläche als Einheitpunkt erhält man die Coefficienten der Substitution durch die Regel $\beta_{hi} X = \mu x_h^{(i)} X^{(i)}$, und damit die Substitution selbst

$$x = -bn\frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}, \quad y = b\frac{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 - x_4},$$
$$z = -\frac{bn}{m}\frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}.$$

Damit geht die Gleichung des Hyperboloids über in $x_1x_3 + x_2x_4 = 0$, welche den Nenner der Substitution als die linke Seite der Gleichung der Polarebene des Einheitpunktes in Bezug auf die Fläche bestätigt.

Die Ebenen, welche die in Bezug auf die Fläche conjugirten Kanten $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ des Fundamentaltetraeders mit dem Mittelpunkte verbinden, haben die Gleichungen respective $x \pm y\sqrt{1 - m^2} = 0$, und für die Kanten selbst hat man überdies $z = \mp \frac{b}{m}\sqrt{1 - m^2}$. Von hier ist auch das Erzeugniss der gleichwinkligen Büschel bei Umkehrung des Drehungssinnes in dem einen unter Festhaltung der Anfangslagen zu erörtern.

B. 7. Die Transformation des B. 2 in Art. 128 giebt für λ und λ' in B. 5 oder

$$\frac{c - z}{y - mx} \text{ und } -\frac{c + z}{y + mx} \text{ die Werthe } -\frac{1 - c}{1 - m}\cdot\frac{x_2}{x_3} \text{ und } -\frac{1 + c}{1 + m}\cdot\frac{x_1}{x_4},$$

und führt somit die Gleichung des vorigen Hyperboloids über in

$$\frac{x_3x_4}{1 + m^2} + \frac{1 - c^2}{1 - m^2}x_1x_2 + \beta\left\{\frac{1 + c}{1 + m}x_1x_3 - \frac{1 - c}{1 - m}x_2x_4\right\} = 0;$$

die Kanten A_1A_4 und A_2A_3 des Fundamentaltetraeders enthaltend ordnet es den rechtwinkligen Paaren der Fundamentalebenen $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die natürlich ebenfalls rechtwinkligen Ebenenpaare zu

$$\beta\frac{1 - c}{1 - m}x_2 - \frac{x_3}{1 + m^2} = 0, \quad \frac{1 - c}{1 - m}x_2 + \beta x_3 = 0;$$
$$\beta\frac{1 + c}{1 + m}x_1 + \frac{x_4}{1 + m^2} = 0, \quad \frac{1 + c}{1 + m}x_1 - \beta x_4 = 0.$$

Für jede Lage der Anfangsebenen enthält das Hyperboloid der gleichwinkligen Büschel die Durchschnittserzeugenden des Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids von den respectiven Gleichungen

$$\frac{x_3 x_4}{1+m^2} + \frac{1-c^2}{1-m^2} x_1 x_2 = 0, \quad \frac{1+c}{1+m} x_1 x_3 - \frac{1-c}{1-m} x_2 x_4 = 0,$$

also durch die windschiefen Vierecke $A_1 A_3 A_2 A_4$ und $A_1 A_2 A_3 A_4$ respective; Linien, welche zugleich die Durchschnittslinien der durch die beiden Scheitelkanten $y \pm mx = 0$, $z \pm c = 0$ an den imaginären unendlich fernen Kreis J gehenden Tangentialebenen sind; denn die Gleichungen derselben (Art. 149, 2)

$$(y \pm mx) \pm i\,(z \pm c)\,(1+m^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

geben durch die benutzte Transformation die a. a. O. zuletzt stehenden Gleichungen, und das Product von diesen giebt, in seinen reellen und seinen imaginären Theil zerlegt, die vorigen Gleichungen zweiten Grades wieder. Jene Ebenen machen mit jeder Anfangslage im bezüglichen Büschel unmessbar grosse Winkel und entsprechen sich daher in beiden unabhängig von jenen Lagen.

B. 8. Der Ort der Punkte, deren Distanzensinus von zwei festen Geraden p', p'' ein festes Verhältniss λ haben, ist eine Fläche zweiten Grades. (Vergl. Art. 124, 2.) Denn

$$\frac{\sin^2 (Pg')}{\sin^2 (Pg'')} = \lambda^2$$

giebt
$$\Sigma\left(\Phi_{p''p''} p'_{ik} p'_{lm} - \lambda^2\, \Phi_{p'p'} p''_{ik} p''_{lm}\right) \frac{d^2(x)}{d\alpha_{il}\, d\alpha_{km}} = 0.$$

Diese Gleichung wird vereinfacht durch die Wahl der Ecken des Fundamentaltetraeders in den Schnittpunkten der gegebenen Geraden mit ihren beiden gemeinsamen Normalen, für welche jene zu Gegenkanten des Tetraeders werden; nennen wir sie wie a. a. O. 12, 34, so sind die Coordinaten von g'' oder 14 sämmtlich Null bis auf p''_{14} und die von g' oder 23 sämmtlich Null bis auf p''_{23}, welche beide gleich Eins sind. Die Gleichung der absoluten Fläche hat, weil die zu den Endpunkten 1, 2 conjugirten Ebenen durch 3, 4 gehen, die Coefficienten $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$ oder $\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = 0$, weil die conjugirten Ebenen der Punkte 1 und 3 durch die Gerade 24 gehen müssen. Daher wird die Gleichung

$$\alpha_{22}\alpha_{33} \begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_4 \\ x_1, & \alpha_{11}, & 0 \\ x_4, & 0, & \alpha_{44} \end{vmatrix} - \lambda^2 \alpha_{11}\alpha_{44} \begin{vmatrix} 0, & x_2, & x_3 \\ x_2, & \alpha_{22}, & 0 \\ x_3, & 0, & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wie a. a. O.,

$$\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{11}x_4^2 + \alpha_{44}x_1^2) - \lambda^2\alpha_{11}\alpha_{44}(\alpha_{33}x_2^2 + \alpha_{22}x_3^2) = 0.$$

Die Kanten des Fundamentaltetraeders sind somit in Bezug auf die Fläche paarweis conjugirt; sie enthält für alle Werthe von λ die vier imaginären Geraden

$$\alpha_{11}x_4^2 + \alpha_{44}x_1^2 = 0, \quad \alpha_{33}x_2^2 + \alpha_{22}x_3^2 = 0,$$

in welchen die Tangentialebenen der absoluten Fläche aus p'' und p' sich schneiden, wodurch sich eine Invariantenrelation wie in Art. 222 als für dasselbe und die absolute Fläche gültig erweist; diese Geraden tragen quadrantale oder wenn man will rechtwinklige Involutionen harmonischer Polarebenen. Die beiden Gruppen von vier Geraden.

$$\alpha_{22}x_4^2 = \lambda^2\alpha_{44}x_2^2, \quad \lambda^2\alpha_{11}x_3^2 = \alpha_{33}x_1^2;$$
$$\alpha_{33}x_4^2 = \lambda^2\alpha_{44}x_3^2, \quad \alpha_{22}x_1^2 = \lambda^2\alpha_{11}x_2^2,$$

d. h. die Schnittlinien der Ebenenpaare

$$\alpha_{22}^{\frac{1}{2}}x_4 \pm \lambda\alpha_{44}^{\frac{1}{2}}x_2 = 0, \quad \lambda\alpha_{11}^{\frac{1}{2}}x_3 \pm \alpha_{33}^{\frac{1}{2}}x_1 = 0;$$
$$\alpha_{33}^{\frac{1}{2}}x_4 \pm \lambda\alpha_{44}^{\frac{1}{2}}x_3 = 0, \quad \alpha_{22}^{\frac{1}{2}}x_1 \pm \lambda\alpha_{11}^{\frac{1}{2}}x_2 = 0,$$

liegen auch auf der Fläche.

B. 9. Man erörtere die Probleme, welche den vorigen nach dem Princip der Dualität entsprechen.

Man bestimme den Ort der Punkte, für welche die Summe der Distanzquadrate von n Ebenen constant ist. (Vergl. Art. 124, 9.) Das Problem giebt Anlass, das Verhältniss des Begriffes der Aehnlichkeit zu der Specialisirung der Maassbestimmung zu erklären.

Man bestimme die Gesammtheit von Strahlen, die mit zwei festen Geraden constante Summe, respective constantes Verhältniss oder Product der Momente haben.

248. Die Ermittelung der Distanzen zweier Geraden von allgemeiner Lage hängt ab von der Bestimmtheit der Transversalen zu vier Geraden; wir wissen aber, dass vier Gerade unendlich viele gemeinsame Transversalen haben können, sofern sie zur nämlichen Regelschaar gehören, d. h. wenn die vier linearen Bedingungsgleichungen sich auf drei reduciren. In diesem Falle erhalten wir für die betrachteten Geraden unendlich viele gemeinsame Normalen in den Strahlen der andern Regelschaar des bezüglichen einfachen Hyperboloids — eine der Eigenschaften paralleler Geraden in der Euklid'schen Geometrie (reelle Gerade,

die sich in einem Punkte des absoluten imaginären Ellipsoids schneiden, existiren hier nicht); wir werden die Geraden also als parallel bezeichnen dürfen. Wir untersuchen den Fall näher. Dazu müssen wir auf die Geraden der absoluten Fläche eingehen; sie entsprechen der Zerlegung der Punktcoordinatengleichung derselben

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + (x_3 + ix_4)(x_3 - ix_4) = 0$$

mit der ersten Regelschaar, sagen wir der g,

$$\lambda(x_3 + ix_4) = -(x_1 + ix_2) \quad \text{und} \quad \lambda(x_1 - ix_2) = x_3 - ix_4$$

und der zweiten Regelschaar, also der l,

$$\mu(x_3 - ix_4) = x_1 + ix_2, \quad \mu(x_1 - ix_2) = -(x_3 + ix_4),$$

die sich beide in conjugirt imaginäre Paare ordnen.

Da jede dieser Geraden mit ihrer absolut conjugirten zusammenfällt (Art. 82), so sind sie dadurch charakterisirt, dass ihre complementären Coordinaten p_{ik} und p_{lm} einander gleich oder entgegengesetzt gleich sind, also dass wir für die g resp. l setzen dürfen

$$p_{23} - p_{14} = 0, \quad p_{31} - p_{24} = 0, \quad p_{12} - p_{34} = 0;$$
$$p_{23} + p_{14} = 0, \quad p_{31} + p_{24} = 0, \quad p_{12} + p_{34} = 0,$$

also mit der Identität (zugleich der Gleichung des Absoluten)

$$p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2 = 0.$$

Die vier Bedingungsgleichungen unseres Falles

$$p_{23}^0 p_{23} + \cdots\cdots = 0, \quad p_{23}^0 p_{14} + \cdots\cdots = 0, \quad p_{23}^0 p_{23}' + \cdots\cdots = 0,$$
$$p_{23}^0 p_{14}' + \cdots\cdots = 0$$

lassen die Summen $p_{ik} \pm p_{lm}$ leicht hervortreten; denn sie liefern durch Addition und Subtraction mit durchweg oberen oder unteren Zeichen

$$(p_{23}^0 \pm p_{14}^0)(p_{23} \pm p_{14}) + (p_{31}^0 \pm p_{24}^0)(p_{31} \pm p_{24}) + (p_{12}^0 \pm p_{34}^0)(p_{12} \pm p_{34}) = 0,$$
$$(p_{23}^0 \pm p_{14}^0)(p_{23}' \pm p_{14}') + (p_{31}^0 \pm p_{24}^0)(p_{31}' \pm p_{24}') + (p_{12}^0 \pm p_{34}^0)(p_{12}' \pm p_{34}') = 0$$

und daraus

$$p_{23}^0 \pm p_{14}^0 : p_{31}^0 \pm p_{24}^0 : p_{12}^0 \pm p_{34}^0 =$$

$$\begin{vmatrix} p_{31} \pm p_{24}, & p_{31}' \pm p_{24}' \\ p_{12} \pm p_{34}, & p_{12}' \pm p_{34}' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_{12} \pm p_{34}, & p_{12}' \pm p_{34}' \\ p_{23} \pm p_{14}, & p_{23}' \pm p_{14}' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_{23} \pm p_{14}, & p_{23}' \pm p_{14}' \\ p_{31} \pm p_{24}, & p_{31}' \pm p_{24}' \end{vmatrix}.$$

Dies zeigt aber, dass die vier Bedingungsgleichungen wirklich unendlich viele Lösungen annehmen, wenn man für alle obern resp. untern Zeichen hat

$$p'_{23} \pm p'_{14} : p_{23} \pm p_{14} = p'_{31} \pm p'_{24} : p_{31} \pm p_{24} = p'_{12} \pm p'_{34} : p_{12} \pm p_{34};$$

und dies bedeutet, wie leicht zu sehen, dass die Geraden p_{ik}, p'_{ik} beide die nämlichen zwei Geraden der einen oder andern Regelschaar der Absoluten schneiden. Es ergiebt sich das auch durch Construction. Denn schneiden p_{ik} und p'_{ik} dieselben zwei Geraden l_1, l_2 der absoluten Regelschaar l in A_1, A_2, resp. B_1, B_2, und schneiden die durch A_1 und A_2 gehenden Geraden der andern absoluten Regelschaar g die l_2 in A_2' und die l_1 in A_1', so ist $A_1'A_2'$ die absolut polare Gerade zu p_{ik}; und ebenso liefern die durch B_1 und B_2 gehenden absoluten g in l_2 und l_1 resp. die Punkte B_2' und B_1' der absolut polaren zu p'_{ik}. Man hat, weil l_1 die vier g in A_1, A_1', B_1, B_1' und l_2 dieselben in A_2', A_2, B_2', B_2 schneidet, die Doppelverhältnissgleichheit

$$(A_1 A_1' B_1 B_1') = (A_2' A_2 B_2' B_2) \text{ und weil}$$
$$(A_2' A_2 B_2' B_2) = (A_2 A_2' B_2 B_2')$$

ist, projectivische Theilung der l_1, l_2 durch die Geraden p_{ik}, p'_{ik} und ihre absolut conjugirten oder diese sind selbst Gerade einer Regelschaar und haben also ein System von unendlich vielen gemeinsamen Transversalen.

Man kann die Parallelen p_{ik}, p'_{ik} als Rechts- und Links-Parallelen unterscheiden, je nachdem sie zwei Erzeugende der einen oder der andern Schaar der absoluten Fläche schneiden — wir könnten auch sagen g- resp. l-parallel; und man sieht, dass jeder Punkt und jede Ebene des Raumes zu einer Geraden p_{ik} eine Parallele der einen und der andern Art liefert, nämlich die durch ihn gehende resp. in ihr liegende Transversale zu den beiden p_{ik} treffenden Geraden der Regelschaaren g und l der absoluten Fläche. Zwei absolut polare Gerade sind zugleich g- und l-parallel oder die absolut polaren Geraden bilden die gemeinsame Gruppe der g- und l-Parallelen; alle ihre gemeinsamen Transversalen sind gemeinsame Normalen.

Es handelt sich um die Regelschaaren aller der Flächen zweiten Grades, die mit der absoluten Fläche ein geradliniges Vierseit gemein haben (Art. 134), sodass jeweilen durch jeden Punkt und an jede Ebene des Raumes eine von ihnen geht; die

Erzeugenden der einen Schaar auf einer solchen Fläche sind rechts-, die der andern linksparallel; die auf ihr liegenden windschiefen Vierecke sind als Parallelogramme anzusehen, etc.[71])

Diejenigen linearen Transformationen des Raumes, durch welche die absolute Fläche so in sich selbst übergeht, dass die beiden Systeme ihrer Geraden ungeändert bleiben, entsprechen den sechsfach unendlich vielen Bewegungen des Raumes; sie lassen die Maassverhältnisse ungeändert. Wenn die x_i durch neue Variable x_i' ersetzt werden, die in linearer Abhängigkeit von ihnen stehen, so kann nach Art. 129 diese Abhängigkeit durch Beziehung auf das Tetraeder der vier sich selbst entsprechenden Punkte in die einfache Form $x_i' = a_i x_i$ gesetzt werden, und eine Fläche zweiten Grades $a_{11} x_1'^2 + \cdots + 2 a_{12} x_1' x_2' + \cdots\cdots = 0$ geht über in $a_{11} a_1^2 x_1^2 + \cdots + 2 a_{12} a_1 a_2 x_1 x_2 + \cdots\cdots = 0$, und beide sind identisch, wenn man hat $a_{ik} a_i a_k = p a_{ik}$, was mit unabhängigen a_i nur möglich ist für $a_{ii} = 0$; sollen dann etwa a_{13}, a_{24} nicht Null sein, so muss $a_1 a_3 = a_2 a_4$ sein und $a_{12} = a_{14} = a_{23} = a_{34} = 0$, oder die Fläche ist $2(a_{13} x_1 x_3 + a_{24} x_2 x_4) = 0$. Die Erzeugenden von $x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0$ sind nach Art. 111, 134, 3 das eine System durch $x_1 + \lambda x_2 = 0$, $x_4 - \lambda x_3 = 0$ und das andere durch $x_1 + \lambda x_4 = 0$, $x_2 - \lambda x_3 = 0$ ausgedrückt; man sieht, dass sie bei der gewählten Transformation ungeändert bleiben. Für die Transformation $x_1' = a_1 x_3$, $x_2' = a_2 x_2$, $x_3' = a_3 x_1$, $x_4' = a_4 x_4$ geht dagegen das eine System derselben in das andere über. Die Determinante der Substitution ist im ersten Falle dem positiven, im andern Falle dem negativen Producte der a_i gleich. Die sechsfach unendliche Vielfachheit sehen wir in der Willkürlichkeit des Einheitpunktes und in der vierfachen Unendlichkeit der windschiefen Vierseite aus Geraden der Fläche ausgedrückt.

Bei einer solchen Bewegung durchläuft jeder Punkt des Raumes eine Gerade und jede Ebene dreht sich um eine solche, sie ist eine Schiebung längs einer bestimmten Strahlencongruenz, zu der die eine Regelschaar jedes der Hyperboloide gehört, die mit der absoluten Fläche ein windschiefes Vierseit gemein haben.

In Bezug auf die reellen Elemente des Raumes erhalten wir wesentliche Verschiedenheiten der Maassbestimmung, jenachdem wir die absolute Fläche als imaginär oder als reell, und im letztern Falle jenachdem wir sie als Regelfläche oder als Nichtregelfläche voraussetzen. Die Maassbestimmung für die imaginäre absolute

Fläche ist in Uebereinstimmung mit der der elliptischen Geometrie. Man erkennt leicht, wie z. B. die Theorie der Krümmungslinien etc. sich in die allgemeine Maassbestimmung überträgt als Orte von Punkten, deren Normalen eine abwickelbare Fläche bilden. Bei den Flächen zweiten Grades speciell werden sie von den Flächen zweiten Grades ausgeschnitten, die der durch die gegebene Fläche mit der Absoluten bestimmten Schaar angehören — die Normalen bleiben für jede unter ihnen gewählte Absolute dieselben.

Wenn die absolute Fläche in einen imaginären Kegelschnitt degenerirt, so erhalten wir die Maassbestimmung der parabolischen oder Euklidischen Geometrie, endliche Winkelsumme im Büschel und einen unendlich fernen Punkt in der Geraden. Darum sind die metrischen Verhältnisse der Kegelflächen wie der allgemeinen Flächen zweiten Grades und nicht minder die des linearen Complexes Beziehungen derselben zur unendlich fernen Ebene. (Vergl. z. B. für den linearen Complex Art. 58, 133, 142 mit Bd. II Art. 123, 2; für die Flächen zweiten Grades Art. 225, 1, Art. 84f., 89, 104, 120f.) Die vorbezeichneten linearen Transformationen gehen in die Bewegungen des Raumes im gewöhnlichen Sinne über, bei denen das Absolute, der imaginäre Kugelkreis der unendlich fernen Ebene, ungeändert bleibt. Hier entspringt die Berechtigung der Vorstellung vom starren System oder festen Körper. Unsere elementaren Auffassungen über die Parallelentheorie, die Winkelsumme des Dreiecks, etc. sind von der Theorie der Metrik untrennbar und gestatten daher pädagogisch keine vollkommene Erledigung am Anfang der Geometrie.

B. 1. Nach Art. 152 enthält eine Fläche zweiten Grades acht den absoluten Kegelschnitt schneidende oder absolute Gerade, sagen wir vier g und vier l und jede derselben verbindet drei der Kreis- oder Umbilical-Punkte der Fläche. Nach den vorigen Entwickelungen liegen die Normalen der Fläche in den Punkten einer solchen absoluten Geraden in der sie enthaltenden absoluten Ebene. Diese Ebenen schneiden die Hauptebenen der Fläche in den Normalen der Kreispunkte, die Hauptaxen in den Focalcentren des Art. 214, die Stellungen der Hauptebenen in den absoluten Polen der Kreisschnittebenen der Fläche. Man kann sie in zwei Focaltetraeder ordnen, eines aus den zu den absoluten g, das andere aus den zu den absoluten l gehörenden. Sie werden alle von zweifach unendlich vielen Flächen zweiten Grades berührt; weil zu diesen als Grenzform auch der absolute

Kegelschnitt gehört, so umfasst das System auch die mit der gegebenen Fläche confocalen Flächen. Die Geraden aller Flächen des Systems erfüllen einen Complex dritten Grades, den man den Focalcomplex der Fläche genannt hat; seine Geraden sind charakterisirt durch die Eigenschaft, dass sie mit den Flächen des Systems Tangentialebenenpaare bestimmen, die ein involutorisches Büschel bilden. (Vergl. Art. 256, bes. B. 2, 3.) Da die Focalcentren einer Hauptaxe etc. ebenfalls Grenzformen der Flächen des Systems bilden, so gehören auch die sechs Ebenenpaare aus diesen nach einem Focalstrahl stets zu einer Involution. [72])

B. 2. Von dem Simpson'schen Satze aus, dass die Fusspunkte der aus einem Punkte des umgeschriebenen Kreises auf die Seiten eines Dreiecks gefällten Perpendikel in gerader Linie liegen (vergl. „Kegelschnitte" Art. 315, 3), entspringt die Frage nach dem sogenannten Steiner'schen Orte und der Steiner'schen Enveloppe, die wir in den Raum übertragen wie folgt: [73]) Wenn die Fusspunkte der auf die Flächen eines Tetraeders von einem Punkte P des Raumes gefällten Perpendikel in einer Ebene Π liegen, welches ist der Ort dieses Punktes und welches die Enveloppe dieser Ebene? Es ist offenbar, dass im Falle der Euklidischen Maassbestimmung alle Punkte der unendlich fernen Ebene dem Orte angehören, weil die den Ebenen des Tetraeders polar und conjugirten Punkte in der unendlich fernen Ebene liegen. Im Falle der allgemeinen Maassbestimmung treten an Stelle der Perpendikel von P auf die Ebenen des Tetraeders die Verbindungslinien von P mit den Polen jener Ebenen in Bezug auf die absolute Fläche zweiten Grades.

Denken wir das Tetraeder als fundamental und die Gleichung der absoluten Fläche

$$\Phi \equiv a_{11}x_1{}^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots \equiv \alpha_{11}\xi_1{}^2 + \cdots + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots = 0,$$

so finden wir aus der Bemerkung, dass die Verbindungsebenen des Punktes P mit den Spuren der Ebene Π in den Tetraederebenen zu diesen conjugirt sind in Bezug auf die absolute Fläche, oder dass für die x^{te} Coordinate dieser Verbindungsebene

$$\frac{d\Phi}{d\xi_k} \quad \text{oder} \quad \alpha_{k1}\xi_1 + \alpha_{k2}\xi_2 + \alpha_{k3}\xi_3 + \alpha_{k4}\xi_4 = 0$$

sein muss, die Bedingungsgleichungen des Problems in der Form

$$\frac{x_i}{a_{ii}}\frac{d\Phi}{d\xi_i} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4.$$

Sie sind linear und homogen sowohl in den x als in den ξ und man erhält durch Elimination der ersten oder der letzten die Bedingung ihrer Verträglichkeit als Gleichung der Enveloppe der Ebenen Π respective als Gleichung des Ortes der Punkte P. Jene ist somit im Allgemeinen von der vierten Classe, dieser von der vierten Ordnung. Die Elimination durch Bildung der Determinante giebt im ersten Falle

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - \frac{d\Phi}{d\xi_1}\frac{1}{\alpha_{11}}, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \xi_1, & \xi_2 - \frac{d\Phi}{d\xi_2}\frac{1}{\alpha_{22}}, & \xi_3, & \xi_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 - \frac{d\Phi}{d\xi_3}\frac{1}{\alpha_{33}}, & \xi_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 - \frac{d\Phi}{d\xi_4}\frac{1}{\alpha_{44}} \end{vmatrix} = 0,$$

und im zweiten nach leichter Umformung

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \begin{vmatrix} 1, & \frac{\alpha_{11}}{x_1}, & \frac{\alpha_{22}}{x_2}, & \frac{\alpha_{33}}{x_3}, & \frac{\alpha_{44}}{x_4} \\ x_1, & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \alpha_{14} \\ x_2, & \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & \alpha_{24} \\ x_3, & \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & \alpha_{34} \\ x_4, & \alpha_{41}, & \alpha_{42}, & \alpha_{43}, & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Man erhält ferner die Gleichung der ersten aus

$$x_i = \alpha_{ii}(\xi_1 x_1 + \cdots) : \frac{d\Phi}{d\xi_i}$$

durch Multiplication mit ξ_i, Addition der Producte und Division der Summe durch $(\xi_1 x_1 + \cdots)$ in der Form

$$\alpha_{11}\xi_1 : \frac{d\Phi}{d\xi_1} + \cdots + \alpha_{44} : \frac{d\Phi}{d\xi_4} = 1;$$

und ebenso die Gleichung des zweiten aus

$$\frac{d\Phi}{d\xi_i} = \frac{\alpha_{ii}(\xi_1 x_1 + \cdots)}{x_i}$$

durch Multiplication mit $\frac{d\Phi}{d\xi_i}$ und Addition mit Unterdrückung des Factors $(\xi_1 x_1 + \cdots)$ und in Folge der Identität (vergl. Art. 246)

$$\Sigma \frac{d\Phi}{d\xi_i}\frac{d\Phi}{dx_i} = \alpha(\xi_1 x_1 + \cdots)$$

in der Form

$$\frac{\alpha_{11}}{x_1}\frac{d\Phi}{dx_1}+\cdot\cdot+\frac{\alpha_{44}}{x_4}\frac{d\Phi}{dx_4}=\alpha.$$

Der unterdrückte Factor $\Sigma \xi_i x_i$ ist nur Null, wenn der Punkt P in der Ebene Π liegt oder wenn die Normalebenen der Tetraederflächen in den Schnitten mit Π mit dieser zusammenfallen, d. h. wenn für die Coordinaten der Ebene Π die partiellen Differentiale der ξ-Gleichung der absoluten Fläche und somit ihre Discriminante verschwinden oder für $\alpha = 0$. In diesem Falle erhält man bestimmte Verhältnisse der ξ_i, nämlich dieselben proportional den Unterdeterminanten von α; die Ebene im Unendlichen $\Phi^{\frac{1}{2}} = 0$, den Punktort der absoluten Fläche, die in diesem Falle zum Steiner'schen Orte gehört. Der Rest ist eine die Kanten des Tetraeders enthaltende Fläche dritter Ordnung.

Weil für

$$\frac{d\Phi}{dy_i}=\alpha y_i$$

(wo α für einen beliebigen Proportionalitätsfactor steht) der Punkt y_i und die Ebene ξ_i in Bezug auf die absolute Fläche zu einander polar sind und mittelst dieser Relationen die Gleichungen der Enveloppe und des Ortes in einander übergehen, so folgt, dass im Allgemeinen Ort und Enveloppe reciprok zu einander sind in Bezug auf die absolute Fläche — immerhin nicht der Punkt P der Ebene Π, die ihm entspricht; die Enveloppe besitzt daher reciproke Eigenschaften zum Orte in Bezug auf das Tetraeder, welches in Bezug auf die absolute Fläche dem fundamentalen conjugirt ist. Offenbar verschwindet diese Reciprocität im Falle der Euklidischen Maassbestimmung, wenn man die unendlich ferne Ebene ausschliesst. Dagegen besteht die durch Betrachtung der Relation von demselben ξ entsprechenden Elementen in jener Reciprocität begründete quadratische Verwandtschaft auch im Falle der Euklidischen Maassbestimmung fort, nämlich zwischen den Punkten der unendlich fernen Ebene und denen der Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten.

Schreibt man die Gleichung der Enveloppe in der Form

$$\alpha_{11}\xi_1\frac{d\Phi}{d\xi_2}\frac{d\Phi}{d\xi_3}\frac{d\Phi}{d\xi_4}+\cdots=\frac{d\Phi}{d\lambda_1}\frac{d\Phi}{d\xi_2}\frac{d\Phi}{d\xi_3}\frac{d\Phi}{d\xi_4},$$

so erkennt man für denselben Fall, dass die Coordinaten α_i der unendlich fernen Ebene nicht nur der Gleichung der Enveloppe, sondern auch ihren partiellen Derivirten bis zur zweiten Ordnung genügen, oder dass die unendlich ferne Ebene eine dreifache

Tangentialebene der Enveloppe ist — wie in der Ebene die unendlich ferne Gerade einer Doppeltangente.

B. 3. Die Invariantenrelationen von Flächen zweiten Grades, welche einer festen Fläche zweiten Grades umgeschrieben sind, oder die sie längs je eines ebenen Querschnittes berühren, können untersucht werden in genauer Verfolgung derselben Methode, welche in Art. 370 (vergl. B. 2, 3) der „Kegelschnitte" für solche Kegelschnitte gegeben ist, die einen festen Kegelschnitt doppelt berühren.

Wenn

$$S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

die eingeschriebene Fläche darstellt, und

$$S - L^{(1)2} = 0, \quad S - L^{(2)2} = 0$$

zwei ihr nach den Kegelschnitten in den respectiven Ebenen $L^{(1)} = 0$, $L^{(2)} = 0$ von den Coordinaten $a_i^{(1)}$ und $a_i^{(2)}$ umgeschriebene Flächen zweiten Grades sind, so wird die Bedingung der Berührung der beiden umgeschriebenen Flächen (ausser den zwei Schnittpunkten ihrer gemeinsamen ebenen Curven) durch die Relation

$$\{1 - S^{(1)}\}\{1 - S^{(2)}\} = \{1 \pm R^{(12)}\}^2$$

ausgedrückt, in welcher $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ die Resultate der Substitution der Coordinaten $a_i^{(1)}$ und $a_i^{(2)}$ der Pole der Ebenen $L^{(1)} = 0$ und $L^{(2)} = 0$ in Bezug auf $S = 0$ in das Polynom S, und $R^{(12)}$ das Resultat der Substitution der Coordinaten des Pols der einen in das Polynom der andern Ebene bezeichnen. Wir wollen die Grösse

$$\{1 - S^{(i)}\}\{1 - S^{(k)}\} - \{1 \pm R^{(ik)}\}^2,$$

deren Verschwinden die Bedingung der besprochenenen Berührung zwischen zwei umgeschriebenen Flächen zweiten Grades ist, von den Gleichungen

$$S - L^{(i)2} = 0 \quad \text{und} \quad S - L^{(k)2} = 0,$$

durch das Symbol (ik) andeuten.

Man bildet dann wie a. a. O. eine invariante Relation zwischen fünf Flächen zweiten Grades von der Gleichungsform $S - L^{(i)2} = 0$, welche sämmtlich eine andere der Fläche $S = 0$ gleichfalls umgeschriebene Fläche zweiten Grades berühren, und man erhält die Gleichung der Flächen zweiten Grades des Systems der zu S Umgeschriebenen, welche vier bestimmte unter diesen berühren, in der Form[74])

$$\begin{vmatrix} 0 & ,(12) & ,(13) & ,(14) & ,S^{\frac{1}{2}}-L^{(1)} \\ (12) & ,0 & ,(23) & ,(24) & ,S^{\frac{1}{2}}-L^{(2)} \\ (13) & ,(23) & ,0 & ,(34) & ,S^{\frac{1}{2}}-L^{(3)} \\ (14) & ,(24) & ,(34) & ,0 & ,S^{\frac{1}{2}}-L^{(4)} \\ S^{\frac{1}{2}}-L^{(1)}, & S^{\frac{1}{2}}-L^{(2)}, & S^{\frac{1}{2}}-L^{(3)}, & S^{\frac{1}{2}}-L^{(4)}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Invariantenbedingung der Berührung von fünf Kugeln durch dieselbe sechste und die Gleichungen der Kugeln in Paaren, welche vier gegebene Kugeln berühren, sind in diesen Formeln als specielle Fälle enthalten. Dieselbe Methode gilt unmittelbar für vier Kegelschnitte einer Fläche zweiten Grades, die ein und derselbe fünfte Kegelschnitt in derselben berührt.

249. Wenn vier Flächen zweiten Grades gegeben sind, so ist der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf dieselben sich in einem Punkte schneiden, eine Fläche, welche als die Jacobi'sche Fläche des Systems bezeichnet werden kann.

Denn man hat zur Bildung der Gleichung dieses Ortes zwischen den Gleichungen der vier Polarebenen in Bezug auf die Flächen

$$U=0,\quad U'=0,\quad U''=0,\quad U'''=0,$$

also zwischen $U_1x_1+U_2x_2+U_3x_3+U_4x_4=0,$

$$U_1'x_1+U_2'x_2+U_3'x_3+U_4'x_4=0, \text{ etc.}$$

die x_1, x_2, x_3, x_4 zu eliminiren und erhält als Ausdruck des Ortes das Verschwinden der Determinante $\Sigma \pm U_1 U_2' U_3'' U_4'''$, d.i. der Jacobi'schen Functionaldeterminante des Systems der Flächengleichungen. (Vergl. „Kegelschn.“ Art. 372, 375).

Der fragliche Ort ist also eine Fläche vierter Ordnung. Es ist offenbar, dass, wenn die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf die vier Flächen $U=0$, $U'=0$, $U''=0$, $U'''=0$ sich in einem Punkte schneiden, die Polare in Bezug auf $\lambda U+\mu U'+\nu U''+\pi U'''=0$ durch denselben Pnnkt gehen wird. Die Jacobi'sche Fläche des Systems ist auch der Ort aller der Punkte, welche die Scheitel der Kegel zweiten Grades sind, die das System $\lambda U+\mu U'+\nu U''+\pi U'''=0$ enthält.

Deshalb ist der Ort der Scheitel aller Kegel zweiten Grades, welche durch sechs gegebene Punkte gehen, eine Fläche vierter Ordnung; denn für $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$, $U''' = 0$, als die Gleichungen von vier Flächen zweiten Grades, welche durch sie hindurchgehen, kann jede andere Fläche zweiten Grades, welche sie enthält, dargestellt werden durch

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'' + \pi U''' = 0,$$

als welche die drei unabhängigen Constanten enthält, die zur vollständigen Bestimmung der Fläche nothwendig sind. Es ist geometrisch evident, dass diese Fläche vierter Ordnung auch durch jede der fünfzehn geraden Verbindungslinien der gegebenen Punkte und durch jede der zehn Geraden geht, in welchen sich die durch je drei jener Punkte bestimmten Ebenen schneiden. Man zeigt auch leicht, dass die durch jene sechs Punkte bestimmte Curve dritter Ordnung in ihr liegt und dass ihre projicirenden Kegel aus jenen die Tangentenkegel der Fläche in ihnen als ihren Doppelpunkten sind.

Wenn die Gleichung $\lambda U + \mu U' + \nu U'' + \pi U''' = 0$ zwei Ebenen darstellen kann, so liegt die Durchschnittslinie derselben in der Jacobi'schen Fläche.

Haben die vier gegebenen Flächen ein gemeinsames sich selbst conjugirtes Tetraeder, so reducirt sich die Jacobi'sche Fläche derselben auf die Gruppe von vier Ebenen, welche dasselbe bilden; denn dann sind die Gleichungen der vier Flächen von der Form

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0, \text{ etc.},$$

die Differentiale $U_1 = a_1 x_1$, etc., und die Jacobi'sche Determinante wird

$$= x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot \Sigma \pm a_1 a_2' a_3'' a_4'''.$$

Wenn eine der Functionen U das vollständige Quadrat eines linearen Factors L wäre, so ist L ein Factor in den Differentialen derselben und somit besteht die Jacobi'sche Fläche aus einer Ebene und einer Fläche dritter Ordnung. Wenn die vier gegebenen Flächen vier Punkte in einer Ebene gemein haben, so ist geometrisch evident, dass diese Ebene ein Theil der Jacobi'schen Fläche ist. Haben sie aber sämmtlich eine ebene Schnittcurve gemein, so zählt die Ebene derselben doppelt in der Jacobi'schen Fläche und diese besteht aus ihr und einer

Fläche zweiten Grades, welche jenen Schnitt enthält. Darum ist die Jacobi'sche Fläche von vier Kugeln eine Kugel, welche die gegebenen überall rechtwinklig durchschneidet, ihre Orthogonalkugel. (Vergl. „Kegelschn." Art. 373, 2.)

Wenn eine Fläche des Systems $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ die Fläche $U''' = 0$ berührt, so ist der Berührungspunkt nothwendig ein Punkt des hier betrachteten Ortes und kann daher nur in der Curve liegen, welche die Fläche $U''' = 0$ mit der Jacobi'schen Fläche des Systems gemeinsam hat. Wenn ferner eine Fläche des Systems $\lambda U + \mu U' = 0$ die Durchschnittscurve von $U'' = 0$ und $U''' = 0$ berührt, d. h. wenn in einem der Punkte, wo $\lambda U + \mu U' = 0$ die Curve $U'' = 0$, $U''' = 0$ schneidet, die Tangentenebene der ersten Fläche die Durchschnittslinie der Tangentenebenen der beiden letzten Flächen enthält, so ist der Berührungspunkt offenbar ein Punkt in der Jacobi'schen Fläche des Systems. Es existiren daher sechszehn Flächen in dem Büschel $\lambda U + \mu U' = 0$, welche die Curve $U'' = 0$, $U''' = 0$ berühren; denn die Jacobi'sche Fläche der vierten Ordnung schneidet die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung in sechszehn Punkten. (Vergl. a. a. O. Art. 373.)

B. 1. Die Flächen zweiten Grades durch sechs Punkte bilden ein lineares durch vier sonst unabhängige von ihnen bestimmtes Gebilde dritter Stufe, dessen Jacobi'sche Fläche leicht zu berechnen ist. Denn man kann für jene Punkte die Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 und den Einheitpunkt E projectivischer Coordinaten und einen Punkt (y_i) wählen. Dann sind die Ebenenpaare $A_2A_3A_4$, A_1EY; $A_3A_4A_1$, A_2EY; $A_4A_1A_2$, A_3EY drei Flächen und der Kegel aus A_4 durch A_1, A_2, A_3, E, Y eine vierte Fläche des Systems; die Determinante der Derivirten ist einfach zu bilden und zeigt die 25 Geraden der Flächen auf, sowie durch sie die Knoteneigenschaft der sechs gegebenen Punkte in ihr.

Man findet z. B. ihren Schnitt mit $x_1 = 0$ ausgedrückt durch

$$y_1 x_2 x_3 x_4 \{(y_3 - y_4)x_2 - (y_2 - y_4)x_3 + (y_2 - y_3)x_4\} = 0.$$

B. 2. Die Scheitel aller durch sieben gegebene Punkte gehenden Kegel zweiten Grades liegen in einer Raumcurve sechster Ordnung, welche ihre Verbindungsgeraden zu Sehnen hat. In Folge dessen gehen durch acht beliebige Punkte vier Kegel zweiten Grades; die Ecken des Quadrupels (Art. 145, 149) sind ihre Scheitel.

250. Wenn drei Flächen zweiten Grades gegeben sind, so ist der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf dieselben ein Büschel bilden, eine Curve sechster Ordnung, welche die Jacobi'sche Curve derselben genannt wird.

Denn ein solcher Punkt muss durch seine Coordinaten gleichzeitig die vier Gleichungen befriedigen, welche aus dem System

$$\left\| \begin{matrix} U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ U_1', & U_2', & U_3', & U_4' \\ U_1'', & U_2'', & U_3'', & U_4'' \end{matrix} \right\|$$

durch Gleichsetzung der Null mit einer der vier durch Unterdrückung einer Verticalreihe zu bildenden Determinanten entsteht; und ein solches System repräsentirt eine Curve sechster Ordnung, weil die beiden Flächen dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ U_1', & U_2', & U_3' \\ U_1'', & U_2'', & U_3'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_4 \\ U_1', & U_2', & U_4' \\ U_1'', & U_2'', & U_4'' \end{vmatrix} = 0,$$

die durch das System

$$\left\| \begin{matrix} U_1, & U_1', & U_1'' \\ U_2, & U_2', & U_2'' \end{matrix} \right\| = 0 \text{ (Art. 147)}$$

ausgedrückte Curve dritter Ordnung gemein haben, die den übrigen Flächen dritter Ordnung nicht angehört, und daher mit diesen nur eine Curve sechster Ordnung gemein haben können.

Die Punkte dieser Curve behalten ihre Bedeutung für alle Flächen zweiten Grades, welche durch die Gleichung $U + \lambda U' + \mu U'' = 0$ ausdrückbar sind. (Art. 131, 135.)

Sie ist auch der Ort der Spitzen der Kegel, welche diesem Bündel oder Netz von Flächen angehören; ein solcher Punkt hat für alle Flächen eines Büschels, zu welchem sein Kegel gehört, die Gegenebene des bezüglichen sich selbst conjugirten Tetraeders zur Polarebene, und dieselbe erzeugt für alle solche Büschel das Polarebenenbüschel des Satzes.

Dieselbe Curve liegt auf allen den dreifach unendlich vielen Flächen dritter Ordnung, welche den Ebenen des Raumes als Orte der conjugirt harmonischen ihrer Punkte (Art. 148) entsprechen. Die Jacobi'sche Determinante von vier von einander unabhängigen

Flächen dieses Gebildes dritter Stufe drückt, gleich Null gesetzt, eine Regelfläche achten Grades aus, welche von den Scheitelkanten aller solcher Polarebenenbüschel erfüllt wird.[75])

Setzt man

$$\Sigma \pm U_1 U_2' U_3'' \xi_4 = \xi_1 F^{(1)} + \xi_2 F^{(2)} + \xi_3 F^{(3)} + \xi_4 F^{(4)},$$

so findet man ihre Gleichung in der Form

$$\Sigma \pm F_1^{(1)} F_2^{(2)} F_3^{(3)} F_4^{(4)} = 0.$$

Die Ebenen der sich selbst conjugirten Tetraeder der im Netz enthaltenen Büschel von Flächen zweiten Grades sind die Tangentialebenen dieser Fläche.

251. Sowie die Betrachtungen der früheren Art. von der Invariantennatur der Coefficienten in der Discriminante von $U + \lambda U' = 0$ ausgingen, so kann eine andere Reihe von Entwickelungen an die Discriminante von $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ geknüpft werden; die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ, μ, ν sind Invarianten des Systems. Unter ihnen sind drei, welche eine besondere Aufmerksamkeit verdienen, sofern sie auch Invarianten von irgend dreien unter den Flächen des Systems $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ oder Combinanten sind. Wir wollen sie durch A, I und J bezeichnen.

Die Invariante A verschwindet, wenn jede der drei Flächen $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$ die Polarfläche zweiten Grades von einem Punkte in Bezug auf eine und dieselbe Fläche dritter Ordnung ist.

Denkt man zwei Punkte 1, 2 und eine Fläche dritter Ordnung, so ist die Polarebene von 1 in Bezug auf die Polarfläche zweiten Grades von 2 identisch mit der Polarebene von 2 in Bezug auf die Polarfläche zweiten Grades von 1. (Vergl. hierzu die Entwickelung der Polarentheorie im ersten Kap. des 2. Bandes.) Sind also $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$ die Polarflächen zweiten Grades von Punkten 1, 2, 3 in Bezug auf dieselbe Fläche dritter Ordnung, so erhalten wir aus der Identität der Polarebene von 1 in Bezug auf U' mit der von 2 in Bezug auf U vier lineare Bedingungsgleichungen in den Coordinaten von 1 und 2; und analog zwei andre Reihen von je vier aus Betrachtung der Paare U, U'' resp. U', U''. Zwischen den so erhaltenen zwölf Gleichungen lassen sich die zwölf Coordinaten $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$ der drei Punkte linear eliminiren und man erhält eine Determinante

aus zwölf Reihen und Zeilen, die aus vierreihigen Determinanten zusammengesetzt ist; von diesen haben die drei diagonalen lauter Elemente Null, die übrigen sechs aber ordnen sich in symmetrisch-liegende gleiche Paare von entgegengesetzten Zeichen. Alle Gruppen sind gleich gebaut

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{matrix}$$

und nur als ohne Striche, als einfach und zweifach gestrichen von einander unterschieden; also etwa nach Horizontalen geordnet zuerst zweigestrichen mit Minus, dann eingestrichen mit Plus, ferner zweigestrichen Plus und ungestrichen Minus, endlich eingestrichen Minus und ungestrichen Plus.

Sie ist als eine schief symmetrische Determinante von geradem Grade (vergl. Art. 130, 133) ein vollständiges Quadrat. Die gesuchte invariante Bedingung ist also nur vom zweiten Grade in den Coefficienten jeder der drei Flächen. Man reducirt sie etwa durch die Voraussetzung, dass zwei der Flächen, z. B. U', U'', Gleichungen von der canonischen Form haben

$$a_1'x_1^2 + a_2'x_2^2 + a_3'x_3^2 + a_4'x_4^2 = 0, \quad a_1''x_1^2 + \cdots = 0,$$

sie wird in diesem Falle zu der schiefsymmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 \quad , & (a_2'a_1'')a_{12}, & (a_3'a_1'')a_{13}, & (a_4'a_1'')a_{14} \\ (a_1'a_2'')a_{12}, & 0 \quad , & (a_3'a_2'')a_{23}, & (a_4'a_2'')a_{24} \\ (a_1'a_3'')a_{13}, & (a_2'a_3'')a_{23}, & 0 \quad , & (a_4'a_3'')a_{34} \\ (a_1'a_4'')a_{14}, & (a_2'a_4'')a_{24}, & (a_3'a_4'')a_{34}, & 0 \end{vmatrix},$$

die das vollständige Quadrat ist von

$$(a_2'a_3'')(a_1'a_4'')a_{23}a_{14} + (a_3'a_1'')(a_2'a_4'')a_{13}a_{24} \\ + (a_1'a_2'')(a_3'a_4'')a_{12}a_{34}.$$

Man sieht leicht, dass $\varDelta$ verschwindet, wenn es zulässig ist, die U, U', U'' als Summe von fünf Quadraten zu schreiben; man kann dann zwischen jedem Paar derselben, z. B. U', U'', eine Veränderliche eliminiren und sie so auf die eben geschriebene reduciren, während $U = 0$ in

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 0$$

übergeht; damit werden $a_{23}a_{14} = a_{13}a_{24} = a_{12}a_{34} = a_5^2$, durch deren Einführung in den vorher gefundenen Ausdruck $\varDelta$ verschwindet.[76])

252. Die Invariante I verschwindet immer, wenn vier von den Schnittpunkten der Flächen $U=0$, $U'=0$, $U''=0$ in einer Ebene liegen (was einschliesst, dass es auch die vier andern thun), oder in andern Worten, wenn es möglich ist, Werthe von λ, μ, ν zu bestimmen, für welche $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ der Ausdruck zweier Ebenen ist.

Weil für ein Ebenenpaar die Tangentialgleichung verschwindet, so muss die durch Ersetzung der a_{ik} durch die $\lambda a_{ik} + \mu a'_{ik} + \nu a''_{ik}$ in der Contravariante σ erhaltene Gleichung zweiten Grades in den ξ_i, schreiben wir etwa

$$\sigma_{000}\lambda^3 + \sigma_{001}\lambda^2\mu + \sigma_{002}\lambda^2\nu + \cdots = 0,$$

zehn verschwindende Coefficienten haben, und wir können die fragliche Bedingung bilden aus der durch Elimination der λ, μ, ν entspringenden Determinante zehnten Grades; da jeder Coefficient vom dritten Grade in den Originalcoefficienten ist, und die gesuchte Invariante in den Coefficienten der drei Flächen symmetrisch sein muss, so ist sie vom zehnten Grade in den Coefficienten von jeder.

Dies kann auch in folgender Weise eingesehen werden: Sind $U=0$, $U^*=0$, $U'=0$, $U''=0$ vier Flächen zweiten Grades, welche durch dieselben sechs Punkte gehen, so hat das Problem, λ, μ, ν so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$U + \lambda U^* + \mu U' + \nu U'' = 0$$

ein Paar von Ebenen darstelle, zehn Lösungen, da durch sechs Punkte zehn Paare von Ebenen gelegt werden können.

Man kann aber die Grösse λ auch bestimmen, indem man die Invariante I des Systems $U + \mu U^* + \nu U'' = 0$ bildet und darnach für jeden Coefficienten a_i von U die Verbindung $a_i + \lambda a_i^*$ substituirt. Das Substitutionsresultat muss λ im zehnten Grade enthalten, da dem Problem zehn verschiedene Werthe von λ als Lösungen entsprechen; also muss die Invariante I die Coefficienten von U in diesem nämlichen Grade enthalten.

253. Die Invariante des Systems, welche wir J nennen wollen, verschwindet stets, wenn irgend zwei von den acht Durchschnittspunkten der Flächen $U=0$, $U'=0$, $U''=0$ zusammenfallen, d. i. wenn diese drei Flächen in

einem ihnen gemeinschaftlichen Punkte Tangentenebenen haben, welche sich in einer Geraden durchschneiden, deren nächstfolgender Punkt auch allen drei Flächen gemein ist. Cayley hat diese Invariante die Berührungs- (Tact-) Invariante des Systems von drei Flächen genannt; die in Art. 216 betrachtete ist die Berührungs-Invariante für zwei Flächen. Jeder Punkt dieser Art ist der Scheitel eines Kegels, welcher dem System $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ angehört. Denn wenn wir ihn als Anfangspunkt der Coordinaten und die bezüglichen Tangentenebenen als $x = 0$, $y = 0$, $ax + by = 0$ nehmen, so sind die Gleichungen der Flächen von den Formen

$$x + u_2 = 0, \quad y + u_2' = 0, \quad ax + by + u_2'' = 0,$$

wenn u_2, u_2', u_2'' die Glieder zweiten Grades bezeichnen; alsdann ist aber $aU + bU' - U'' = 0$ ein Kegel zweiten Grades, welcher den Anfangspunkt der Coordinaten zum Scheitel hat.

Diese Invariante J ist vom sechszehnten Grade in den Coefficienten von jeder der Flächen. Denn wenn wir in dem Ausdruck J für jeden Coefficienten a von U das Binom $a + \lambda a^{*\prime}$ substituiren, wo $a^{*\prime}$ der entsprechende Coefficient der Gleichung einer andern Fläche $U^{*\prime} = 0$ ist, so ist offenbar, dass der Grad des Resultates in λ mit der Zahl der Flächen des Systems $U + \lambda U^{*\prime} = 0$ übereinstimmen muss, welche die Durchschnittscurve der Flächen $U' = 0$, $U'' = 0$ berühren; er muss also nach dem, was in Art. 250 gefunden ward, gleich sechszehn sein.

254. Wenn in überzähligen Coordinaten x_i mit $\Sigma x_i = 0$ die Gleichung

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2 = 0$$

einen Kegel darstellt, so befriedigen die Coordinaten seiner Spitze die vier durch Differentiation der Gleichung nach x_1, x_2, x_3, x_4 resp. entstehenden Bedingungen, d. h. mittelst der Identität $\Sigma x_i = 0$

$$a_1 x_1 = a_5 x_5, \quad a_2 x_2 = a_5 x_5, \text{ etc.}$$

sodass man die Coordinaten der Spitze als die reciproken Werthe der a_i schreiben kann. Ihre Substitution in die Identität giebt die Discriminante der Fläche in der Form

$$\Sigma a_i^{-1} = 0.$$

Könnten also die Gleichungen von U, U', U'' gleichzeitig d. h.

durch dieselbe Substitution auf diese Form gebracht werden, so wäre die Discriminante von $\lambda U + \mu U' + \nu U''$

$$\frac{1}{\lambda a_1 + \mu a_1' + \nu a_1''} + \frac{1}{\lambda a_2 + \mu a_2' + \nu a_2''} + \cdots = 0.$$

Ist dann

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$$

ein Kegel, und werden die Coordinaten seiner Spitze in die Gleichung jeder der Flächen substituirt, so erhalten wir

$$\frac{a_1}{(\lambda a_1 + \mu a_1' + \nu a_1'')^2} + \frac{a_2}{(\lambda a_2 + \mu a_2' + \nu a_2'')^2} + \cdots = 0,$$

$$\frac{a_1'}{(\lambda a_1 + \mu a_1' + \nu a_1'')^2} + \frac{a_2'}{(\lambda a_2 + \mu a_2' + \nu a_2'')^2} + \cdots = 0, \text{ etc.},$$

welches die Differentiale der Discriminante nach λ, μ, ν sind. Wir leiten so den Satz ab, dass im fraglichen Falle bei Bildung der Discriminante von $\lambda U + \mu U' + \nu U''$ und Entwicklung der Discriminante von dieser in Bezug auf λ, μ, ν die Invariante J ein Factor des Resultates sein muss. Man zeigt leicht, dass auch I ein Factor derselben ist, dass es in der That $I^2 J$ ist.[77])

255. Für die zu Art. 251 f. ergänzende Untersuchung der Covarianten des linearen Flächengebildes zweiter Stufe

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$$

denken wir die U in allgemeiner Form gegeben, also

$$U \equiv a_{11} x_1^2 + \cdots + 2 a_{12} x_1 x_2 + \cdots\cdots = 0,$$
$$U' \equiv a_{11}' x_1^2 + \cdots + 2 a_{12}' x_1 x_2 + \cdots\cdots = 0,$$
$$U'' \equiv a_{11}'' x_1^2 + \text{etc.} = 0.$$

Eliminirt man zwischen ihnen und der Gleichung

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

die Verhältnisse der x_i, indem man

$$\xi_4 x_4 = -(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \text{ in } \xi_4^2 U,\ \xi_4^2 U',\ \xi_4^2 U''$$

einsetzt und zu den drei so entstehenden ternären quadratischen Formen u, u', u'' die Resultante bildet, so erhält man das mit ξ_4^8 multiplicirte Product der Gleichungen der acht Schnittpunkte der Flächen $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$ und somit aller Flächen des Netzes (Grundpunkte). Dasselbe ist vom Grade 8 in den Coefficienten und somit vom Grade 16 in den ξ_i, so dass die Gleichung der Grundpunkte $\Pi = 0$ die ξ_i im Grade 8 enthält.

Nach Art. 378 der „Kegelschnitte" erhalten wir die Resultante in der Form

$$\Pi \equiv \Theta^2 - 64\Sigma,$$

und erkennen die geometrische Bedeutung des Verschwindens der darin auftretenden Contravarianten Σ und Θ in folgender Art. Die Ebene $\xi_1 x_1 + \cdots = 0$ schneidet das Flächenbündel $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ in einem Netz von Kegelschnitten $\lambda u + \mu u' + \nu u'' = 0$, in welchem eine doppeltzählende Gerade erscheint (a. a. O. Art. 375 Schluss) für $\Sigma = 0$. Die Fläche achter Classe $\Sigma = 0$ ist daher die Enveloppe der Kegel zweiten Grades, welche das Flächennetz enthält. Zu dem besagten Netze von Kegelschnitten gehört sodann eine Jacobi'sche Curve (ibid. Art. 375) und eine Cayley'sche Curve (ibid. Art. 376 und „Höhere Curven" Art. 178), deren zweite Invarianten T (vergl. „Höhere Curven" Art. 222, speciell Art. 230 Schluss) respective sind $\Theta(72\,\Sigma - \Theta^2)$ und $\Theta(576\,\Sigma - \Theta^2)$ bis auf Zahlenfactoren und Potenzen von ξ_4; diese Curven sind also gleichzeitig harmonisch für $\Theta = 0$, oder: Alle Ebenen, deren zugehörige Jacobi'sche und Cayley'sche Curven gleichzeitig harmonisch sind, berühren die Fläche vierter Klasse $\Theta = 0$.

Legt man von einem der acht Grundpunkte, etwa von P, die Tangentialebenen an $\Theta = 0$, so berühren sie auch $\Sigma = 0$ in P; für alle ξ_i und ξ_i' besteht die Identität

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{d\Pi}{d\xi_i}\xi_i' = 2\Theta \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d\Theta}{d\xi_i}\xi_i' - 64 \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d\Sigma}{d\xi_i}\xi_i',$$

und für eine solche Tangentialebene ξ_i an $\Theta = 0$ fällt daher die Gleichung des Berührungspunktes auf $\Sigma = 0$

$$\frac{d\Sigma}{d\xi_1}\xi_1' + \cdots = 0 \text{ mit } \frac{d\Pi}{d\xi_1}\xi_1' + \cdots = 0,$$

der Gleichung des Punktes P, zusammen. Also gilt der Satz: Die den Flächen $\Sigma = 0$ und $\Theta = 0$ gemeinschaftlich umgeschriebene developpable Fläche zerfällt in acht Kegel vierter Klasse, deren Scheitel die Grundpunkte P sind.

In Folge dessen sind die Grundpunkte acht vielfache Punkte in der Fläche $\Sigma = 0$. Um den Grad ihrer Vielfachheit zu bestimmen, stellen wir $\Sigma = 0$ in Punktcoordinaten x_i dar. Für $\lambda a_{ik} + \mu a'_{ik} + \nu a''_{ik} \equiv b_{ik}$ wird die Fläche zweiten Grades $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ ein Kegel mit $\Sigma \pm b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} = 0$,

oder in entwickelter Form mit $A\lambda^4 + B\mu^4 + C\nu^4 + \cdots = 0$. Man erhält aber die Enveloppe aller Flächen des Netzes, die diese Bedingung befriedigen, indem man diese letztere als Gleichung einer Curve vierter Ordnung in Punktcoordinaten λ, μ, ν betrachtet, ihre Reciproke in den ξ, η, ζ bildet und in dieser die ξ, η, ζ durch U, U', U'' respective ersetzt. Somit ist die Gleichung von $\Sigma = 0$ in Punktcoordinaten (vergl. „Höhere Curven" Art. 92) von der Form $S^3 - 27T^2 = 0$, d. h. die Fläche $\Sigma = 0$ ist von der Ordnung 24, die acht Grundpunkte sind in ihr zwölffache Punkte und die gemeinschaftliche Curve der Flächen $S = 0$, $T = 0$ ist ihre Cuspidalcurve.

256. Wir zeigen ferner, dass die Curve $S = 0$, $T = 0$ aus 24 Curven vierter Ordnung besteht. Je zwei Flächen des Netzes durchdringen sich in einer Curve vierter Ordnung, welche vier doppeltprojicirende Kegel zweiten Grades besitzt, und die einen Doppelpunkt hat wenn zwei, und einen Rückkehrpunkt wenn drei derselben zusammenfallen (vergl. oben Art. 219, 220). Die Fragen nach dem Orte solcher Raumcurven vierter Ordnung mit Doppelpunkt und nach denen unter ihnen, die einen Rückkehrpunkt besitzen, lassen sich wie folgt beantworten. Die beiden Gleichungen

$$\eta U - \xi U' = 0, \quad \zeta U' - \eta U'' = 0$$

oder, was dasselbe ist, die drei Gleichungen

$$\varrho U = \xi, \quad \varrho U' = \eta, \quad \varrho U'' = \zeta,$$

stellen für alle Werthe von ξ, η, ζ die sämmtlichen Curven vierter Ordnung dar, welche die Flächen des Bündels mit einander hervorbringen. Die vier einer solchen durch eine bestimmte Werthegruppe ξ, η, ζ bestimmten Curve entsprechenden Kegel des Netzes sind für $i = 1, 2, 3, 4$ durch die Gleichungen

$$\lambda_i U + \mu_i U' + \nu_i U'' = 0$$

ausgedrückt, wenn die Verhältnisse $\lambda_i : \nu_i$, $\mu_i : \nu_i$ aus den Gleichungen $\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu = 0$ und $A\lambda^4 + B\mu^4 + C\nu^4 + \cdots = 0$ berechnet werden. Wenn die gerade Linie $\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu = 0$ die Curve $A\lambda^4 + \cdots = 0$ einfach oder stationär berührt, so fallen zwei oder drei der vier Kegel zusammen, und man erhält daher mit Rücksicht auf $U : U' : U'' = \xi : \eta : \zeta$ die Sätze: Die Fläche $S^3 - 27T^2 = 0$ ist der geometrische Ort aller

Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte, welche die Flächen des Netzes mit einander erzeugen. Und die vollständige Durchdringung von $S = 0$, $T = 0$ ist die Gesammtheit der Raumcurve vierter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte. Solcher Curven giebt es also 24. Wenn man ferner eine Curve vierter Ordnung des Netzes harmonisch respective äquianharmonisch oder von gleichen Doppelverhältnissen nennt, wenn die aus irgend einem Punkte derselben an ihre vier doppeltprojicirenden Kegel gehenden Tangentialebenen (Art. 149, B. 1) das Doppelverhältniss — 1 oder gleiche fundamentale Doppelverhältnisse haben (vergl. „Kegelschn." Art. 345, 1; 351), so hat man nach Art. 92 „Höhere Curven" die Sätze: Der Ort aller Curven vierter Ordnung von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen im Flächennetz zweiten Grades ist die Fläche achter Ordnung $S = 0$. Der Ort aller harmonischen Curven vierter Ordnung ist die Fläche zwölfter Ordnung $T = 0$.[78])

Die geraden Linien auf den Flächen des Netzes werden jede von unendlich vielen Flächen oder eben so vielen Curven vierter Ordnung desselben in je zwei Punkten einer Involution geschnitten und von zweien unter ihnen berührt, und die in einer Ebene liegenden unter ihnen bilden daher die dem Kegelschnittnetze in derselben zugehörige Cayley'sche Curve; ebenso liegen die durch einen Punkt gehenden auf einem allgemeinen Kegel dritter Ordnung, oder die Gesammtheit dieser Geraden bildet einen Complex dritter Ordnung und Classe (Art. 58). Denkt man die durch einen beliebigen Punkt des Raumes P gehenden Flächen des Netzes und die Grundcurve des von ihnen gebildeten Büschels, so sind die von P nach den Punkten dieser Curve gehenden Geraden die Erzeugenden jenes Kegels. Der Ort aller dem Netze angehörenden Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist daher zugleich der Ort der Spitzen aller derjenigen Complexkegel, welche eine Doppelerzeugende besitzen. Die Flächen $S = 0$, $T = 0$ sind somit die geometrischen Oerter der Spitzen aller der Complexkegel, welche von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen, respective welche harmonisch sind; ihre gemeinsame Curve ist der Ort der Spitzen der Complexkegel mit Rückkehrkante. Betrachten wir aber die von den Linien des Complexes in einer Ebene umhüllte Curve, so hat sie als Cayley'sche Curve des Kegelschnittnetzes $\lambda u + \mu u' + \nu u'' = 0$ dieser Ebene eine

Doppeltangente nur bei verschwindender Discriminante desselben, d. h. bis auf einen Zahlenfactor und eine Potenz von ξ_4 bei $(\Theta^2 - 64\Sigma)^2 \Sigma = 0$; man erkennt daraus, dass die doppelt gezählten acht Grundpunkte und die Fläche $\Sigma = 0$ die Enveloppe der Ebenen bilden, deren Complexcurven eine Doppeltangente besitzen. Man nennt die Fläche $\Sigma = 0$ oder $S^3 - 27T^2 = 0$ aus beiderlei Ursachen die Singularitätenfläche des Complexes. Wir handeln davon erst in Band II.

Man sieht, wie alle diese Fragen in die Untersuchung der Flächen höherer Ordnungen und Classen hinübergreifen.

B. 1. Die Betrachtung der linearen Gebilde zweiter Stufe aus Flächen zweiten Grades in ξ-Coordinaten ist analog zu entwickeln. Sie lässt metrisch specialisirte Fälle zu durch die Aufnahme des absoluten Kreises in der unendlich fernen Ebene unter die bestimmenden Flächen, dem zwei confocale Schaaren entspringen (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 375, 3); ferner durch Wahl eines zweiten unter ihnen als Kugel, womit concentrische Kugeln eintreten.

B. 2. Die Geraden, welche drei Flächen zweiten Grades $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$ in Punktepaaren einer Involution schneiden, bilden einen Complex dritten Grades; seine Strahlen werden von allen Flächen des zugehörigen linearen Gebildes zweiter Stufe in Paaren derselben Involution geschnitten.

Bezeichnen wir die bestimmenden Punkte der Geraden als 1 und 2 oder ihre Coordinaten durch x_1, y_1, z_1, w_1 und $x_2, \cdots$ resp. und schreiben wir die quadratische Gleichung des Art. 76 in der Form

$$\lambda^2 U_{11} + 2\lambda\mu U_{12} + \mu^2 U_{22} = 0,$$

also für die Flächen aus U' und U''

$$\lambda^2 U'_{11} + 2\lambda\mu U'_{12} + \mu^2 U'_{22} = 0, \; \lambda^2 U''_{11} + 2\lambda\mu U''_{12} + \mu^2 U''_{22} = 0,$$

so ist die Bedingung der geforderten Involution

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{22} \\ U'_{11}, & U'_{12}, & U'_{22} \\ U''_{11}, & U''_{12}, & U''_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann diese Determinante in der Form der Summen der Determinantenproducte

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33}, & a_{44}, & a_{23}, & \cdots \\ a'_{11}, & a'_{22}, & a'_{33}, & a'_{44}, & a'_{23}, & \cdots \\ a''_{11}, & a''_{22}, & a''_{33}, & a''_{44}, & a''_{23}, & \cdots \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} x_1^2, & y_1^2, & z_1^2, & w_1^2, & 2y_1z_1, & \cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2, & y_1y_2, & z_1z_2, & w_1w_2, & (y_1z_2+y_2z_1), & \cdots \\ x_2^2, & y_2^2, & z_2^2, & w_2^2, & 2y_2z_2, & \cdots\cdots\cdots \end{matrix} \right\|$$

schreiben und sieht, dass alle Determinanten der zweiten Matrix aus Potenzen und Producten der Coordinaten p_{ik} der Geraden 12 bestehen, dass also die erforderliche Relation vom dritten Grade in den p_{ik} und linear in den Coefficienten jeder der drei Flächengleichungen ist. Nach einer gewöhnlichen Methode des Quadrirens erhält man das Product

$$\left| \begin{matrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{22} \\ U'_{11}, & U'_{12}, & U'_{22} \\ U''_{11}, & U''_{12}, & U''_{22} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} U_{22}, & -2U_{12}, & U_{11} \\ U'_{22}, & -2U'_{12}, & U'_{11} \\ U''_{22}, & -2U''_{12}, & U''_{11} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 2\Psi_{00}, & \Psi_{10}, & \Psi_{20} \\ \Psi_{01}, & 2\Psi_{11}, & \Psi_{21} \\ \Psi_{02}, & \Psi_{12}, & 2\Psi_{22} \end{matrix} \right|,$$

wenn Ψ_{00}, Ψ_{11}, Ψ_{22} die linken Seiten der Bedingung des Art. 81 für die Berührung der Geraden mit den Flächen U, U', U'' resp. bezeichnen, sowie Ψ_{01}, etc. die der Bedingungen der harmonischen Theilung ihrer Schnittpunkte mit den Flächen U, U' resp. Es folgt, dass die Quadrate und Producte der Coefficienten in der Bedingung unseres B. durch die Combinationen der Originalcoefficienten ausdrückbar sind, die wie in B. 6 Art. 216 aus den zweiten Minoren der Discriminante entspringen. Es erhellt, dass der Complex für irgend drei Flächen des Netzes $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ derselbe bleibt; und speciell, dass er nach dem Schlusse des Art. 82 wegen

$$\lambda U_{11} + \mu U'_{11} + \nu U''_{11} = 0, \quad \lambda U_{12} + \mu U'_{12} + \nu U''_{12} = 0,$$
$$\lambda U_{22} + \mu U'_{22} + \nu U''_{22} = 0$$

alle Geraden der Flächen des Systems enthält.

Man kann also denselben Complex auch in den Coordinaten π_{ik} schreiben und es ist bemerkt worden, dass die Summe der Producte der entsprechenden Coefficienten beider Formen die Invariante $\varDelta$ des Art. 251 liefert.[79])

B. 3. Die einfachsten oder canonischen Formen $a_1x_1^2 + \cdots = 0$ und $x_1^2 + \cdots = 0$ (Art. 216, 1) der Gleichungen von zwei Flächen zweiten Grades werden durch gewisse specielle Collineationen, nämlich durch Zeichenwechsel der Coordinaten und durch Vertauschungen der Coordinaten unter gleichzeitiger entsprechender Vertauschung der Coefficienten a_i, in sich übergeführt. Die Bemerkung, dass Ausdrücke aus den $p_{ik} = x_iy_k - x_ky_i$, welche covariante Complexe darstellen, rücksichtlich jener die Zeichen der p_{ik} ändernden resp. sie vertauschenden Collineationen

dieselbe Eigenschaft haben müssen, zeigt zunächst, dass solche Complexe mindestens vom zweiten Grade sein müssen und lässt sodann eine Uebersicht über die fundamentalen Complexe gewinnen.[80])

Sie sind zunächst Summen der p_{ik}^2

$$\Sigma p_{ik}^2, \quad \Sigma(a_i + a_k)p_{ik}^2, \quad \Sigma a_i a_k p_{ik}^2,$$

$$\Sigma(a_i^2 + a_k^2)p_{ik}^2, \quad \Sigma a_i a_k(a_i + a_k)p_{ik}^2, \quad \Sigma a_i^2 a_k^2 p_{ik}^2;$$

sodann Summen der Producte in Paaren, nämlich für $A_1 = a_2 a_3 + a_1 a_4$, etc.

$$A_1 p_{23} p_{14} + A_2 p_{31} p_{24} + A_3 p_{12} p_{34},$$

$$A_1^2 p_{23} p_{14} + A_2^2 p_{31} p_{24} + A_3^2 p_{12} p_{34};$$

beide Gruppen zusammen die acht quadratischen Complexe.

Die erste Gruppe erlaubt, die Quadrate der Strahlencoordinaten und die zweite ihre Producte in complementären Paaren ganz und rational auszudrücken. Jene liefern harmonische Complexe wie $\pi = 0$ in Art. 233. Diesen entspringen tetraedrale Complexe, deren erster aus den Verbindungsgeraden solcher Punktepaare besteht, die in beiden Flächen zweiten Grades dieselbe Polarebene haben; also für den Fall, dass die eine Fläche die absolute ist, aus den Axen oder Polnormalen der andern.[81])

Als irreducible Producte der Strahlencoordinaten zu dreien erscheinen nur die beiden Typen $p_{12} p_{31} p_{14}$ und $p_{23} p_{24} p_{34}$, welchen die acht cubischen covarianten Complexe entspringen

$$\Sigma p_{12} p_{31} p_{14}, \quad \Sigma a_1 p_{12} p_{31} p_{14}, \quad \Sigma a_1^2 p_{12} p_{31} p_{14}, \quad \Sigma a_1^3 p_{12} p_{31} p_{14}$$

und ebenso

$$\Sigma p_{23} p_{24} p_{34}, \text{ etc.}$$

Sie liefern die Gesammtheiten der Strahlen, welche mit Tripeln der Flächen zweiten Grades von gemeinsamem Poltetraeder involutorische Tangentialebenenbüschel resp. involutorische Schnittpunktreihen bilden.

Die Gleichung des gemeinsamen Poltetraeders in Strahlencoordinaten ist für die canonische Form das gleich Null gesetzte Product der sechs p_{ik}, d. h. bis auf einen aus den a_i zusammengesetzten Factor die Functionaldeterminante der sechs canonischen Complexe und sie muss auch als ganze Function dritten Grades der beiden tetraedralen Complexformen erhalten werden.

257. Man soll die Gleichungen zweier Flächen zweiten Grades $U = 0$, $U' = 0$ auf die einfachste Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$$

reduciren.

Die Werthe der Constanten a_1, a_2, a_3, a_4 sind nach B. 1 des Art. 216 als die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 - \Theta'\lambda + \Delta' = 0$$

gegeben. Man findet sodann durch die Auflösung der vier Gleichungen (vergl. Art. 229)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = U, \quad a_1(a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_2)x_1^2 = \text{etc.} = T,$$
$$a_1(a_2 + a_3 + a_4)x_1^2 + \text{etc.} = T', \quad a_1x_1^2 + \text{etc.} = U',$$

die Werthe von x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 in Gliedern der bekannten Functionen U, U', T, T'. Genau gesprochen müsste man zuerst U und U' durch die vierte Wurzel von Δ dividiren, um sie auf eine Form zu reduciren, in welcher die Discriminante von U gleich Eins ist; es kommt aber auf dasselbe Resultat hinaus, bei unverändertem U und U' die T und T' als aus den Coefficienten berechnet durch Δ zu dividiren.

B. 1. Man soll die Gleichungen

$$5x_1^2 - 11x_2^2 - 11x_3^2 - 6x_4^2 + 24x_2x_3 + 22x_3x_1 - 20x_1x_2 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4 = 0,$$

$$25x_1^2 - 10x_2^2 - 15x_3^2 - 5x_4^2 + 38x_2x_3 + 46x_3x_1 - 30x_1x_2 - 10x_1x_4 + 10x_2x_4 + 18x_3x_4 = 0$$

auf die Normalform reduciren.

Die Reciproken dieser Gleichungen sind

$$550\xi_1^2 + 1036\xi_2^2 + 850\xi_3^2 - 324\xi_4^2 + 2120\xi_2\xi_3 + 500\xi_3\xi_1 - 500\xi_1\xi_2 - 180\xi_1\xi_4 + 2088\xi_2\xi_4 + 1980\xi_3\xi_4 = 0,$$

$$3950\xi_1^2 + 800\xi_2^2 + 2750\xi_3^2 - 9720\xi_4^2 + 11200\xi_2\xi_3 + 4900\xi_3\xi_1 - 4160\xi_1\xi_2 + 25920\xi_2\xi_4 + 16200\xi_3\xi_4 = 0.$$

Die biquadratische Gleichung zur Bestimmung von λ ist

$$8100\{\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24\} = 0;$$

es sind also a_1, a_2, a_3, a_4 respective gleich 1, 2, 3, 4.

Darnach sind T und T' zu berechnen nach den Formeln

$$T = x_1^2 \{ A'_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + A'_{33}(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + A'_{44}(a_{11}a_{44} - a_{14}^2)$$
$$+ 2A'_{23}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}) + 2A'_{24}(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14}) + 2A'_{34}(a_{11}a_{34}$$
$$- a_{13}a_{14})\} + \text{etc.} + 2x_2x_3\{A'_{11}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}) + A'_{44}(a_{44}a_{23} - a_{24}a_{34})$$
$$+ A'_{24}(a_{24}a_{23} - a_{22}a_{34}) + A'_{34}(a_{34}a_{23} - a_{33}a_{24})$$
$$+ A'_{13}(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12}) + A'_{12}(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13}) + A'_{23}(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})$$
$$+ A'_{14}(2a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24})\} + \text{etc.},$$
$$T' = x_1^2\{A_{22}(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}) + \text{etc.},$$

und man erhält durch Division der so berechneten Werthe mit $\varDelta\ (= 8100)$ die Bestimmungsgleichungen für X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2 wie folgt:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 5x_1^2 - 11x_2^2 - 11x_3^2 - 6x_4^2 + 24x_2x_3$$
$$+ 22x_3x_1 - 20x_1x_2 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4,$$
$$X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2 + 4X_4^2 = 25x_1^2 - 10x_2^2 - 15x_3^2 - 5x_4^2 + 38x_2x_3$$
$$+ 46x_3x_1 - 30x_1x_2 - 10x_1x_4 - 10x_2x_4 + 18x_3x_4,$$
$$9X_1^2 + 16X_2^2 + 21X_3^2 + 24X_4^2 = 161x_1^2 - 100x_2^2 - 135x_3^2 - 55x_4^2$$
$$+ 306x_2x_3 + 342x_3x_1 - 250x_1x_2 - 70x_1x_4 + 70x_2x_4 + 126x_3x_4,$$
$$26X_1^2 + 38X_2^2 + 42X_3^2 + 44X_4^2 = 280x_1^2 - 300x_2^2 - 360x_3^2 - 170x_4^2$$
$$+ 772x_2x_3 + 776x_3x_1 - 628x_1x_2 - 108x_1x_4 + 180x_2x_4 + 252x_3x_4.$$

Dann ergiebt sich aus $24U - U' + T' - T$ der Werth

$$6X_1^2 = -6(2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4)^2,$$

und in analoger Weise

$$X_2^2 = -(x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4)^2,\quad X_3^2 = (3x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$
$$X_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2.$$

B. 2. Schreiben wir die Gleichung des Systems in der Form $U - \lambda U' = 0$, und seine Discriminante

$$= \varDelta - 4\lambda\Theta + 6\lambda^2\Phi - 4\lambda^3\Theta' + \lambda^4\varDelta' \equiv f(\lambda),$$

so ergiebt sich für B als Determinante der Substitution die Discriminante des transformirten Systems

$$B^2 \cdot f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)(\lambda_4 - \lambda);$$

d. h. die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $f(\lambda) = 0$ sind die Werthe der Coefficienten $a'_{11}, \cdots$ in der transformirten Form.

Setzen wir sodann

$$\varphi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \xi_1, & a_{11}-\lambda a'_{11}, & a_{12}-\lambda a'_{12}, & a_{13}-\lambda a'_{13}, & a_{14}-\lambda a'_{14} \\ \xi_2, & a_{12}-\lambda a'_{12}, & a_{22}-\lambda a'_{22}, & a_{23}-\lambda a'_{23}, & a_{24}-\lambda a'_{24} \\ \xi_3, & a_{13}-\lambda a'_{13}, & a_{23}-\lambda a'_{23}, & a_{33}-\lambda a'_{33}, & a_{34}-\lambda a'_{34} \\ \xi_4, & a_{14}-\lambda a'_{14}, & a_{24}-\lambda a'_{24}, & a_{34}-\lambda a'_{34}, & a_{44}-\lambda a'_{44} \end{vmatrix},$$

so erhalten wir durch die transponirte Substitution daraus

$$B^2 \cdot \varphi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 0, & \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \eta_1, & \lambda_1-\lambda, & 0, & 0, & 0 \\ \eta_2, & 0, & \lambda_2-\lambda, & 0, & 0 \\ \eta_3, & 0, & 0, & \lambda_3-\lambda, & 0 \\ \eta_4, & 0, & 0, & 0, & \lambda_4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)(\lambda_4-\lambda)\left\{\frac{\eta_1^2}{\lambda_1-\lambda}+\frac{\eta_2^2}{\lambda_2-\lambda}+\frac{\eta_3^2}{\lambda_3-\lambda}+\frac{\eta_4^2}{\lambda_4-\lambda}\right\}$$

und durch Substitution der Werthe von $\lambda = \lambda_1$, etc. nach der Gleichung $f(\lambda) = 0$

$$B^2 \cdot \varphi(\lambda_1) = -(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)\eta_1^2,$$
$$B^2 \cdot \varphi(\lambda_2) = -(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)\eta_2^2, \text{ etc.},$$

woraus sich die η_i bestimmen, weil nach den beiden Ausdrücken von $f(\lambda)$ durch die Relation $\Delta' B^2 = 1$ das Quadrat der Determinante der Substitution gegeben ist.

Sind endlich

$$x_i = \beta_{i1}y_1 + \beta_{i2}y_2 + \beta_{i3}y_3 + \beta_{i4}y_4, \quad \eta_i = \beta_{1i}\xi_1 + \beta_{2i}\xi_2 + \beta_{3i}\xi_3 + \beta_{4i}\xi_4$$

die Substitutionen, welche den Uebergang in die Normalform bewirken, so werden die vorigen Gleichungen

$$\frac{\varphi(\lambda_1)}{\Delta'} = -(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)(\lambda_4-\lambda)\{\beta_{11}\xi_1+\beta_{21}\xi_2+\beta_{31}\xi_3+\beta_{41}\xi_4\}^2, \text{ etc.},$$

und diese gehen (vergl. „Kegelschnitte" Art. 371) über in

$$-\frac{\varphi(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)} = (\beta_{11}\xi_1 + \beta_{21}\xi_2 + \beta_{31}\xi_3 + \beta_{41}\xi_4)^2, \text{ etc.},$$

Gleichungen, aus denen durch die Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von ξ_i auf ihren beiden Seiten die zur Bestimmung der β_{ik} nöthigen Bedingungen hervorgehen.

In dieser Form gilt die Entwickelung für quadratische Formen in beliebig vielen Variabeln.

B. 3. Nachdem gezeigt worden ist, dass die Grössen x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 in Function der Ausdrücke U, U', T, T' ausdrückbar sind, so folgt, dass das Quadrat der Jacobi'schen Determinante des Flächensystems ebenfalls aus jenen mit Hilfe der Invarianten bestimmt werden kann. Das Resultat der Berechnung ist

$$\begin{aligned}
J^2 = {} & \Delta T^4 - \Theta T^3 T' + \Phi T^2 T'^2 - \Theta' T T'^3 - \Delta' T^4 \\
& + U' \{ (\Theta^2 - 2\Delta\Phi) T^3 + (\Theta\Phi - 3\Theta'\Delta) T^2 T' + (\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta') T T'^2 \\
& \qquad - \Delta' \Theta T'^3 \} \\
& + U \{ (\Theta'^2 - 2\Delta'\Phi) T'^3 + (\Theta'\Phi - 3\Theta\Delta') T'^2 T + (\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta') T' T^2 \\
& \qquad - \Delta\Theta' T^3 \} \\
& + \Delta U'^2 \{ (\Phi^2 - 2\Theta\Theta' + 2\Delta\Delta') T^2 - (\Theta'\Phi - 3\Theta\Delta') T T' + \Phi\Delta' T'^2 \} \\
& + \Delta' U^2 \{ (\Phi^2 - 2\Theta\Theta' + 2\Delta\Delta') T'^2 - (\Theta\Phi - 3\Theta'\Delta) T T' + \Phi\Delta T^2 \} \\
& + T \{ \Theta'^2 - 2\Delta'\Phi) U'^3 \Delta^2 - (\Theta'\Phi^2 - 2\Theta\Theta'^2 + 5\Theta'\Delta'\Delta - \Theta\Phi\Delta') U'^2 U \Delta \\
& + (\Theta^2\Phi - 2\Phi^2\Delta - \Theta\Theta'\Delta + 4\Delta'\Delta^2) \Delta' U' U^2 - \Delta\Delta'^2 \Theta U^3 \} \\
& + T' \{ (\Theta^2 - 2\Delta\Phi) U^3 \Delta'^2 - (\Theta\Phi^2 - 2\Theta'\Theta^2 + 5\Theta\Delta\Delta' - \Theta'\Phi\Delta) U^2 U' \Delta' \\
& \quad + (\Theta'^2\Phi - 2\Phi^2\Delta' - \Theta\Theta'\Delta' + 4\Delta\Delta'^2) \Delta U U'^2 - \Delta^2\Delta'\Theta' U'^3 \} \\
& \quad + \Delta'^2\Delta^3 U'^4 + \Delta^2\Delta'^3 U^4 - U U'^3 \Delta^2 \{ \Theta'^3 - 3\Theta'\Phi\Delta' + 3\Theta\Delta'^2 \} \\
& \qquad - U^3 U' \Delta'^2 \{ \Theta^3 - 3\Theta\Phi\Delta + 3\Theta'\Delta^2 \} \\
& \quad + \Delta\Delta' U^2 U'^2 \{ \Phi^3 - 3\Phi\Delta\Delta' + 3\Theta^2\Delta' + 3\Theta'^2\Delta - 3\Theta\Theta'\Phi \}.
\end{aligned}$$

B. 4. Die am Schlusse des Art. 234 gegebenen Formeln für die Coordinaten eines Punktes der Curve U, U' gehen aus der Bestimmung dieses Art. wieder hervor. Wir behandeln die Gleichungen in Tangentialcoordinaten analog. Indem wir die vier Contravarianten des Art. 228 in der Form

$$\begin{aligned}
& \xi_1^2 a_2' a_3' a_4' + \xi_2^2 a_3' a_4' a_1' + \cdots = \sigma', \\
& \xi_1^2 (a_2 a_3' a_4' + a_3 a_4' a_2' + a_4 a_2' a_3') + \xi_2^2 (\cdots) + \cdots = \tau', \\
& \xi_1^2 (a_3 a_4 a_2' + a_4 a_2 a_3' + a_2 a_3 a_4') + \xi_2^2 (\cdots) + \cdots = \tau, \\
& \xi_1^2 a_2 a_3 a_4 + \xi_2^2 a_3 a_4 a_1 + \cdots = \sigma
\end{aligned}$$

schreiben, liefern sie für die ξ_i^2 die Werthe

$$(a_1 a_2')(a_1 a_3')(a_1 a_4') \xi_1^2 = a_1^3 \sigma' - a_1^2 a_1' \tau' + a_1 a_1'^2 \tau - a_1'^3 \sigma, \text{ etc.}$$

Für eine gemeinsame Tangentialebene zu U und U' ist also

$$(a_1 a_2')(a_1 a_3')(a_1 a_4') \xi_1^2 = a_1 a_1' (a_1' \tau - a_1 \tau'), \text{ etc.}$$

Die Coordinaten der Geraden, in welchen diese Ebene eine nächstfolgende gemeinsame Tangentialebene beider Flächen schneidet, oder die Coordinaten einer Erzeugenden der gemeinsamen Developpabeln folgen hieraus durch Verbindung mit

$$2\frac{d\xi_1}{\xi_1} = \frac{a_1' d\tau - a_1 d\tau'}{a_1'\tau - a_1\tau'},\quad 2\frac{d\xi_2}{\xi_2} = \frac{a_2' d\tau - a_2 d\tau'}{a_2'\tau - a_2\tau'} \text{ etc.}$$

und man findet somit durch Bildung der Differenz der beiden angeschriebenen Werthe und Substitution für ξ_1, ξ_2 den Werth der Coordinaten

$$\pi_{12}^2 = a_1 a_1'(a_1 a_2')(a_3 a_4')(a_3'\tau - a_3\tau')(a_4'\tau - a_4\tau');$$

und für die andern Coordinaten der Erzeugenden entsprechende Werthe, mit Unterdrückung eines gemeinsamen Factors. Aus diesen Werthen kann die Tangentialgleichung der den beiden Flächen gemeinsamen Developpabeln gefunden werden.

258. Die Reduction auf die Form einer Summe von Quadraten, welche nach dem Vorigen für zwei quadratische Functionen von n Variabeln im Allgemeinen möglich ist, kann auch auf die Gleichung eines Strahlencomplexes vom zweiten Grade und die die Coordinaten p_{ik} oder π_{ik} verbindende Relation zweiten Grades angewendet werden; es ist der Fall $n = 6$ in specieller Form. Wir wollen die sechs neuen Variabeln durch $x_1, x_2, \ldots x_6$ bezeichnen, so dass die constante Relation in die Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

übergeht, während die Gleichung des Complexes vom zweiten Grade in

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots + k_6 x_6^2 = 0$$

übergeführt werde. Es ist zunächst die geometrische Bedeutung der neuen Variabeln klar zu stellen. Die x_i, als lineare homogene Functionen der p_{ik} respective π_{ik}, stellen gleich Null gesetzt lineare Complexe dar, welche wir als die sechs Fundamentalcomplexe bezeichnen wollen. Die näheren Beziehungen der Fundamentalcomplexe erkennt man aber in folgender Weise. Ist jede der Gleichungen

$$a_1 x_1 + \cdots + a_6 x_6 = 0,\quad b_1 x_1 + \cdots + b_6 x_6 = 0$$

die Gleichung für einen linearen Complex, so liefert die Substitution ihrer Coefficienten a_i respective b_i in die constante Relation der Strahlencoordinaten je einen Ausdruck

$$a_1^2 + \cdots + a_6^2,\quad b_1^2 + \cdots + b_6^2,$$

den man die Invariante des Complexes nennen kann, und dessen Verschwinden aussagen würde, dass der Complex aus allen den Strahlen bestünde, die eine gegebene gerade Linie schneiden. (Vergl. Art. 57.) Betrachtet man aber die constante Relation als eine bilineare Function der x_i und ersetzt in derselben die einen x_i durch die a_i, die andern durch die b_i, so erhält man den Ausdruck

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_6 b_6,$$

die simultane Invariante der Complexe. Für unsere Fundamentalcomplexe sind die Invarianten sämmtlich der positiven Einheit gleich, die simultane Invariante je zweier derselben ist aber gleich Null. Dies drückt nun eine besondere Beziehung der Fundamentalcomplexe zu einander aus, die als Involution bezeichnet worden ist (Art. 134, 4). Denken wir nämlich die beiden Directrixen der durch beide Complexe bestimmten Congruenz oder des gemeinsamen Strahlensystems erster Ordnung und Classe, so bilden die beiden Punkte, welche in den Complexen einer bestimmten Ebene entsprechen, im Falle ihrer Involution mit den Schnittpunkten derselben mit seinen Directrixen eine harmonische Gruppe. Dreht sich eine Ebene um eine Gerade der gemeinschaftlichen Congruenz, so bilden die ihr in den verschiedenen Lagen entsprechenden Punktepaare eine involutorische Reihe in dieser Geraden. Einem jeden der beiden Punkte, welche durch die zwei Complexe in einer beliebigen Ebene bestimmt werden, entspricht in demselben noch eine zweite Ebene; diese Ebene ist für beide Punkte dieselbe, d. h. die Ebenen und die Punkte des Raumes ordnen sich mit Bezug auf zwei lineare Complexe in Involution in Gruppen von zwei Ebenen und zwei auf der Durchschnittslinie derselben liegenden Punkten.

Liegen aber drei lineare Complexe gegenseitig in Involution, so ordnen sich die Ebenen und Punkte des Raumes zu Tetraedern zusammen, welche sich in Bezug auf die durch die drei linearen Complexe bestimmte Fläche zweiten Grades conjugirt sind. Die drei in einer Seitenfläche eines solchen Tetraeders liegenden Ecken desselben sind die dieser Ebene in den drei Complexen entsprechenden Punkte, und die drei in einer Ecke zusammenstossenden Flächen eines solchen Tetraeders die jenem Eckpunkte respective entsprechenden Ebenen. Die Directrixen der Congruenz der beiden Fundamentalcomplexe $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ haben die Coordinaten.

$$\varrho x_1 = 1, \ \varrho x_2 = \pm i, \ \varrho x_3 = 0, \ \varrho x_4 = 0, \ \varrho x_5 = 0, \ \varrho x_6 = 0,$$

d. h. die Directrixen der Congruenz zweier Fundamentalcomplexe gehören den vier übrigen Fundamentalcomplexen an.

Die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = 0$ oder die gleichgeltende $x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$ stellt somit die Gesammtheit der geraden Linien dar, welche eine der beiden Directrixen schneiden; denkt man also die fünfzehn $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5$ linearen Congruenzen, welche die sechs Fundamentalcomplexe erzeugen und ihre dreissig Directrixen, so werden je zwei zusammengehörige der letzteren von zwölf der übrigen geschnitten; insbesondere werden für die drei Congruenzen, welche von allen sechs Fundamentalcomplexen abhängen, die Directrixen jeder von denen der andern geschnitten, oder dieselben bilden die sechs Kanten eines Tetraeders. In der That geht $x_1^2 + \cdots + x_6^2 = 0$ für $y_1 = x_1 + ix_2$, $y_2 = x_1 - ix_2$, $y_3 = x_3 + ix_4$, $y_4 = x_3 - ix_4$; $y_5 = x_5 + ix_6$, $y_6 = x_5 - ix_6$ in $y_1 y_2 + y_3 y_4 + y_5 y_6 = 0$ über. Da sich sechs Elemente in fünfzehn Arten in drei Paare theilen lassen, so bilden die dreissig Directrixen die Kanten von fünfzehn Fundamentaltetraedern, deren Flächen und Ecken sämmtlich von einander verschieden sind.

Je zwei zusammengehörige Directrixen gehören als Gegenkanten dreien dieser Tetraeder an, die übrigen $3 \cdot 4$ Kanten dieser Tetraeder sind die zwölf Directrixen, welche sie schneiden. Je zwei der drei Paare von Punkten, welche diese in einer der beiden Directrixen bestimmen, bilden eine harmonische Gruppe, sie sind also nie alle drei reell; dasselbe gilt für die bezüglichen Seitenflächenpaare der Tetraeder.

Die 1770 Schnittlinien der 60 Tetraederflächen oder Verbindungslinien der 60 Tetraederecken werden gebildet von den 30 durch je 6 Flächen und je 6 Ecken bestimmten also 15fach zählenden Directrixen, von 320 geraden Linien, auf welchen je 3 der Ecken liegen und durch die je 3 der Flächen gehen (die also dreifach zählen), und von 360 geraden Linien, welche je zwei dieser Ecken oder Flächen bestimmen.

Je drei der sechs Fundamentalcomplexe, z. B. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ oder 1, 2, 3 bestimmen eine Fläche zweiten Grades, nämlich ihre eine Regelschaar; die andern drei bestimmen offenbar dieselbe Fläche durch ihre zweite Regelschaar. Da sich die sechs Complexe auf $\frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ oder 10 Arten in zwei Gruppen

von drei theilen lassen, so werden durch die Fundamentalcomplexe 10 Fundamentalflächen zweiten Grades definirt. Je zwei zusammengehörige der 30 Directrixen gehören vieren derselben an und sind in Bezug auf die übrigen sechs zu einander conjugirt; sechs der Flächen enthalten je vier der Kanten eines Fundamentaltetraeders, in Bezug auf die vier übrigen ist das Tetraeder sich selbst conjugirt. Die Fundamentalfläche $(1, 2, 3) \equiv (4, 5, 6)$ wird dargestellt, indem man ausdrückt, dass eine gerade Linie die Fläche berührt, d. h. durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ oder $x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$; denn für $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ als drei lineare Complexe, A_{11}, A_{22}, A_{33} ihre Invarianten und $A_{12}, \cdots$ als ihre simultanen Invarianten ist die Complexgleichung des durch sie bestimmten Hyperboloids

$$0 = \begin{vmatrix} 0, & f_1, & f_2, & f_3 \\ f_1, & A_{11}, & A_{12}, & A_{13} \\ f_2, & A_{21}, & A_{22}, & A_{23} \\ f_3, & A_{31}, & A_{32}, & A_{33} \end{vmatrix}.$$

259. Die geraden Linien, die Ebenen und Punkte des Raumes gruppiren sich in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe zu geschlossenen Systemen.

Sind $a_1, \cdots a_6$ die Coordinaten einer Geraden, so ist $a_1^2 + \cdots + a_6^2 = 0$; eine Relation, welche durch Zeichenwechsel der Coordinaten nicht gestört wird, und also für jede der $2^5 = 32$ Zeichencombinationen $\pm a_1, \pm a_2, \cdots$ eine gerade Linie giebt. Die geraden Linien des Raumes gruppiren sich so zu 32, die in gegenseitiger Beziehung stehen. Indem man sich aus dem Schema

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \pm a_1 & \pm a_2 & \pm a_3 & \pm a_4 & \pm a_5 & \pm a_6 \end{matrix}$$

die zweigliedrigen Determinanten gebildet und gleich Null gesetzt denkt, erkennt man, dass von den 32 Linien

$2 \cdot 15$ mal 16 einem Complex,
$4 \cdot 20$ „ 8 einer Congruenz,
$8 \cdot 15$ „ 4 einer Fläche zweiten Grades

angehören, wo jede der 32 Geraden auf 15 der ersten, 20 der zweiten und 15 der letzten liegt.

Die 32 Geraden theilen sich in zwei Gruppen von 16, jenachdem von ihren Coordinaten eine gerade oder ungerade Zahl gleiches Zeichen besitzt; wenn von einer Geraden aus einer der beiden Gruppen eine ebene Curve erzeugt wird, so bewegen sich die 15 übrigen Linien derselben Gruppe gleichfalls um ebene Curven, indess die 16 Linien der andern Gruppe sich um feste Punkte drehen und also Kegelflächen erzeugen. Gegen eine Linie der einen Gruppe sondern sich die der andern Gruppe in solche, welche ihr in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe, und solche, welche ihr in Bezug auf die zehn Fundamentalflächen conjugirt sind; die Coordinaten jener ersten unterscheiden sich von denen der angenommenen Geraden durch Einen Zeichenwechsel, die der letzten durch drei derselben.

Sei die Gleichung des Strahles, der vom Fundamentalpunkte A_4 nach dem einer gegebenen Ebene in Bezug auf den Complex $x_k = 0$ entsprechenden Punkte derselben geht, also auch die seines Durchstosspunktes in der Ebene $A_1 A_2 A_3$,

$$a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 = 0,$$

so verschwindet wegen

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0$$

der Ausdruck identisch

$$\Sigma(a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3)^2,$$

d. h. (vergl. 59 B.) es liegen die sechs Punkte, die einer beliebigen Ebene in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe entsprechen, in einer Curve zweiter Ordnung.

Ebenso sind die sechs einem beliebigen Punkte entsprechenden Ebenen Tangentialebenen desselben Kegels zweiter Classe.

Die besonderen Ebenen charakterisiren besondere Lagen dieser Punkte; für eine eine Fundamentalfläche berührende Ebene z. B. vertheilen sie sich auf die beiden Erzeugenden der Fundamentalfläche, welche die Ebene enthält.

Die sechs Punkte, welche einer gegebenen Ebene in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe entsprechen, seien 1, 2, 3, 4, 5, 6; einem jeden derselben entsprechen ausser der gegebenen fünf weitere Ebenen, und da die Ebene, welche dem Punkte 1 in x_2 entspricht, mit der Ebene zusammenfällt, welche 2 in x_1 entspricht, so giebt dies im Ganzen 15 neue Ebenen, welche die gegebene in den Verbindungslinien der sechs Punkte schneiden. Die drei

Ebenen (2, 3), (3, 1), (1, 2) schneiden sich in dem Pol der gegebenen Ebene in Bezug auf die Fundamentalfläche (1, 2, 3), und da diese mit der Fläche (4, 5, 6) identisch ist, so schneiden sich die Ebenen (5, 6), (6, 4), (4, 5) in demselben Punkte. Die sechs Ebenen, welche diesem Punkte in den Fundamentalcomplexen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_6 = 0$ entsprechen, fallen mit den Ebenen (2, 3), (3, 1), (1, 2), (5, 6), (6, 4), (4, 5) zusammen und bilden also einen Kegel zweiter Classe, wie dies auch aus der Betrachtung des Sechsecks 123456 hervorgeht.

Mit Bezug auf die Fundamentalcomplexe gruppiren sich also die Ebenen und Punkte des Raumes zu in sich geschlossenen Systemen von 16 Ebenen und 16 Punkten. In jeder der ersten liegen sechs der 16 Punkte, durch jeden der letzten gehen sechs der 16 Ebenen; jene auf einer Curve, diese auf einem Kegel zweiten Grades. Wenn eine der 16 Ebenen gegeben ist, so findet man die 16 Punkte, indem man die ihr in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkte und ihre in Bezug auf die zehn Fundamentalflächen genommenen Pole bestimmt.

Die 16 Ebenen eines solchen Systems schneiden sich in 120 Geraden, welche auch die Verbindungslinien der 16 Punkte sind; sie sondern sich in 15 Gruppen zu 8, die je denselben beiden Fundamentalcomplexen angehören und für welche also die Directrixen derselben gemeinschaftliche Transversalen sind.

Wenn eine der 16 Ebenen durch einen der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder geht, so gehen die 16 Ebenen zu vier durch die Ecken des fraglichen Tetraeders und die 16 Punkte liegen zu vier in den Seitenflächen desselben.

Wird der Complex zweiten Grades auf eines der 15 Fundamentaltetraeder bezogen, so geht nach der Substitution

$$y_1 = x_1 + ix_2, \text{ etc.}$$

in Art. 258 seine Gleichung in der Form über, welche ausser den Quadraten der Strahlencoordinaten — schreiben wir r_{ik} als Vertreter sowohl der p_{ik} als der π_{ik} — nur die Doppelproducte von solchen enthält, die sich auf gegenüberliegende Kanten des Tetraeders beziehen; nämlich

$$a_{12}r_{12}^2 + a_{23}r_{23}^2 + \cdots + a_{34}r_{34}^2 + 2Ar_{\alpha\beta}r_{\gamma\delta} + 2Br_{\beta\gamma}r_{\alpha\delta} \\ + 2Cr_{\gamma\alpha}r_{\beta\delta} = 0.$$

In diese Form lässt sich die Gleichung eines Complexes vom

zweiten Grade durch Transformation der Coordinaten stets überführen; die constante Relation der Strahlencoordinaten wird durch dieselben Substitutionen in sich selbst transformirt. Sie zeigt, dass die gegenüberstehenden Kanten des Tetraeders einander als Polaren in Bezug auf den gegebenen Complex vertauschbar entsprechen. Dies gilt also von allen zusammengehörigen der 30 Kanten solcher Fundamentaltetraeder und nur von diesen.

Von den 60 Eckpunkten und 60 Seitenflächen der Fundamentaltetraeder entsprechen sich die zusammengehörigen gegenseitig als Pol und Polarebene in Bezug auf den Complex.[82]) Auf die folgenreiche Analogie dieser Entwickelungen zur Geometrie der Kugeln (Art. 123 und Note 14) weisen wir in der Note hin.

Für die Flächen zweiter Ordnung als specielle (der Anordnung in zweifach unendlich viele Strahlenbüschel fähige) Complexe zweiten Grades (Art. 81, vergl. Art. 216, 6) erwähnen wir noch, dass zu einem solchen Complex zwei Classen dreigliedriger Gruppen linearer Complexe in Involution liegen, von denen je zwei aus verschiedenen Classen unter sich in Involution sind, — Gruppen, deren specielle lineare Complexe die Geraden beider Regelschaaren der Fläche darstellen; dass jedem linearen Complex ein conjugirter durch die Fläche zugeordnet wird, was zu Gruppen von je drei solchen Paaren oder zu Polarsextupeln führt, deren nichtconjugirte Paare in Involution sind; und dass die Betrachtung zweier Flächen zweiten Grades in diesem Sinne wiederum die Bestimmung eines einzigen gemeinsamen Polarsextupels in der Gestalt des gemeinsamen Poltetraeders liefert, welches endlich in das Hauptebenenquadrupel mit seinen metrischen Relationen übergeht, falls man den einen der beiden Complexe als von verschwindender Determinante und als absolut betrachtet.[83])

XII. Kapitel.

Kegel zweiten Grades und sphärische Kegelschnitte.

260. Wenn ein Kegel — gleichviel von welchem Grade — von einer Kugel durchschnitten wird, welche seinen Scheitel zum Centrum hat, so wird offenbar der von irgend zwei geraden Erzeugenden des Kegels gebildete Winkel von dem die entsprechenden Punkte der Kugel verbindenden Bogen eines grössten Kugelkreises gemessen.

Ist der Kegel vom zweiten Grade, so wird die Durchschnittscurve als ein **sphärischer Kegelschnitt** bezeichnet. Die Analogie vieler Eigenschaften der Kegel zweiten Grades mit entsprechenden Eigenschaften der Kegelschnitte tritt dadurch deutlicher hervor, dass man jene als Eigenschaften sphärischer Kegelschnitte auffasst.[84])

Genau gesprochen ist die Durchschnittslinie eines Kegels n^{ter} Ordnung mit einer Kugel eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung; aber wenn der Kegel mit der Kugel concentrisch ist, so kann diese Curve auf unendlich vielen Wegen in zwei symmetrische und gleiche Theile zerlegt werden, von denen jeder als einer Curve n^{ter} Ordnung analog betrachtet werden kann.

Denn jedem in einer Halbkugel liegenden Punkte der Durchschnittscurve entspricht ein diametral entgegengesetzter Durchschnittspunkt in der andern Halbkugel, und somit jedem Curvenzweige in der einen ein vollkommen symmetrischer in der andern.

Dieser **mehrfachen Möglichkeit der Theilung** entspricht es, dass wir einen sphärischen Kegelschnitt ebensowohl als ein Analogon einer Ellipse als auch einer Hyperbel betrachten können. Der Kegel zweiten Grades schneidet die concentrische Kugel in zwei gleichen einander dia-

metral entgegengesetzten geschlossenen Curven. Eine der Hauptebenen des Kegels schneidet keine von beiden Curven, und die Betrachtung der Halbkugeln, in welche durch sie die Kugel zerfällt, zeigt uns die Curve als eine geschlossene und somit der Ellipse analoge. Für diejenigen Halbkugeln, welche den die Curve schneidenden Hauptebenen des Kegels entsprechen, liegt je eine Hälfte der zwei entgegengesetzten Curven in einer; und insbesondere bildet die die Focallinien des Kegels nicht enthaltende Hauptebene (Art. 166) Halbkugeln, deren jede eine aus zwei entgegengesetzten Zweigen bestehende einer Hyperbel analoge Curve enthält.

Die Durchdringungscurve einer beliebigen Fläche zweiten Grades mit einer concentrischen Kugel ist offenbar auch ein sphärischer Kegelschnitt.

261. Man hat die sphärischen Curven vermittelst sphärischer Coordinatensysteme untersucht, welche nach Analogie des Systems von Cartesius gebildet sind. Man wählte zwei sich rechtwinklig durchschneidende grösste Kreise OX und OY als Coordinatenaxen und fällte von einem beliebigen Punkte der Kugel P Normalen PM, PN auf dieselben; da diese Normalen nicht, wie bei Cartesischen Coordinaten in der Ebene, den ihnen gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $OMPN$ gleich sind, so ist es von unterscheidendem Einflusse in der Ausführung des sphärischen Coordinatensystems, ob wir die Normalen PM, PN selbst oder die von ihnen in den Axen gebildeten Abschnitte OM, ON als Coordinaten ansehen.

Gudermann hat in seiner Abhandlung über die Sphärik[85]) die Tangenten der Abschnitte OM, ON als Coordinaten gewählt.

Wenn man die Tangentenebene der Kugel im Punkte O betrachtet und die Schnittpunkte M_1, N_1, P_1 der geraden Verbindungslinie des Centrums und der Punkte M, N, P mit dieser Ebene bestimmt, so sind OM_1, ON_1 die Cartesischen Coordinaten des Punktes P_1 und zugleich die Tangenten der Bögen OM, ON. Daher ist die Gleichung einer sphärischen Curve in dem Coordinatensystem von Gudermann in der That nur die Gleichung der ebenen Curve nach Cartesischen Coordinaten, in welcher der aus dem Centrum der Kugel über der sphärischen Curve beschriebene Kegel von der Tangentenebene des Anfangspunktes O geschnitten wird, also ihrer Centralprojection aus jenem.

Und wenn wir die Sinus der Normalen PM, PN als Coor-

dinaten wählen, so erhellt in derselben Art, dass die Gleichung einer sphärischen Curve in solchen Coordinaten mit der Gleichung der Orthogonalprojection dieser Curve auf eine der Tangentenebene im Punkte O parallele Ebene übereinstimmt.

Uns scheint es jedoch, dass die Eigenschaften sphärischer Curven einfacher und directer als aus den Gleichungen irgend welcher ebener Curven, in die sie projicirt werden können, aus den Gleichungen der Kegel hervorgehen, welche sie mit den Centrum verbinden. Es entspricht der Geometrie des Strahlen- und Ebenen-Bündels, die derjenigen der Ebene analog ist.

262. Wenn die Coordinaten irgend eines Punktes P der Kugel in die Gleichung einer durch das als Anfangspunkt der Coordinaten gedachte Centrum gehenden Ebene substituirt werden, welche die Kugel in einem grössten Kreise AB schneidet, so bezeichnet das Resultat dieser Substitution die Länge der von P auf diese Ebene gefällten Normalen oder den Sinus des sphärischen Bogens, der durch P normal zu dem grössten Kreise AB gelegt ist,

Mit Hilfe dieses Princips können die Gleichungen von Kegeln in einer Art, welche genau der Interpretationsmethode für die Gleichungen ebener Curven entspricht, als Ausdrucksformen für Eigenschaften sphärischer Curven interpretirt werden.

Wenn nämlich nun $\alpha = 0$, $\beta = 0$ die Gleichungen zweier durch das Centrum gehenden Ebenen bezeichnen, Gleichungen, die man auch als diejenigen der durch sie in der Kugel bestimmten grössten Kreise bezeichnen kann, so repräsentirt

$$\alpha - k\beta = 0$$

einen grössten Kreis, für welchen die Sinus der Normalen, die man von einem beliebigen unter seinen Punkten auf die grössten Kreise $\alpha = 0$, $\beta = 0$ fällen kann, in einem constanten Verhältnisse stehen, d. i. einen grössten Kreis, dessen Ebene den von jenen beiden Ebenen gebildeten Winkel in zwei Theile zerlegt, deren Sinus in eben demselben Verhältnisse sind.

Es bezeichnen ferner $\alpha - k\beta = 0$, $\alpha - k'\beta = 0$ Bögen, die mit $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ein Büschel von dem Doppelverhältniss $k : k'$ bilden, und speciell $\alpha - k\beta = 0$, $\alpha + k\beta = 0$ Bögen, welche mit jenen ein harmonisches Büschel bestimmen.

Es ist zu bemerken, dass für A' als den Mittelpunkt eines Bogens AB der vierte harmonische Punkt B' zu A', A und B

ein von A' um 90^0 entfernter Punkt ist. Denn wenn wir diese Punkte mit dem Centrum C verbinden, so ist CA' die innere und daher nothwendig CB' die äussere Halbirungslinie des Winkels ACB. Wenn umgekehrt zwei entsprechende Punkte einer harmonischen Gruppe von einander um 90^0 entfernt sind, so ist jeder von ihnen gleich entfernt von den beiden andern Punkten der Gruppe, respective von dem einen und dem Antipodenpunkte des andern.

Endlich mag hier erwähnt sein, dass für x', y', z' als die Coordinaten irgend eines Punktes der Kugel die Gleichung

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

den grössten Kreis darstellt, der jenen Punkt zum Pol hat, weil sie die Gleichung der durch das Centrum gehenden Normalebene zur geraden Verbindungslinie jenes Punktes mit dem Centrum ist.

263. Nach dem Vorigen können wir die bei ebenen Dreiecken angewendeten Methoden (vergl. „Kegelschnitte" Art. 62 f.) direct auf sphärische Dreiecke übertragen.

Wenn also $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks bezeichnen, so sind

$$l\alpha = m\beta = n\gamma$$

die Gleichungen von drei sich in einem Punkte schneidenden grössten Kreisen, die von den Eckpunkten des Dreiecks ausgehen, und

$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0, \quad n\gamma + l\alpha - m\beta = 0, \quad l\alpha + m\beta - n\gamma = 0$$

die Gleichungen der Seiten des neuen Dreiecks, welches durch die Verbindungsbögen der Durchschnittspunkte dieser Kreise mit den respectiven Gegenseiten des gegebenen Dreiecks entsteht; endlich ist $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ die Gleichung des grössten Kreises, welcher die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten dieser beiden Dreiecke mit einander verbindet, d. h. der Harmonicale jenes Punktes.

Die Gleichungen $\alpha = \beta = \gamma$ repräsentiren die drei Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks, und wenn A, B, C diese Winkel selbst bezeichnen, so ist leicht zu erkennen, dass wie bei ebenen Dreiecken

$$\alpha \cos A = \beta \cos B = \gamma \cos C$$

die drei Höhen des Dreiecks ausdrücken.

Es bleibt ferner wahr, dass, wenn die Normalen von den Ecken eines ersten Dreiecks auf die Seiten eines zweiten sich in einem Punkte schneiden, auch die Normalen von den Ecken des zweiten auf die Seiten des ersten durch einen Punkt gehen — ganz wie bei ebenen Dreiecken.

Die drei durch die gegenüberliegenden Ecken gehenden Halbirungsbögen der Seiten sind ausgedrückt durch

$$\alpha \sin A = \beta \sin B = \gamma \sin C.$$

Der Bogen

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

geht durch die drei Punkte der Seiten des Dreiecks, in denen jede durch die gemeinschaftliche Halbirungslinie der beiden andern Seiten geschnitten wird, d. i. durch diejenigen Punkte der Seiten, von denen jeder um 90^0 von der Mitte seiner Seite entfernt ist; denn

$$\alpha \sin A \pm \beta \sin B = 0$$

schneidet $\gamma = 0$ in zwei Punkten, welche in Bezug auf ihre Durchschnittspunkte mit den Linien $\alpha = 0$, $\beta = 0$ harmonisch conjugirt sind, und da der eine von den beiden der Mittelpunkt jener Strecke ist, so ist der andere nach Art. 262 um 90^0 von ihm entfernt.

Aus dem Gesagten folgt, dass der Durchschnittspunkt von

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

mit irgend einer Seite des Dreiecks der Pol des zu dieser Seite normalen und ihren Mittelpunkt enthaltenden grössten Kreises ist, und dass der Durchschnittspunkt der drei Normalen dieser Art, d. h. das Centrum des umgeschriebenen Kreises, der Pol des grössten Kreises

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

ist.

Die Gleichungen der Verbindungslinien der Dreiecks-Ecken mit dem Centrum des umgeschriebenen Kreises werden in der Form gefunden

$$\frac{\alpha}{\sin \frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\beta}{\sin \frac{1}{2}(C+A-B)} = \frac{\gamma}{\sin \frac{1}{2}(A+B-C)}.$$

264. Die Bedingung, unter welcher zwei grösste Kreise

$$ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0$$

rechtwinklig zu einander sind, ist offenbar

$$aa' + bb' + cc' = 0;$$

und die Substitution der Werthe von α, β, γ in Function der x, y, z liefert die analoge Bedingung für die durch

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$$

dargestellten grössten Kreise in der ganz der planimetrischen entsprechenden Form

$$aa' + bb' + cc' - (bc' + b'c)\cos A - (ca' + c'a)\cos B - (ab' + a'b)\cos C = 0.$$

In analoger Weise findet man den Sinus des durch einen gegebenen Punkt gehenden und zu dem Bogen

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

normalen Bogens, indem man die Coordinaten des Punktes in die linke Seite dieser Gleichung einsetzt und das Substitutionsresultat durch die Quadratwurzel von

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A - 2ca\cos B - 2ab\cos C$$

dividirt.

265. Den vorigen Zurückweisungen auf das ebene Dreieck oder die dreiseitige Ecke schliessen wir im Uebergange zu Gleichungen zweiten Grades eine solche an auf Entwickelungen über die auf derselben hyperboloidischen Fläche liegenden Geraden des Tetraeders, z. B. als Anwendung des Satzes von Art. 155 auf den Fall, wo die Fläche zweiten Grades der imaginäre Kreis im Unendlichen ist. Wenn man durch das Centrum einer Kugel zu den vier Höhen des Tetraeders und den vier Erzeugenden desselben Hyperboloids von dem zweiten Systeme Parallelen gezogen denkt, so bestimmen dieselben acht Punkte eines sphärischen Kegelschnittes, und zwar sind die der vier ersteren die Pole der vier Seiten eines sphärischen Vierecks und die der vier letzteren die Höhendurchschnittspunkte der vier aus den Seiten desselben gebildeten sphärischen Dreiecke.

Für das ebene Viereck, als auf einer Kugel von unendlich grossem Halbmesser gelegen, verschwinden die Pole der vier Seiten in der unendlich entfernten Geraden und die vier Höhendurchschnittspunkte liegen daher auf einer zweiten Geraden.

Wir betrachten dann zuerst die Gleichung

$$\alpha\gamma = m\beta^2$$

ebensowohl als Gleichung eines Kegels vom zweiten Grade, für

welchen die Ebenen $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ Tangentenebenen sind, während die Ebene $\beta = 0$ beide Berührungsseiten derselben enthält, wie als Gleichung eines sphärischen Kegelschnittes, für den die Bögen $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ Tangenten und der Bogen $\beta = 0$ die zugehörige Berührungssehne bezeichnen. Die Gleichung sagt offenbar aus, dass das Product der Sinus der Normalen, welche von einem beliebigen Punkte des sphärischen Kegelschnittes auf zwei seiner Tangentenbögen gefällt werden, zu dem Quadrat des Sinus der von demselben Punkte auf den Bogen zwischen den Berührungspunkten oder die Berührungssehne gefällten Normale in constantem Verhältnisse steht.

Ebenso drückt die Gleichung $\alpha\gamma = k\beta\delta$ aus, dass das Product der Sinus der von einem Punkte eines sphärischen Kegelschnittes auf zwei Gegenseiten eines ihm eingeschriebenen Vierecks gefällten Normalen zu dem Producte der Sinus der von ihm auf die beiden andern Gegenseiten desselben gefällten Normalen in einem constanten Verhältnisse steht. Und man leitet aus dieser Eigenschaft ganz ebenso wie in der Theorie der Kegelschnitte das Gesetz von der Gleichheit des Doppelschnittverhältnisse der Strahlenbüschel ab, welche vier feste Punkte eines sphärischen Kegelschnittes mit irgend einem fünften Punkte desselben verbinden; ebenso natürlich auch übertragen sich die Beweise einer grossen Zahl anderer hiermit verbundener Theoreme von den ebenen auf die sphärischen Kegelschnitte. („Kegelschn.“ Kap. XIV—XVII.) Z. B. entspringen aus Art. 325 der „Kegelschnitte“ die Sätze über die drei Systeme doppelt berührender kleiner Kugelkreise, denen der sphärische Kegelschnitt den Ursprung giebt: Das Verhältniss der Sinus zwischen der Tangente von einem Punkte des Kegelschnittes an einen doppeltberührenden Kreis und der Normale auf die Berührungssehne des letzteren von demselben Punkte ist constant. Die Summe oder Differenz der Tangenten von einem Punkte des Kegelschnittes an zwei doppeltberührende Kreise des nämlichen Systems ist constant. Und supplementär: Das Verhältniss der Sinus der Winkel, unter welchen eine Tangente des Kegelschnittes einen doppeltberührenden Kreis schneidet, und der Normale der Tangente aus dem in Bezug auf den Kegelschnitt genommenen Pol der Berührungssehne ist constant. Die Summe oder Differenz der

Winkel, unter denen eine Tangente zwei doppeltberührende Kreise desselben Systems schneidet, ist constant.

266. Wenn $\alpha = 0$, $\beta = 0$ die Ebenen der Kreisschnitte oder die cyklischen Ebenen eines Kegels darstellen, so ist nach Art. 105 f. die Gleichung desselben von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 = k\alpha\beta,$$

und die Anwendung der vorigen Interpretation auf dieselbe zeigt, dass das Product der Sinus der von irgend einem Punkte eines sphärischen Kegelschnittes auf seine cyklischen Bögen gefällten Normalen einen constanten Werth hat. Oder: Wenn die Basis eines sphärischen Dreiecks und das Product der Cosinus seiner Seiten bekannt sind, so ist der Ort seiner Spitze ein sphärischer Kegelschnitt, welcher diejenigen grössten Kreise zu seinen cyklischen Bögen hat, deren Pole mit den Endpunkten der gegebenen Basis zusammenfallen.

Die Form der Gleichung zeigt überdies, dass die cyklischen Bögen sphärischer Kegelschnitte den Asymptoten der ebenen Kegelschnitte entsprechen.

Aus jeder Eigenschaft eines sphärischen Kegelschnittes ergiebt sich eine andere durch die Betrachtung des sphärischen Kegelschnittes, welcher dem Reciprocalkegel des gegebenen Kegels entspricht. So ward im Art. 137 bewiesen, dass die cyklischen Ebenen eines Kegels zu den Focallinien des Reciprocalkegels normal sind. Wenn wir daher die Punkte, in denen die Focallinien des Kegels die Kugel schneiden, die Brennpunkte des sphärischen Kegelschnittes nennen, so ergiebt sich aus der in diesem Art. bewiesenen Eigenschaft die andere, dass das Product der Sinus der Normalen, die von den beiden Brennpunkten auf irgend eine Tangente eines sphärischen Kegelschnittes gefällt werden, von constantem Werthe ist.

267. Wenn irgend ein grösster Kreis einen sphärischen Kegelschnitt in den Punkten P, Q und die cyklischen Bögen desselben in den Punkten A, B schneidet, so ist $AP = BQ$.

Diese Eigenschaft sphärischer Kegelschnitte ergiebt sich auf demselben Wege aus dem im letzten Art. Bewiesenen, wie die entsprechende Eigenschaft der ebenen Hyperbel bewiesen ist. Das

Verhältniss der Sinus der von P und Q auf $\alpha = 0$ gefällten Normalen ist dem Verhältniss der Sinus der Normalen gleich, welche von Q und P auf $\beta = 0$ gefällt werden; und da jene ersten Normalen in dem Verhältnisse $\sin AP : \sin AQ$ zu einander stehen, so ist

$$\sin AP : \sin AQ = \sin BQ : \sin BP,$$

woraus leicht die Gleichung $AP = BQ$ folgt.

Es entspricht dieser Eigenschaft ferner die reciproke, dass die zwei von irgend einem Punkte an einen sphärischen Kegelschnitt gezogenen Tangenten mit denjenigen Bögen gleiche Winkel einschliessen, welche diesen Punkt mit den beiden Brennpunkten desselben verbinden.

Es ist ein specieller Fall des vorigen Theorems, dass der zwischen den beiden cyklischen Bögen eines sphärischen Kegelschnittes liegende Theil einer Tangente desselben im Berührungspunkte halbirt wird.

Man kann diesen Satz auch direct aus der Form der Gleichung der Tangente

$$2(xx' + yy' + zz') = (\alpha'\beta + \alpha\beta')$$

ableiten. Denn diese Form zeigt, dass die Tangente in irgend einem Punkte construirt wird, indem man diesen Punkt mit dem Durchschnitte seiner nach Art. 262 durch

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

dargestellten Polare mit der Geraden

$$\alpha'\beta + \alpha\beta' = 0$$

verbindet, welche letzte Linie die vierte Harmonicale zu den cyklischen Bögen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und dem nach ihrem Durchschnitte vom gegebenen Punkte aus gezogenen ist. Da nun der gegebene Punkt von dem ihm harmonisch conjugirten in Bezug auf die beiden Durchschnittspunkte seiner Tangente mit dem cyklischen Bogen des Kegelschnittes um 90^0 absteht, so ist er von diesen Punkten selbst gleichweit entfernt. (Art. 262.)

Nach dem Gesetze der Reciprocität entspricht dem soeben erörterten Satze der andere, dass die Verbindungslinien eines Punktes eines sphärischen Kegelschnittes mit den beiden Brennpunkten desselben gleiche Winkel mit der Tangente des Punktes einschliessen.

268. Aus dem Umstande, dass der in einer beliebigen Tan-

gente durch die cyklischen Bögen bestimmte Abschnitt im Berührungspunkte halbirt wird, kann durch die Methode des Unendlichkleinen (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 257) direct erkannt werden, dass jede Tangente eines sphärischen Kegelschnittes mit den cyklischen Bögen ein Dreieck von constantem Inhalte bildet, oder ein Dreieck, für welches die Summe der Basiswinkel unveränderlich ist. Man erkennt dieselbe Wahrheit trigonometrisch daraus, dass das Product der Sinus der auf die cyklischen Bögen gefällten Normalen constant ist. Denn wenn wir den Abschnitt der Tangente c und die von ihr mit den cyklischen Bögen gebildeten Winkel A und B nennen, so sind die Sinus der Normalen auf α und β respective $\sin \frac{1}{2}c \sin A$, $\sin \frac{1}{2}c \sin B$; und für das Dreieck von der Basis c und den anliegenden Winkeln A und B giebt die sphärische Trigonometrie

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}c \sin A \sin B = - \cos S \cos (S - C),$$

und da C bekannt ist, so ist auch S, die halbe Summe der Winkel, bekannt.

Das Gesetz der Reciprocität ergiebt dann weiter, dass die Summe der Bögen constant ist, welche die Brennpunkte mit einem beliebigen Punkte des sphärischen Kegelschnittes verbinden.

Dies Ergebniss kann überdies durch die Methode des Unendlichkleinen aus dem Satze abgeleitet werden, nach welchem die Focalstrahlen des Berührungspunktes mit der Tangente gleiche Winkel bilden*). (Vergl. „Kegelschnitte“ Art. 253.)

*) Man kann hierbei besonders deutlich sehen, dass ein sphärischer Kegelschnitt ebensowohl als Ellipse, wie als Hyperbel betrachtet werden kann. Jede der Focallinien schneidet die Kugel in zwei diametral entgegengesetzten Punkten. Wenn wir dann zwei von ihnen als Brennpunkte wählen, welche in einer und derselben von den geschlossenen Curven liegen, welche der Kegel mit der Kugel bestimmt, so ist die Summe der Focaldistanzen constant. Wenn wir aber für eine der Focaldistanzen FP die auf den diametral entgegengesetzten Punkt bezügliche einführen, so ist wegen $F'P = 180^0 - FP$ die Differenz der Focaldistanzen constant.

Wir erkennen in derselben Art, dass eine veränderliche Tangente mit den cyklischen Bögen Winkel bildet, deren Differenz constant ist, wenn wir für einen der im Anfange dieses Artikels betrachteten Winkel sein Supplement einführen.

269. Wir können umgekehrt den Ort eines Punktes auf der Kugelfläche bestimmen, für welchen die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten der Kugelfläche constant ist.

Die Gleichung $\cos(\varrho + \varrho') = \cos a$ kann in der Form

$$\cos^2\varrho + \cos^2\varrho' - 2\cos\varrho\cos\varrho'\cos a = \sin^2 a$$

geschrieben werden. Wenn daher $\alpha = 0$, $\beta = 0$ die Ebenen bezeichnen, welche die Polarebenen der zwei gegebenen Punkte sind, so ist wegen $\alpha = \cos\varrho$ die Gleichung des Ortes

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos a = \sin^2 a(x^2 + y^2 + z^2).$$

Und um zu beweisen, dass die Ebenen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ zu den Focallinien dieses Kegels normal sind, hat man nur zu zeigen, dass die zu einer von diesen Ebenen parallelen Schnitte in der Normallinie zu ihr einen Brennpunkt haben. Sind also $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$ zwei Ebenen, welche normal zu einander und zur Ebene $\alpha = 0$ sind, also durch die Linie hindurchgehen, deren Charakter als Focallinie wir nachweisen wollen, so ist wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2$$

die Gleichung des Ortes

$$\sin^2 a(\alpha'^2 + \alpha''^2) = (\beta - \alpha\cos a)^2.$$

Wenn dieser Ort dann durch eine zu $\alpha = 0$ parallele Ebene geschnitten wird, so ist durch $\alpha'^2 + \alpha''^2$ das Quadrat der Entfernung eines Punktes dieses Schnittes vom Durchschnitt von $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$ ausgedrückt, und wir sehen, dass diese Entfernung zu derjenigen Entfernung in einem constanten Verhältnisse steht, in welcher er von der Durchschnittslinie derselben Ebene mit $\beta - \alpha\cos a = 0$ ist. Diese Linie ist daher die Directrix des Schnittes für den Punkt (α', α'') als Brennpunkt.

Wir erkennen so auch, dass die allgemeine Gleichung eines Kegels, welcher die Linie xy zur Focallinie hat, von der Form

$$x^2 + y^2 = (ax + by + cz)^2$$

ist, und folgern daraus sodann, dass der Sinus der Entfernung eines Punktes eines sphärischen Kegelschnittes vom Brennpunkte zu dem Sinus der Entfernung desselben Punktes von einem gewissen Directrixbogen in constantem Verhältniss ist.

270. Irgend zwei Tangenten des sphärischen Kegel-

schnittes schneiden die cyklischen Bögen in vier Punkten, welche in einem Kreise liegen.

Denn wenn die Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $R = 0$ zwei Tangenten und ihre Berührungssehne repräsentiren, so ist $LM = R^2$ die Gleichung des sphärischen Kegelschnittes. Da sie aber mit

$$\alpha\beta = x^2 + y^2 + z^2$$

identisch sein muss, so ist $\alpha\beta - LM$ mit $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ identisch; und während die letztere Grösse, gleich Null gesetzt, einen kleinen Kreis darstellt, welcher mit $R = 0$ denselben Pol hat, so zeigt die Form $\alpha\beta - LM = 0$, dass dieser Kreis dem Vierseit $\alpha L \beta M$ umgeschrieben ist.

Die Reciprocität ergiebt, dass die Focalstrahlen zweier Punkte eines sphärischen Kegelschnittes ein sphärisches Viereck bilden, welches einem kleinen Kugelkreise umgeschrieben ist.

Aus dieser Eigenschaft kann dann mittelst der Bemerkung, dass die Summe oder Differenz zweier Gegenseiten in einem solchen Viereck der Summe oder Differenz der beiden andern Gegenseiten desselben gleich ist, der Satz abgeleitet werden, dass die Summe oder Differenz der Brennpunktsdistanzen für die Punkte eines sphärischen Kegelschnittes constant ist.

271. Aus den soeben für Kegel bewiesenen Eigenschaften können ferner Eigenschaften abgeleitet werden, welche allen Flächen zweiten Grades angehören. Z. B.:

Das Product der Sinus der Winkel, die eine Erzeugende eines Hyperboloids mit den Ebenen der Kreisschnitte bildet, ist constant.

Denn unter den Erzeugenden des Asymptotenkegels ist eine zu der betrachteten Erzeugenden des Hyperboloids parallel und die Kreisschnitte dieses Kegels sind dieselben, wie die des Hyperboloids.

Da ferner die Focallinien des Asymptotenkegels die Asymptoten der Focalhyperbel sind, so folgt aus Art. 266, dass die Summe oder Differenz der Winkel constant ist, welche eine Erzeugende des Hyperboloids mit den Asymptoten der Focalhyperbel einschliesst.

Ferner: Wenn für einen Centralschnitt einer Fläche zweiten Grades eine der Axen gegeben ist, so ist da-

mit die Summe oder Differenz der Winkel gegeben, welche seine Ebene mit den Ebenen der Kreisschnitte einschliesst.

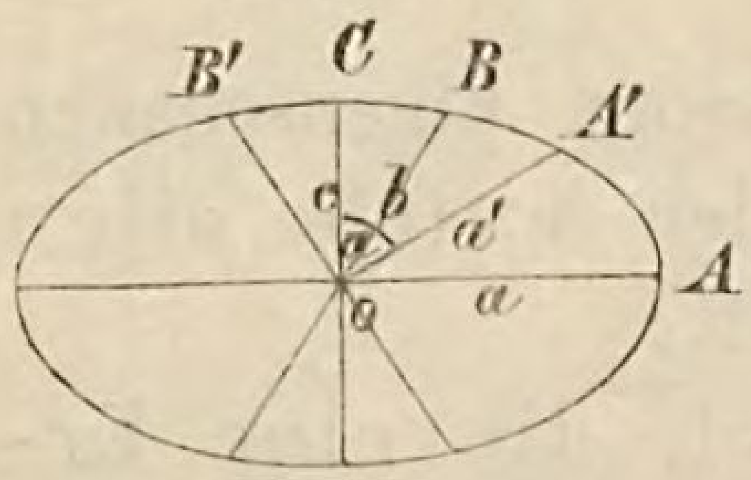
Denn nach Art. 104 berührt die Ebene eines Centralschnittes von gegebener Axe einen mit der gegebenen Fläche concyklischen Kegel, und das eben ausgesprochene Theorem ist daher eine Folge von Art. 269.

Wir bekommen aber für die Summe oder Differenz dieser Winkel einen Ausdruck in Function der gegebenen Axe, indem wir den durch ihre grösste und kleinste Axe gehenden Hauptschnitt der Fläche betrachten. Wir erhalten die cyklischen Ebenen, wenn wir in denselben die Halbdurchmesser OB, OB' eintragen, deren Länge der mittleren Halbaxe b gleich ist. Die durch diese Linien und normal zur Ebene der Figur gelegten Ebenen sind die cyklischen Ebenen.

Für irgend einen Halbdurchmesser a', der mit OC den Winkel α einschliesst, gilt dann die Relation

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\cos^2\alpha}{c^2} + \frac{\sin^2\alpha}{a^2}.$$

Fig. 10.



Nun ist der Halbdurchmesser a' offenbar Axe desjenigen Schnittes, welcher durch ihn normal zur Ebene der Figur gelegt wird, und α ist für $a' > b$ die halbe Summe der Winkel BOA' und $B'OA'$, welche die Ebene des Schnittes mit den cyklischen Ebenen bildet; es ist dagegen für $a' < b$, weil alsdann OA' zwischen den Linien OB und OB' gelegen ist, die halbe Differenz derselben Winkel. Und diese Summe oder Differenz ist für alle Schnitte von derselben Axe dieselbe. Sind daher a', b' die Axen eines Centralschnittes, und θ, θ' die Winkel, welche er mit den cyklischen Ebenen einschliesst, so haben wir

$$\frac{1}{b'^2} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\theta - \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta - \theta')}{a^2},$$

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\theta + \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta + \theta')}{a^2}.$$

Durch Subtraction entspringt daraus

$$\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{a'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin\theta \sin\theta',$$

d. h. die Differenz der Quadrate der reciproken Werthe der Axen eines Centralschnittes ist dem Producte der Sinus der Winkel proportional, welche seine Ebene mit den cyklischen Ebenen der Fläche einschliesst.

272. Wir sahen im Art. 267, dass für zwei sphärische Kegelschnitte von denselben cyklischen Bögen der in einer Tangente des einen vom andern bestimmte Abschnitt im Berührungspunkte halbirt wird, und erkennen daraus durch die Methode des Unendlichkleinen, dass die Tangenten des einen im andern ein Segment von constanter Fläche bestimmen. (Vergl. „Kegelschn." Art. 257.)

Wenn ferner zwei sphärische Kegelschnitte dieselben Brennpunkte haben, so sind die Tangenten, welche man durch irgend einen Punkt des äussern von ihnen nach dem innern ziehen kann, gleich geneigt gegen die entsprechende Tangente des ersten in jenem Punkte; und es ist daher nach der Methode des Unendlichkleinen (a. a. O. Art. 265) der Ueberschuss der Summe dieser zwei Tangenten über den zwischen ihren Berührungspunkten gelegenen Bogen des innern Kegelschnitts constant. Man erkennt dies Theorem als das reciproke von dem, welches wir im Eingange des Artikels aussprachen und als solches ist es in der That zuerst erhalten worden.[86])

273. Man soll den Ort des Durchschnittes von zwei sich rechtwinklig durchschneidenden Tangenten eines sphärischen Kegelschnittes bestimmen.

Die Aufgabe ist identisch mit der andern auf Kegel bezüglichen, welche den Kegel zu bestimmen verlangt, der von der Durchschnittslinie zweier zu einander rechtwinkliger Tangentenebenen eines gegebenen Kegels

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0$$

erzeugt wird. Sind nun die Richtungswinkel der Normalen zu diesen Tangentenebenen $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$, so erfüllen sie die Relationen

$$A\cos^2\alpha' + B\cos^2\beta' + C\cos^2\gamma' = 0,$$
$$A\cos^2\alpha'' + B\cos^2\beta'' + C\cos^2\gamma'' = 0;$$

und wir erhalten überdies für α, β, γ als die Richtungswinkel der ihnen gemeinschaftlichen Normalen die andern Relationen

$$\cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha'', \text{ etc.},$$

so dass die Gleichung des Ortes durch Addition der vorigen Gleichungen in der Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = (A + B + C)(x^2 + y^2 + z^2)$$

gefunden wird. Derselbe ist daher ein mit dem Reciprocalkegel des gegebenen concyklischer Kegel.

Es entspricht diesem Ergebniss das reciproke, dass die Enveloppe einer Sehne von 90^0 in einem sphärischen Kegelschnitte ein mit dem Reciproken desselben confocaler sphärischer Kegelschnitt ist.

274. Man soll den Ort der Fusspunkte der Normalen finden, welche von dem Brennpunkte eines sphärischen Kegelschnittes auf seine Tangenten gefällt werden.

Die Methode zur Beantwortung dieser Frage ist ganz dieselbe, wie sie bei der entsprechenden Aufgabe der analytischen Geometrie der Ebene angewendet wird, und die Verschiedenheit tritt nur in der Interpretation des Resultates hervor.

Wenn die Gleichung des sphärischen Kegelschnittes nach Art. 260 in der Form

$$x^2 + y^2 = t^2, \quad (t \equiv ax + by + cz),$$

geschrieben wird, so ist die Gleichung der Tangente

$$xx' + yy' = tt'$$

und die durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$ gehende Normale dieser Linie ist durch

$$(x' - at')y - (y' - bt')x = 0$$

ausgedrückt. Die Einführung der aus diesen Gleichungen für x', y', t' sich ergebenden Werthe in

$$x'^2 + y'^2 = t'^2$$

liefert für den gesuchten Ort die Gleichung

$$(x^2+y^2)\{(a^2+b^2-1)(x^2+y^2)+2cz(ax+by)+c^2z^2\}=0,$$

in welcher die in den Klammern stehende Grösse, für sich mit Null verglichen, einen Kegel bezeichnet, dessen Kreisschnitte der Ebene z parallel sind.

275. Wir haben im Art. 263 erkannt, dass die Relation

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

nicht wie in der Ebene eine identische Relation zwischen den

Normalen von irgend einem Punkte aus ist. Es bleibt daher noch zu untersuchen, wie die von irgend einem Punkte auf drei feste grösste Kreise gefällten Normalen mit einander verbunden sind. Wir haben jedoch diese Aufgabe implicite bereits gelöst, da jede der drei Normalen das Complement einer der drei Entfernungen des Punktes von den Polen der Seiten des Fundamentaldreiecks ist.

Sind daher durch a, b, c die Seiten, durch A, B, C die Winkel dieses Dreiecks bezeichnet, so sind die Sinus α, β, γ der von irgend einem Punkte auf die Seiten gefällten Normalen durch die folgende Relation vereinigt, die nur eine Transformation der im Art. 38 gegebenen ist,

$$\alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C$$
$$+ 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos a + 2\gamma\alpha \sin C \sin A \cos b + 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos c$$
$$= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C.$$

In dieser Form repräsentirt die Gleichung eine zwischen den Sinus der drei Bögen α, β, γ bestehende Relation.

Wenn wir eine Relation zwischen den Normalen erhalten wollen, welche von einem Punkte der Kugel auf die durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

dargestellten Ebenen gefällt werden, so haben wir nur die rechte Seite der vorigen Gleichung mit r^2 zu multipliciren, und erkennen, dass diese Gleichung in α, β, γ die Transformation der elementaren Relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ist.

Es erhellt daraus, dass die linke Seite der vorigen Gleichung, für sich mit Null verglichen, eine Transformation von

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

und daher der Ausdruck des imaginären Kreises ist, in welchem zwei concentrische Kugeln sich schneiden, mit andern Worten der Ausdruck des imaginären Kreises im Unendlichen. (Vergl. Art. 152.) Der absolute Kegelschnitt der Euklidischen Metrik (Art. 248) liegt ganz auf jeder Kugel, während jede Ebene nur zwei Punkte von ihm enthält. Deshalb besteht in der Sphärik oder in der Geometrie des Strahlen- und Ebenen-Bündels die Reciprocität auch bezüglich der metrischen Relationen, für welche sie in der Planimetrie und Stereometrie

mangelt. Ein gutes Beispiel für diesen Unterschied bietet der Satz in Art. 395, 2 der Kegelschnitte über den Zusammenhang der Fusspunkte der Quasi-Normalen aus einem Punkte dar. Es liefert für die sphärischen Kegelschnitte mit der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes Normale den Satz über die Fusspunkte und Tangenten zu vier Normalen aus einem Punkte: Die sechs Seiten des eingeschriebenen Vierecks sind die Harmonicalen der Ecken des umgeschriebenen Vierseits in Bezug auf das Axendreieck des sphärischen Kegelschnittes. Denn dieses ist das ihm mit dem imaginären Kreise J gemeinsame Tripel harmonischer Pole und Polaren. Der a. a. O. gegebene Beweis überträgt sich unverändert hierher.

Diese Untersuchung erlaubt uns, die Gleichung der Kugel zu entwickeln, die einem gegebenen Tetraeder eingeschrieben ist. Wir bezeichnen durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

seine Flächen, und denken durch das Centrum der Kugel parallel zu den drei ersten unter ihnen Ebenen gelegt, so dass die von einem Punkte der Kugel auf sie gefällten Normalen die Werthe $\alpha - r$, $\beta - r$, $\gamma - r$ erhalten. Die Gleichung der Kugel ist

$$(\alpha - r)^2 \sin^2 A + (\beta - r)^2 \sin^2 B + \text{etc.}$$
$$= r^2 (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C).$$

Sind dann L, M, N, P die Inhaltszahlen der vier Flächen, so gilt die Identität

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + P\delta = r(L + M + N + P);$$

wir können mit Hilfe derselben r eliminiren und das Resultat ist auf die Form des Art. 242 reducibel.

276. Die Gleichung eines beliebigen kleinen Kugelkreises, oder, was dasselbe ist, eines geraden Kegels, wird in folgender Weise gefunden. Der Sinus der Entfernung irgend eines seiner Punkte von der Polare des Centrums ist constant, d. h. wenn $\alpha = 0$ diese Polare bezeichnet, ist die Gleichung des Kreises

$$\alpha^2 = \cos^2 \varrho (x^2 + y^2 + z^2).$$

Da hiernach alle Kreise der Kugel, welche nicht grösste Kreise sind, durch Gleichungen von der Form $S = \alpha^2$ gegeben sind, so sind alle ihre Eigenschaften specielle Fälle von denen

der Kegelschnitte, die mit einem gegebenen Kegelschnitte eine doppelte Berührung haben.

Man kann leicht die Theorie der Invarianten auf solche kleine Kugelkreise anwenden. Sind

$$x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 \sec^2 \varrho = 0, \quad (S = 0),$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2 \sec^2 \varrho' = 0, \quad (S' = 0),$$

zwei Kreise, so bilden wir die Bedingung, unter welcher

$$kS + S' = 0$$

in lineare Factoren zerfällt. Für die Form derselben

$$k^3 \Delta + k^2 \Theta + k\Theta' + \Delta' = 0$$

ist

$$\Delta = -\tan^2 \varrho, \quad \Delta' = -\tan^2 \varrho'$$
$$\Theta = \sec^2 \varrho \sec^2 \varrho' \sin^2 D - 2\tan^2 \varrho - \tan^2 \varrho',$$
$$\Theta' = \sec^2 \varrho \sec^2 \varrho' \sin^2 D - 2\tan^2 \varrho' - \tan^2 \varrho,$$

für D als die Entfernung der Centra. Für zwei Kreise in einer Ebene sind die entsprechenden Werthe

$$\Delta = -r^2, \quad \Delta' = -r'^2,$$
$$\Theta = D^2 - 2r^2 - r'^2,$$
$$\Theta' = D^2 - 2r'^2 - r^2.$$

Wenn daher eine Invariantenrelation zwischen zwei Kreisen in der Ebene als eine Function ihrer Halbmesser und ihrer Centraldistanz ausgedrückt ist, so wird die entsprechende Relation für zwei Kreise einer Kugel aus ihr erhalten, indem man für

$$r, \; r', \; D \text{ die Werthe } \tan \varrho, \; \tan \varrho', \; \sec \varrho \sec \varrho' \sin D$$

einsetzt.

So berühren sich zwei Kreise in einer Ebene, wenn die Discriminante der obigen cubischen Gleichung verschwindet, und die Bedingung der Berührung ist daher

$$\text{entweder } D = 0 \text{ oder } D = r \pm r'.$$

Die der letzteren Bedingung entsprechende Relation für Kugelkreise ist somit

$$\tan \varrho \pm \tan \varrho' = \sec \varrho \sec \varrho' \sin D \text{ oder } \sin D = \sin (\varrho \pm \varrho').$$

Wenn ferner zwei Kreise in einer Ebene dem nämlichen Dreieck respective eingeschrieben und umgeschrieben sind, so besteht die Invariantengleichung („Kegelschnitte" Art. 364)

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta'$$

und es entspringt aus ihr zwischen den Halbmessern und der Centraldistanz beider Kreise die Relation

$$D^2 = R^2 - 2Rr.$$

Ihr entspricht für den eingeschriebenen und den umgeschriebenen Kreis eines sphärischen Dreiecks die Relation

$$\sec^2 P \sec^2 \varrho \sin^2 D = \tan^2 P - 2 \tan P \tan \varrho.$$

Wir können in derselben Weise die zwischen dem eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreise eines sphärischen Polygons bestehende Relation entwickeln.[87] (Vergl. „Kegelschnitte" Art. 369, 10.)

277. Nach Art. 275 ist die Gleichung eines kleinen Kugelkreises oder eines geraden Kegels in trimetrischen Coordinaten nothwendig von der Form

$$\alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C$$
$$+ 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos a + 2\gamma\alpha \sin C \sin A \cos b + 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos c$$
$$= (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2.$$

Wenn nun der betrachtete Kugelkreis dem Fundamentaldreieck $\alpha\beta\gamma$ umgeschrieben ist, so müssen die Coefficienten von α^2, β^2, γ^2 verschwinden und wir müssen daher auch

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$$

haben, d. h., wie schon vorher bewiesen ist, diese Gleichung repräsentirt die Polare vom Centrum des umgeschriebenen Kreises.

Die Substitution der Werthe $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ für l, m, n liefert die Gleichung des betrachteten Kreises in der Form

$$\beta\gamma \tan \tfrac{1}{2}a + \gamma\alpha \tan \tfrac{1}{2}b + \alpha\beta \tan \tfrac{1}{2}c = 0.$$

Die Gleichung des eingeschriebenen Kreises wird genau in derselben Form erhalten, wie in dem Falle der ebenen Dreiecke, nämlich

$$\cos \tfrac{1}{2}A \sqrt{(\alpha)} \pm \cos \tfrac{1}{2}B \sqrt{(\beta)} \pm \cos \tfrac{1}{2}C \sqrt{(\gamma)} = 0.$$

Die Tangentialgleichung eines kleinen Kreises kann entweder durch Bildung der Reciproken von der im Anfang dieses Art. gegebenen oder direct aus Art. 264 abgeleitet werden, indem man ausdrückt, dass die Senkrechte vom Centrum auf

$$\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma = 0$$

constant ist. So erhält man für die Tangentialgleichung des Kreises von Centrum α', β', γ' und vom Radius ϱ

$$\sin^2\varrho\,(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\eta\zeta\cos A-2\zeta\xi\cos B-2\xi\eta\cos C)$$
$$=(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta)^2;$$

eine Form, die nach Art. 276 auch zeigt, dass jeder Kreis mit dem imaginären Kreise im Unendlichen eine doppelte Berührung hat.

278. Wir wollen diese Ergebnisse zur Untersuchung der von Hart gegebenen Uebertragung des Satzes vom Feuerbach'schen Kreise auf sphärische Dreiecke anwenden. Das bezügliche Theorem behauptet, dass die vier eingeschriebenen Kreise eines sphärischen Dreiecks von einem und demselben fünften Kreise berührt werden.[88])

Man arbeitet am bequemsten mit den Tangentialgleichungen. Die Tangentialgleichungen der Kreise, welche die Seiten des Fundamentaldreiecks berühren, sind, weil sie die Glieder ξ^2, η^2, ζ^2 nicht enthalten dürfen, offenbar

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\eta\zeta\cos A-2\zeta\xi\cos B-2\xi\eta\cos C=(\xi\pm\eta\pm\zeta)^2;$$

oder

$$1)\qquad \eta\zeta\cos^2\tfrac{1}{2}A+\zeta\xi\cos^2\tfrac{1}{2}B+\xi\eta\cos^2\tfrac{1}{2}C=0,$$
$$2)\qquad \eta\zeta\cos^2\tfrac{1}{2}A-\zeta\xi\sin^2\tfrac{1}{2}B-\xi\eta\sin^2\tfrac{1}{2}C=0,$$
$$3)\qquad -\eta\zeta\sin^2\tfrac{1}{2}A+\zeta\xi\cos^2\tfrac{1}{2}B-\xi\eta\sin^2\tfrac{1}{2}C=0,$$
$$4)\qquad -\eta\zeta\sin^2\tfrac{1}{2}A-\zeta\xi\sin^2\tfrac{1}{2}B+\xi\eta\cos^2\tfrac{1}{2}C=0;$$

und diese Kreise werden alle durch den Kreis

$$5)\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\eta\zeta\cos A-2\zeta\xi\cos B-2\xi\eta\cos C$$
$$=\{\xi\cos(B-C)+\eta\cos(C-A)+\zeta\cos(A-B)\}^2$$

berührt. Denn die Centra der Aehnlichkeit der Kreise 1) und 5) sind durch die Tangentialgleichungen

$$(\xi+\eta+\zeta)\pm\{\xi\cos(B-C)+\eta\cos(C-A)+\zeta\cos(A-B)\}=0$$

bestimmt und eines derselben ist daher

$$\xi\sin^2\tfrac{1}{2}(B-C)+\eta\sin^2\tfrac{1}{2}(C-A)+\zeta\sin^2\tfrac{1}{2}(A-B)=0.$$

Die Bedingung, unter welcher dieser Punkt dem Kreise 1) angehört, ist aber (vergl. Art. 332 der „Kegelschnitte")

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(B-C)+\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}(C-A)+\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(A-B)=0,$$

und diese ist erfüllt. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind in dem betrachteten Falle

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(B - C), \quad \sin^2 \tfrac{1}{2}(C - A), \quad \sin^2 \tfrac{1}{2}(A - B).$$

In gleicher Art zeigt man, dass der Kreis 5) die übrigen drei Kreise berührt.

279. Die Coordinaten des Centrums vom Hart'schen Kreise sind durch

$$\cos(B - C), \quad \cos(C - A), \quad \cos(A - B)$$

ausgedrückt und dasselbe liegt daher in derjenigen Linie, welche den Durchschnittspunkt der drei Höhen mit dem Durchschnittspunkte der drei Seitenhalbirungslinien verbindet. Denn die Coordinaten des Durchschnittes der Höhen sind

$$\cos B \cos C, \quad \cos C \cos A, \quad \cos A \cos B,$$

und die des Durchschnittspunkes der Seitenhalbirungslinien sind

$$\sin B \sin C, \quad \sin C \sin A, \quad \sin A \sin B.$$

Dasselbe Centrum liegt aber auch in der Verbindungslinie des Punktes $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ mit dem Punkte

$$\sin(S-B)\sin(S-C), \sin(S-C)\sin(S-A), \sin(S-A)\sin(S-B),$$

weil man hat

$$\cos A - \cos(B - C) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B - C) \sin \tfrac{1}{2}(C + A - B);$$

der erste Punkt ist der Schnittpunkt derjenigen Ecktransversalen, die mit der einen Seite denselben Winkel machen, wie die Höhe mit der andern; der zweite ist der Durchschnitt der Perpendikel, die von den Ecken auf die Verbindungslinien der Mittelpunkte der beziehungsweise anliegenden Seiten gefällt werden. Damit ist das fragliche Centrum als Durchschnitt von zwei bekannten Linien nachgewiesen.

280. Die directe Untersuchung würde in folgender Weise zu führen sein. Für

$$2s = a + b + c$$

und $\alpha \sin A = x$, $\beta \sin B = y$, $\gamma \sin C = z$ oder die Gleichung des imaginären Kreises im Unendlichen

$$U \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos a + 2zx \cos b + 2xy \cos c = 0$$

ist die Gleichung des eingeschriebenen Kreises

$$U = \{x \cos(s - a) + y \cos(s - b) + z \cos(s - c)\}^2,$$

denn diese Gleichung ist äquivalent mit

$$x^2 \sin^2(s-a) + y^2 \sin^2(s-b) + z^2 \sin^2(s-c)$$
$$- 2yz \sin(s-b)\sin(s-c) - 2zx \sin(s-c)\sin(s-a)$$
$$- 2xy \sin(s-a)\sin(s-b) = 0.$$

Aus ihr gehen aber die Gleichungen der drei andern Kreise, welche dem sphärischen Dreieck eingeschrieben sind, hervor durch die respective Veränderung der Zeichen von a, b oder c (wobei U ungeändert bleibt) und man erkennt sodann, dass alle vier Kreise durch denjenigen fünften berührt sind, dessen Gleichung ist

$$U = \left\{ x \frac{\cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a} + y \frac{\cos\frac{1}{2}c \cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b} + z \frac{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} \right\}^2.$$

Da diese Gleichung durch den Zeichenwechsel von a, b oder c nicht geändert wird, so berührt der durch sie gegebene Kreis alle, wenn er einen jener vier Kreise berührt.

Nun ist eine seiner gemeinsamen Sehnen mit dem eingeschriebenen Kreise

$$x\left\{\cos(s-a) - \frac{\cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}\right\} + y\left\{\cos(s-b) - \frac{\cos\frac{1}{2}c \cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b}\right\}$$
$$+ z\left\{\cos(s-c) - \frac{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\right\} = 0,$$

oder in reducirter Form

$$\frac{x}{\sin(s-b) - \sin(s-c)} + \frac{y}{\sin(s-c) - \sin(s-a)} + \frac{z}{\sin(s-a) - \sin(s-b)} = 0.$$

Die Bedingung, unter welcher die Linie $Ax + By + Cc = 0$ die Curve $\sqrt{(ax)} + \sqrt{(by)} + \sqrt{(cz)} = 0$ berührt, ist aber

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0,$$

und ihre Anwendung auf die betrachtete Linie und den eingeschriebenen Kreis giebt

$$\sin(s-a)\{\sin(s-b) - \sin(s-c)\} + \sin(s-b)\{\sin(s-c) - \sin(s-a)\}$$
$$+ \sin(s-c)\{\sin(s-a) - \sin(s-b)\} = 0,$$

d. h. eine Identität.

Man findet leicht, dass die fragliche gemeinschaftliche Tangente auch den sphärischen Kegelschnitt $\sqrt{(x)} + \sqrt{(y)} + \sqrt{(z)} = 0$ berührt, der das Fundamentaldreieck in den Seitenmittelpunkten berührt — wie dies zuerst von W. Hamilton bemerkt worden ist; dies führt zur Construction dieser Tangente als der vierten gemeinschaftlichen Tangente von zwei Kegelschnitten, von denen

man die drei übrigen gemeinsamen Tangenten kennt. (Vergl. „Kegelschnitte“ Art. 314, 6.)

Da nach der allgemeinen Gleichung des Hart'schen Kreises durch

$$\alpha \sin A \frac{\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a} + \beta \sin B \frac{\cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} b}$$

$$+ \gamma \sin C \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c} = 0,$$

oder

$$\alpha \tan \tfrac{1}{2} a + \beta \tan \tfrac{1}{2} b + \gamma \tan \tfrac{1}{2} c = 0,$$

oder endlich

$$\alpha \cos (S - A) + \beta \cos (S - B) + \gamma \cos (S - C) = 0$$

die Polare seines Centrums dargestellt wird, so gelangt man zu andern Constructionen für das Centrum dieses Kreises.

Der Radius R des Berührungskreises zu drei andern Kreisen von bekannten Centren und mit den Radien r, r', r'' kann berechnet werden, indem man $r + R$, $r' + R$, $r'' + R$ für d, e, f in die Formeln der Art. 36, 38 einsetzt und die entspringende Gleichung für R auflöst. Durch Anwendung dieser Methode auf die drei äusserlich eingeschriebenen Kreise findet man die Tangente des Radius vom Hart'schen Kreise gleich der Hälfte der Tangente des Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG und BERLIN.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften

mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Herausgegeben im Auftrage der

Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien,

sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen.

In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. Geheftet und in Halbfrz. geb.

I. **Arithmetik und Algebra**, 2 Teile, redigiert von W. Fr. Meyer.

II. **Analysis**, 2 Teile, redigiert von H. Burkhardt und W. Wirtinger.

III. **Geometrie**, 3 Teile, redigiert von W. Fr. Meyer.

IV. **Mechanik**, 4 Teilbände, redigiert von F. Klein und C. H. Müller.

V. **Physik**, 3 Teile, redigiert von A. Sommerfeld.

VI. 1. **Geodäsie und Geophysik.** 2 Teilbände redigiert von Ph. Furtwängler und E. Wiechert

2. **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.

VII. **Geschichte, Philosophie, Didaktik.** (In Vorbereitung.)

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker darüber orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In sieben Bänden zu je etwa 640 Druckseiten sollen die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich geordneter Artikel behandelt werden; der letzte Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sind so gehalten, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht.

Encyclopédie des sciences mathématiques

pures et appliquées.

Publiée sous les auspices des Académies des sciences

de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne

avec la collaboration de nombreux savants.

Edition française,

rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de

Jules Molk, professeur à l'université de Nancy.

En sept tomes. gr. 8. Geheftet.

Durch die günstige Aufnahme veranlaßt, welche die deutsche Ausgabe dieses monumentalen Werkes in Fachkreisen gefunden hat, und auf vielfache Anregungen hat sich die Verlagsbuchhandlung entschlossen, die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften in Gemeinschaft mit der Firma Gauthier-Villars in Paris auch in französischer Sprache erscheinen zu lassen. Das Werk wird, wie schon die ersten Lieferungen zeigen, seitens der deutschen Bearbeiter viele Änderungen und Zusätze erfahren, und auch die französischen Mitarbeiter, sämtlich Autoritäten auf ihren Gebieten, haben eine gründliche Umarbeitung vorgenommen. Zum ersten Male dürfte somit wohl hier der Fall eingetreten sein, daß sich bei einem so großen Werke die ersten deutschen und französischen Fachgelehrten zu gemeinsamer Arbeit verbunden haben.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Repertorium der höheren Mathematik (Difinitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise) von **Ernst Pascal**, ord. Professor an der Universität Pavia. Deutsche Ausgabe von weil. A. Schepp in Wiesbaden. 2. neubearb. Aufl. In zwei Teilen: **Analysis und Geometrie.** gr. 8. **I. Teil:** Die Analysis. Herausgegeben von **P. Epstein.** [ca. 700 S.] 1909. In Leinwand geb. ca. n. *M.* 12.— (Erscheint im Januar 1909.) **II. Teil:** Die Geometrie. Herausgegeben von **H. E. Timerding.** [ca. 800 S.] 1909. In Leinwand geb. ca. n. *M.* 14.— [Erscheint Ostern 1909.]

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser imstande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann. Für den Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademekum" sein, in dem er, kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will. Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht.

Vocabulaire Mathématique, français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Von Professor Dr. **Felix Müller.** [XV u. 316 S.] Lex.-8. 1900/1901. In Leinw. geb. n. *M.* 20.— Wurde in 2 Lieferungen ausgegeben: I. Lieferung. [IX u. 132 S.] 1900. Geh. n. *M.* 8.— II. Lieferung. [S. IX—XV u. 133—316.] 1901. Geh. n. *M.* 11.—

Das Vokabularium enthält in alphabetischer Folge mehr als 12000 Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik in französischer und deutscher Sprache und soll in erster Linie eine Ergänzung der gebräuchlichen Wörterbücher für die beiden genannten Sprachen sein. Da das Vokabularium zugleich als Vorarbeit zu einem Mathematischen Wörterbuche dienen soll, so sind auch zahlreiche Nominalbenennungen aufgenommen, deren Anführung aus rein sprachlichem Interesse überflüssig erscheinen dürfte. Z. B. Gaußsche Abbildung (einer Fläche auf eine Kugel) (Gauß 1827) [inf. Geom.] représentation de Gauss; Clairauts Satz (über die geodätischen Linien auf Umdrehungsflächen) (Clairaut 1733) [inf. Geom.] théorème de Clairaut. Aus den beigefügten Zusätzen ist zu ersehen, daß das Vokabularium mehr bietet, als der Titel erwarten läßt.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von **Moritz Cantor.** In 4 Bänden. gr. 8. **I. Band.** Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Aufl. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] 1907. Geh. n. *M.* 24.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 26.— **II. Band.** Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2. verb. u. verm. Aufl. Mit 190 Figuren im Text. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. *M.* 26.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 28.— **III. Band.** Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2. verb. u. verm. Aufl. Mit 146 Figuren im Text. [X u. 923 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. *M.* 25.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 27.— **IV. Band.** Vom Jahre 1759 bis zum Jahre 1799. Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren **V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti,** und **C. R. Wallner** von **M. Cantor.** Mit 100 Figuren im Text. [VI u. 1113 S.] 1908. Geh. n. *M.* 32.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 35.—

„Einen hervorragenden Platz unter den neueren Veröffentlichungen über die Geschichte der Mathematik nimmt die zusammenfassende Darstellung ein, die uns Moritz Cantor geschenkt hat.

Mit rastlosem Fleiß, mit nie ermüdender Geduld, mit der unverdrossenen Liebe des Sammlers, der auch das scheinbar Geringe nicht vernachlässigt, hat Moritz Cantor dies kolossale Material gesammelt, kritisch gesichtet, durch eigene Forschungen ergänzt, nach einheitlichen Grundsätzen und einheitlichem Plan zu einem Ganzen verschmolzen, und indem er in seltener Unparteilichkeit bei strittigen Fragen, deren die Geschichte der Mathematik so viele hat, auch die abweichenden Ansichten zu Wort kommen ließ, hat er ein Werk geschaffen, das die reichste Quelle der Belehrung, der Anregung für einen jeden ist, der sich über einen geschichtlichen Fragepunkt Rat holen, der an der Geschichte der Mathematik mitarbeiten will...." **(Aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen.)**

Buchbinderei
H. Pantele
8012 Riemerling/
Telefon 6 01 63

Ar
C
de

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Salmon, George / Fiedler, Wilhelm / Kommerell, Karl,

Analytische Geometrie des Raumes

Bd.: 1

1898

Math.p. 490 sda-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11867863-5